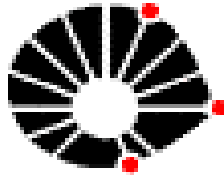


**MARTA SANTANA COMÉRIO**



**UNICAMP**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE EDUCAÇÃO**

**INTERAÇÃO SOCIAL E SOLUÇÃO DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS NAS  
SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

**Campinas/SP**

**2007**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE EDUCAÇÃO**  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**INTERAÇÃO SOCIAL E SOLUÇÃO DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS**  
**NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

**Autor: Marta Santana Comério**

**Orientador: Prof. Dr<sup>a</sup>. Márcia Regina Ferreira de Brito**

**Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida por Marta Santana Comério e aprovada pela Comissão Julgadora.**

**Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_**

**Assinatura:**

\_\_\_\_\_

**Comissão julgadora:**

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**2007**

© by Marta Santana Comério, 2007.

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca  
da Faculdade de Educação/UNICAMP**

C734i Comério, Marta Santana.  
Interação social e solução de problemas aritméticos nas séries iniciais do ensino fundamental / Marta Santana Comério. -- Campinas, SP: [s.n.], 2007.

Orientador : Márcia Regina Ferreira de Brito.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Interação social. 2. Solução de problemas. 3. Aritmética. I. Brito, Márcia Regina Ferreira de. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

07-108/BFE

**Título em inglês:** Social interaction and arithmetic problem solving in the primary school

**Keywords:** Social interaction ; Problem solving ; Arithmetic

**Área de concentração:** Psicologia do desenvolvimento

**Titulação:** Mestre em Educação

**Banca examinadora:** Profa. Dra. Márcia Regina Ferreira de Brito (Orientadora)

Profa. Dra. Fernanda de Oliveira Soares Taxa Amaro

Profa. Dra. Érica Valéria Alves

Profa. Dra. Lucila Diehl Tolaine Fini

**Data da defesa:** 02/07/2007

**Programa de pós-graduação :** Educação

**e-mail :** santanacomerio@yahoo.com

Quem somos nós, quem é cada um de nós senão uma combinatória de experiências, de informações, de leituras, de imaginações? Cada vida é uma enciclopédia, uma biblioteca, um inventário de objetos, uma amostragem de estilos, onde tudo pode ser continuamente remexido e reordenado de todas as maneiras possíveis.

Ítalo Calvino <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Calvino, Ítalo (1997). *Seis propostas para o próximo milênio*. São Paulo: Companhia das letras, p.138.

## RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo investigar a interação social em díade durante a solução de problemas aritméticos rotineiros e não-rotineiros. O estudo também examina os procedimentos de solução e a representação gráfica adotada pelos participantes na solução de problemas de estrutura aditiva e multiplicativa. Participaram deste estudo vinte e quatro alunos de uma quarta série municipal do Ensino Fundamental. O plano empírico da investigação foi composto por um pré-teste (tipo lápis e papel) contendo doze problemas aritméticos, quatro sessões deliberadas de interação social em díade e um pós-teste com as mesmas características do pré-teste. O resultado do pré-teste também foi considerado na formação das díades de acordo com os níveis de desempenho: alto, médio e baixo. Os resultados principais, interpretados conforme as proposições de Vergnaud e dos estudos de Vigotski, indicaram que a maioria dos estudantes, após trabalharem em díade, apresentou avanço no desempenho. Em consonância com diversos estudos na área, a interação social foi vista como um fator facilitador do desenvolvimento conceitual da aritmética elementar veiculada à solução de problemas. As recomendações deste estudo apontaram a interação social entre os estudantes, durante a solução de problemas, como uma importante ferramenta no ensino e aprendizagem da matemática.

Palavras-chave: interação social, solução de problemas, aritmética.

## **ABSTRACT**

This research had the purpose of investigating the social interaction in dyads during problem solving routine or non-routine arithmetics problems. The study also examines the procedures of solution and the graphic representation adopted by the participants in the problem solving of the addition and multiplication structure. Twenty-four fourth-graded students, from a municipal school, took part in this study. The empiric investigation plan is formed by a pre-test (pencil and paper) which contains twelve arithmetic problems, four sections deliberated of social interaction in dyad, and a post-test with the same characteristics of the pre-test. The result of the pre-test was also considered for dyad formation according to performance levels: high, medium and low. The main results, interpreted according to Vergnaud's propositions and Vigotski's studies, indicate that most students, after working in dyad, presented progress in their performance. In consonance with several studies in the area, the social interaction was faced as a facilitator of the conceptual development of elementary arithmetics guided to the problem solving. The recommendations of these studies indicate the social interaction among the students, during the problem solving, as an important tool on mathematics teaching and learning.

Keywords: social interaction, problem solving, arithmetics.

## **AGRADECIMENTOS**

“Sonho que se sonha só, é só um sonho que se sonha só, mas sonho que se sonha junto é realidade”. (Raul Seixas)

A minha orientadora Márcia Regina Ferreira de Brito que, mais do que orientar um trabalho proporcionou muitos momentos de reflexão, de críticas construtivas ou de simples conversas, as quais se revelaram essenciais e gratificantes nos caminhos percorridos por esta investigação.

Aos colegas de mestrado e doutorado que proporcionaram momentos de troca de saberes, diálogos, aprendizagem e a conquista de grandes amizades. Em especial minhas amigas de todas as horas Kelly Maia de Paula, Roseline Ardiles do Nascimento e Telma Assad Mello.

A minha grande amiga Regina Estela Silva que pacientemente esteve sempre ao meu lado, acompanhou todo o desenrolar desta investigação e, muito me incentivou na concretização deste projeto.

A uma amiga também especial Marjorie Cristina Rocha da Silva que tive o prazer de conhecer em uma das disciplinas cursadas na UNICAMP e que com muita suavidade e dedicação auxiliou na análise da pesquisa quantitativa deste estudo e leitura final desta

dissertação.

A Secretaria de Educação da cidade de Mogi Guaçu agradeço a permissão para a realização desta investigação em uma das escolas da rede municipal de ensino.

À diretora, coordenadora e professora da classe onde foi realizada a pesquisa e a todos os alunos que participaram com muito entusiasmo e disposição desta caminhada, abraçaram este projeto e muito colaboraram para a realização deste estudo.

À professora Rosely Palermo Brenelli pela delicadeza dos comentários e sugestões, junto ao exame da qualificação, os quais se tornaram preciosas orientações que muito contribuíram para melhorar a qualidade desta investigação.

Às professoras Érica Valéria Alves, Fernanda Oliveira Taxa e Maria Lúcia Faria Moro pela disponibilidade de participar na banca de defesa e leitura atenta da pesquisa, comentários, críticas e sugestões que, com certeza, foram de extrema importância para aperfeiçoar esta pesquisa.

Aos funcionários da Faculdade de Educação da UNICAMP, muito obrigada, pelo pronto atendimento as nossas solicitações e ajuda sempre que necessário.

A Maria de Fátima Senechal Mufalo, diretora da escola onde, atualmente, exerço minhas atividades profissionais, pelo incentivo, carinho e por, muitas vezes, ter possibilitado um horário de trabalho mais flexível, para que enfim essa pesquisa fosse concluída.

Aos meus pais, Zilda e José Marota, meu alicerce, pois como ninguém, sempre incentivaram os estudos dos seus filhos e estiveram presentes em todos os momentos da minha vida.

Aos meus irmãos, cunhada e cunhados pelo carinho e incentivo sempre nas horas certas. Pelo muito que lhes devo, obrigada.

Ao João, pessoa ímpar pela qual tenho grande carinho e admiração, e que sempre incentivou meus estudos e acreditou que um dia eu estaria aqui, concluindo o mestrado.

Por fim, agradeço e dedico esta dissertação às minhas queridas filhas Fernanda e Jéssica por terem sido sempre o melhor estímulo para conquistar meus ideais e continuar neste trabalho, que por muitas vezes me afastou das suas companhias. Obrigada pelo amor incondicional, por agüentar minhas ausências e “stress”, principalmente na reta final desta pesquisa.



## SUMÁRIO

ABSTRACT .....	ix
AGRADECIMENTOS .....	xi
LISTA DE FIGURAS .....	xvii
LISTA DE TABELAS .....	xix
INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO I.....	13
A INTERAÇÃO SOCIAL E A TEORIA DE VIGOTSKI .....	13
1. As teorias psicológicas e a interação social.....	13
2. A teoria de Vigotski.....	15
2.1 Processos Psicológicos Elementares e Processos Psicológicos Superiores.....	16
2.2 Mediação, Instrumento e Signo .....	19
2.3 O uso dos instrumentos e signos.....	22
2.4 O processo de internalização .....	24
2.5 A formação de conceitos.....	26
2.6 O papel da linguagem .....	33
2.7 Pensamento e linguagem .....	35
2.8 Desenvolvimento e Aprendizado.....	39
2.9 Zona de desenvolvimento proximal.....	40
2.10 O papel da escola segundo a teoria vygotskiana.....	42
CAPÍTULO II.....	49
O ESTUDO DAS ESTRUTURAS ADITIVAS E MULTIPLICATIVAS DA	

ARITMÉTICA ELEMENTAR.....	49
1. A Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud .....	61
1.1 Principais Conceitos da Teoria dos Campos Conceituais.....	64
1.1.1. Esquema .....	64
1.1.2 Conceitos .....	65
1.1.3 Conceito-em-ação e Teorema-em-ação .....	65
1.2 Os dois principais campos conceituais da aritmética: as estruturas aditivas e multiplicativas .....	67
1.2.1 Estrutura aditiva.....	68
1.2.2 Estrutura multiplicativa.....	72
1.3 A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e a prática educativa.....	76
CAPÍTULO III .....	79
A MATEMÁTICA E A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS .....	79
CAPÍTULO IV .....	103
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS .....	103
1. Objetivos.....	104
2. Participantes.....	104
3. Procedimentos para coleta de dados .....	105
I) Pré-teste.....	105
II) Interação deliberada em díade .....	109
III) Pós-teste.....	112
4. Análise de dados .....	112
CAPÍTULO V .....	113
APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	113
1. Análise referente ao desempenho dos estudantes no pré-teste e pós-teste .....	113
2 . Distribuição quanto ao desempenho conforme os problemas “rotineiros” e “não rotineiros” do pré-teste e pós-teste.....	115
3. Análise comparativa do desempenho dos estudantes no pré-teste e pós-teste .....	118
4. A evolução dos desempenhos dos alunos em função do tipo de díade.....	120
5. Análise quantitativa referente aos procedimentos de solução e representação gráfica	

adotada pelos estudantes nos problemas do pré-teste e pós-teste .....	123
6. Análise dos procedimentos de solução e formas de representação gráfica adotada pelos participantes nos problemas de estrutura aditiva .....	128
7. Análise dos procedimentos de solução e formas de representação gráfica adotada pelos participantes em problemas de estrutura multiplicativa .....	137
8. Os problemas de estrutura aditiva e multiplicativa presentes nos instrumentos de avaliação do pré-teste e pós-teste: uma síntese.....	148
9. Análise qualitativa descritiva das sessões de interação social em díade .....	152
Fragmentos dos diálogos estabelecidos entre os participantes em situação de interação social durante a solução de problemas aritméticos .....	154
9.1 Apresentação e análise de fragmentos de solução em díade de problemas de estrutura aditiva.....	155
9.2 Apresentação e análise de fragmentos de solução em díade de problemas de estrutura multiplicativa .....	177
10. Recomendações e discussão final dos resultados relativos à interação social em díade durante a solução de problemas .....	194
CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	201
REFERÊNCIAS .....	205
ANEXO I.....	223
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO.....	223
ANEXO II .....	225
PRÉ-TESTE E PÓS-TESTE .....	225
ANEXO III .....	235
AS SESSÕES DE INTERAÇÃO SOCIAL: OS PROBLEMAS .....	235
SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM DÍADE – 1ª. SESSÃO.....	237
SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM DÍADE – 2ª. SESSÃO.....	239
SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM DÍADE – 3ª. SESSÃO.....	241
SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM DÍADE – 4ª. SESSÃO.....	242



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Atividade mediada (signo e instrumento).....	20
Figura 2. Esquema triangular proposto por Vigotski. ....	21
Figura 3. As três categorias semânticas de problemas de adição e subtração. ....	56
Figura 4. Diferença estrutural entre adição e multiplicação.....	59
Figura 5. Exemplo de diagrama proposto por Vergnaud envolvendo transformação. ....	71
Figura 6. Exemplo de diagrama proposto por Vergnaud envolvendo comparação.....	71
Figura 7. Esquema estrutura multiplicativa do tipo isomorfismo de medida.....	74
Figura 8. Figura ilustrativa de problema não-rotineiro.....	87
Figura 9. Classificação dos problemas do pré-teste e pós-teste. ....	107
Figura 10. Sistema de pontuação com cinco valores.....	108
Figura 11. Procedimento de solução e representação gráfica para o problema 1 do pós-teste .....	129
Figura 12. Representação em forma de diagrama para o problema 3 do pré-teste.....	131
Figura 13. Procedimento de solução e representação gráfica para o problema 3 do pré-teste. .....	131
Figura 14. Procedimento de solução e representação gráfica para o problema 6 do pós-teste	132
Figura 15. Procedimento de solução e representação para o problema 8 do pré-teste .....	133
Figura 16. Procedimento de solução e representação gráfica para o problema 8 do pós-teste .....	134
Figura 17. Procedimento de solução e representação gráfica para o problema 9 do pré-teste	135
Figura 18. Procedimento de solução, problema 11 do pré-teste: adição de todos os dados contidos no enunciado .....	136
Figura 19. Procedimento de solução, problema 11 do pós-teste: adições parciais dos dados contidos no enunciado .....	137

Figura 20. Procedimento de solução e representação gráfica do problema 2 do pré-teste.....	138
Figura 21. Procedimento de solução e representação gráfica do problema 2 do pós-teste ....	139
Figura 22. Procedimento de solução e representação gráfica do problema 4 do pós-teste ....	140
Figura 23. Procedimento de solução e representação gráfica do problema 4 do pós-teste ...	141
Figura 24 . Procedimento de solução e representação gráfica do problema 12 do pré-teste...	142
Figura 25. Procedimento de solução e representação (pictográfica) do problema 5 pós-teste	144
Figura 26. Procedimento de solução para solução do problema 5 do pós-teste .....	145
Figura 27. Procedimento de solução e representação gráfica, problema 10 pré-teste: diagrama de árvore .....	146
Figura 28. Procedimentos de solução e representação do tipo correspondência um-para-muitos .....	147
Figura 29. Diagrama proposto por Vergnaud para problema de transformação ligando duas medidas.....	158
Figura 30. Procedimento de solução, representação e resposta (12 km) para o problema “Os sitiantes”.....	168
Figura 31. Procedimento de solução, representação e resposta (8km) para o problema “Os sitiantes”.....	169
Figura 32. Procedimento de solução e representação do problema “Os sitiantes”.....	170
Figura 33. Esquema de um problema do tipo isomorfismo de medida.....	174
Figura 34. Solução do problema “Os amigos”.....	176
Figura 35. Soluções de duas díades para o problema “Os amigos”.....	176
Figura 36. Procedimento de solução para problema de divisão .....	178
Figura 37. Figura ilustrativa de um problema de divisão .....	180
Figura 38. Procedimento de solução e representação de um problema de divisão partitiva ...	182
Figura 39. Procedimento aritmético adotado em problema de divisão por cota .....	186
Figura 40. Procedimento de solução e representação gráfica de problema de divisão por cotas .....	187
Figura 41. Ilustração de um problema do tipo produto de medidas .....	191

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Distribuição de estudantes segundo níveis de desempenho no pré-teste.....	114
Tabela 2. Distribuição de estudantes segundo níveis de desempenho no pós-teste .....	115
Tabela 3. Indicadores referentes à distribuição de acertos e erros no pré-teste.....	116
Tabela 4. Indicadores referentes à distribuição de acertos e erros no pós-teste .....	117
Tabela 5. Distribuição de estudantes de acordo com o desempenho no pré e pós-teste .....	119
Tabela 6. Distribuição dos estudantes segundo os níveis de desempenho no pré e pós-teste.	120
Tabela 7. Evolução do desempenho dos sujeitos para cada um dos diferentes tipos de díades. .....	121
Tabela 8. Distribuição de estudantes conforme os procedimentos de solução adotados pelos participantes em cada problema proposto para o pré-teste.....	125
Tabela 9. Distribuição de estudantes segundos os procedimentos de solução adotados em cada problema proposto para o pós-teste.....	127

## INTRODUÇÃO

O estudo de como se processa a aprendizagem por meio da interação social é uma linha de investigação na área educacional que tem nos oferecido um grande número de pesquisas. A revisão da literatura nesta área revela ainda que este campo de pesquisa abrange diferentes áreas do ensino e que as análises e interpretações da interação social no contexto escolar são realizadas de acordo com diferentes vertentes da psicologia do desenvolvimento, dentre elas, as que se originam principalmente dos estudos da Psicologia Genética de Jean Piaget e as da análise sócio-histórica de Lev Vigotski<sup>2</sup>.

Nas últimas duas décadas, as pesquisas em Educação Matemática também têm evidenciado a importância da comunicação e da interação na sala de aula e valorizado a criação de um ambiente onde os alunos têm a possibilidade de trocar pontos de vista, e confrontar soluções como uma estratégia favorecedora do processo de aprendizagem.

Coll-Salvador (1997), numa análise do processo de interação advindo da teoria piagetiana, salientou que a interação social é uma linha de pesquisa que tem demonstrado ser bastante frutífera e que na realidade, como extensão da teoria genética de Jean Piaget, tem como preocupação central a hipótese do conflito cognitivo e o papel da cooperação no desenvolvimento intelectual.

Ainda, de acordo com Coll-Salvador (1997), a partir dos anos setenta em Genebra, um

---

<sup>2</sup> Em diversas publicações o nome de Lev Vigotski aparece grafado de diferentes maneiras. Nesta apresentação optou-se pela grafia “Vigotski” encontrada nas traduções de suas obras apresentadas nas referências. Em citações literais será mantida a grafia usada pelo autor da obra.



grupo de pesquisadores, liderado principalmente por Anne Nelly Perret-Clermont, ampliando os estudos originais de Piaget, passa a focalizar seus esforços de investigação na análise das relações em que a criança mantém com seu meio social, concretamente com seus companheiros e iguais. A idéia de partida deste grupo, em que o marco interpretativo é a teoria genética, consiste na análise das relações entre iguais e de como esta pode contribuir e enriquecer a compreensão acerca dos processos que estão na base da socialização e do desenvolvimento intelectual do ser humano.

Segundo Moro (2000), os estudos iniciais de Perret-Clemont e do seu grupo de pesquisadores indicaram algumas condições sob as quais a interação social de crianças (em díades ou tríades) pode acelerar o desenvolvimento cognitivo. Os estudos do grupo seguem na busca de formas pelas quais os mecanismos sociais exercem sua influência sobre os processos cognitivos. A autora apontou ainda que estudos mais recentes do grupo expõem uma mudança de foco: do exame das interações sociais como causa da elaboração cognitiva, para o exame da complexa interdependência das dimensões sócio-cognitivas presentes no sistema das interações sociais, defendendo então que as habilidades lógicas viriam de um modelo tripolar (sujeito-sujeito-objeto) e que a intersubjetividade não seria apenas criação interindividual, mas também sócio cultural. Nas palavras de Moro (2000):

Vemos nesses trabalhos que o lugar da dimensão sócio-cultural na cognição segue privilegiado, incluídos os sistemas de mediação semiótica, quem sabe refletindo influências da psicologia soviética de tradição vygotskiana. Porém, o que vem da dimensão sócio-cultural à cognição individual é visto como reinterpretado ativamente pelo sujeito, marca construtivista que a proposta dos autores, ora chamada socioconstrutivista ainda conserva (Moro, 2000, p. 96).

Sabe-se que, além dos conteúdos cognitivos construídos durante a escolaridade, estão presentes, no contexto da sala de aula, conteúdos sócio-culturais e afetivos da constituição do sujeito, os quais influenciam a aprendizagem e interferem nas atividades de ensinar e aprender. Assim sendo, nos últimos anos, outra concepção teórica que tem tido ampla aceitação no campo da psicologia do desenvolvimento, bem como, grande repercussão na área educativa, são os estudos e atualizações das teses de Vigotski sobre o papel da interação social no

desenvolvimento dos processos psicológicos superiores<sup>3</sup>.

De acordo com a teoria sócio-histórica a interação é entendida como um processo interpessoal mediado por ferramentas e signos. Nesta concepção teórica, os indivíduos por meio da linguagem — com sua dupla função, comunicativa e de meio de pensamento — trocam pontos de vista e expressam seu pensamento.

Nos escritos de Vigotski, a interação social era vinculada prioritariamente à relação entre a criança e um adulto ou, na relação estabelecida entre o professor e o estudante ou entre os alunos, sendo que um dos parceiros é mais experiente para mediar e favorecer a interação. Entretanto, diversas pesquisas, como por exemplo, as de Moysés (2004), Goodman e Goodman (2002) e Pessoa (2002), indicaram que, de maneira geral, todas as interações sociais, não apenas as que envolvem parceiros e adultos mais experientes, oferecem oportunidades para que as crianças aprendam mais sobre o mundo que as cerca e de maneira geral, fazer mais do que parecem ser capazes e extrair muito mais de uma atividade.

Na visão de Lima (2005b), em um processo sócio-histórico-cultural, o papel da linguagem e da aprendizagem é enfatizado no desenvolvimento humano e a questão central para a aquisição de conhecimentos é evidenciada por meio da interação. Alicerçada nos pensamentos de Vigotski, esta interação é entendida quando se introduz a idéia de mediação, enfatizando que o acesso do indivíduo ao conhecimento é sempre mediado, pois, por meio da mediação o indivíduo se transforma, se constitui e se desenvolve enquanto sujeito.

Davis (2005) salientou que há diferentes significações para a palavra interação. Segundo a autora, Vigotski envereda por um caminho de cunho sócio-histórico, no qual as interações do sujeito com o objeto, a ação do primeiro sobre o segundo passa, necessariamente, pela mediação social. Daí sua proposta ser conhecida como “sociointeracionista”, sendo que, o adjetivo “sócio” qualificaria a natureza do “interacionismo” por ele adotado.

Ao discutir algumas idéias de Vigotski em relação ao conhecimento matemático, Moura (2005) ressaltou o papel significativo da atividade compartilhada. O aluno trabalhando

---

<sup>3</sup> Os principais conceitos da vertente sócio-histórica da psicologia e dos estudos de Vigotski serão apresentados e discutidos no capítulo I deste estudo.

em conjunto vivencia, no plano exterior, o que irá internalizar posteriormente, sendo a linguagem oral um suporte para isso. Para a autora, é no ato de transmitir oralmente aquilo que pensa sobre a solução da questão matemática em jogo que a criança descobre a necessidade de organizar o próprio pensamento transformando-o em palavras.

Ainda, de acordo com a teoria sócio-histórica, uma das importantes funções da escola está relacionada à aquisição de conceitos científicos. Rabelo (2004) pontuou que a aquisição dos mesmos envolve operações lógicas e sua apreensão ocorre de maneira discursiva e lógico-verbal; por meio de generalizações em elaborações sempre mediadas por novos conceitos a serem adquiridos e que esta conceituação se desenvolve no processo de incorporação da experiência geral da humanidade mediada pela sua prática social num contexto sócio-histórico.

A análise da literatura na área revela ainda que diversos estudos buscaram relacionar os principais conceitos vigotskianos ao processo de ensino e aprendizagem da matemática, como por exemplo, as pesquisas desenvolvidas por Moysés (2004), Meira (2002), Poloni (2006), Tudge (2002) e Stelle (2001).

De acordo com Filho (2002), a aprendizagem de conceitos matemáticos exige que os estudantes tenham experiências em diversas situações. Na vida cotidiana, eles aprendem uma forma de conhecimento matemático que ocorre mediada por prática e materiais culturais definidos historicamente na comunidade na qual estão inseridos e onde estes conhecimentos emergem. Na escola, ensina-se algo novo e formalizado. Para lidar com esta forma de conhecimento matemático, é necessário apropriar-se das linguagens formais e materiais que são muitas vezes estranhas à cultura no cotidiano do aluno.

Para Nikson (1994), os membros de uma sociedade têm acesso ao conhecimento matemático em algum nível e seus conhecimentos são relevantes no contexto da sala de aula. Ainda, segundo o autor, a cultura da matemática na sala de aula é o produto do que o professor e os alunos trazem em termos de conhecimento, crenças e valores, e como isso afeta o processo de interação social.

Assim sendo, pode-se dizer que a cultura fornece ao indivíduo os sistemas simbólicos de representação da realidade, ou seja, o universo de significações que permite construir a interpretação do mundo real, local de negociações no qual seus membros estão em constante

processo de recriação e reinterpretação de informações, conceitos e significações, com o aspecto social fortemente entrelaçado à cultura. Este entrelaçamento é visto por Cole (1997) da seguinte forma:

Nas exposições clássicas da teoria cultural-histórica, a cultura representa somente uma maneira restrita e abstrata para enfatizar a propriedade crucial da mediação por intermédio dos instrumentos (artefatos). Entretanto, os instrumentos não existem isoladamente. Pelo contrário, está entrelaçado com os outros instrumentos e com as vidas sociais dos seres humanos que são mediadas por uma variedade de formas aparentemente infinitas. Considerados em conjunto, constituem o próprio meio da vida humana, o meio que conhecemos como cultura (Cole, 1997, p. 150).

Duarte (1996) discorreu sobre a importância do estudo teórico dos trabalhos desenvolvidos por Vigotski. Contudo, frisou que é bom lembrar que o conceito de desenvolvimento proximal, muito discutido atualmente, não fornece nenhuma fórmula definitiva do que e como ensinar a cada momento do processo escolar. Segundo o autor, são necessários estudos específicos para cada matéria e para cada série escolar. Mas o importante é que ele inverte a idéia de que se deve sempre organizar a matéria escolar com base no conhecimento das características de cada estágio já alcançado pelo desenvolvimento intelectual da criança. Esse conhecimento é indispensável, entretanto, ainda mais importante é que os conteúdos escolares dirijam-se ao que ainda não está formado na criança.

Para pesquisadores, que tomam como base as idéias de Vigotski, as funções psicológicas superiores, que têm origem histórica e cultural, diferentemente dos processos psicológicos elementares, que são de caráter biológico, são construídas na medida em que são utilizadas nas relações com o objeto a conhecer e nas relações interpessoais que a criança estabelece ao longo de seu desenvolvimento.

Transferindo esta idéia para a prática educativa, evidencia-se a importância da escola na constituição dos processos psicológicos superiores, sua estreita conexão com o ensino sistematizado e a qualidade da interação social estabelecida entre todos os participantes da comunidade escolar. A prática educativa deve ser encarada como um processo dinâmico em que estudantes e professores participam ativamente e interativamente, reconstruindo, negociando, reorganizando e reestruturando significados.

Dentro deste contexto, o diálogo estabelecido entre estudantes e professores, e entre os próprios alunos deve ser valorizado. Nas palavras de Coll-Salvador et al. (2000, p.193) a interação entre alunos é uma situação ótima para se explorar a função reguladora da linguagem e o seu poder como instrumento da aprendizagem: “utilizando a linguagem dos companheiros para regular os próprios processos intelectuais; utilizando a sua linguagem para regular a atuação e os processos mentais dos outros e, decididamente, utilizando-a para a própria auto-regulação”.

Paralelo a isto, outra linha de pesquisa promissora em educação, a qual também se tornou objeto de um grande número de pesquisas principalmente no ensino da matemática escolar foi a investigação sobre a solução de problemas.

Diversos estudos, como por exemplo, Echeverría (1998), Echeverría e Pozo (1998) e Polya (1978), indicaram a importância e necessidade do ensino da matemática por meio da solução de problemas. Segundo os autores, para solucionar problemas os alunos seguem passos, desde a obtenção da informação até a solução propriamente dita, sendo que a solução de problemas deve ser vista como processo, favorecendo o desenvolvimento das habilidades matemáticas.

De acordo com LeBlanc, Proudfit e Putt (1997, p. 48), há muito se reconhece que desenvolver a habilidade de resolver problemas é um dos objetivos do ensino fundamental e que o ensino de solução de problemas é considerado, inclusive, uma tarefa difícil, comparada a ensinar habilidades em cálculo. Segundo os autores, “uma razão para essa dificuldade é que a resolução de problemas é antes um processo complexo do que um conjunto de habilidades algorítmicas simples”.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil/MEC, 1997) apontam a solução de problemas como um eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem da matemática. Desta forma, sem dúvida, ensinar matemática por meio da solução de problemas é uma abordagem consistente com os PCN, pois conceitos e habilidades são aprendidos no contexto da solução de problemas (Onuchic & Allevato, 2004).

Entre os diversos estudos realizados na área de solução de problemas, Alves e Brito (2003) assinalaram que não existe um consenso sobre o papel desempenhado pela solução de problemas dentro do ensino da Matemática. Ressaltaram que dentro da Psicologia da

Educação Matemática alguns estudos têm abordado a solução de problemas enquanto recurso, meio para o ensino da matemática, coincidindo com uma das principais recomendações dos PCN e que outros têm focalizado basicamente o desempenho e os procedimentos utilizados.

Nesta investigação, tendo como referência os estudos de Brito (2006, p. 18), a solução de problemas é percebida como uma “forma complexa de combinação dos mecanismos cognitivos disponibilizados a partir do momento em que o sujeito se depara com uma situação para a qual precisa buscar alternativas para a solução”. Ainda, e de acordo com a autora:

A solução de problemas é, portanto, geradora de um processo por meio do qual o aprendiz vai combinar, na estrutura cognitiva, os conceitos, princípios, procedimentos, técnicas, habilidades e conhecimentos previamente adquiridos que são necessários para encontrar a solução com uma nova situação que demanda uma re-organização conceitual cognitiva (Brito, 2006, p. 19).

Para Vasconcelos (2003), as pesquisas que investigam como as crianças compreendem e solucionam problemas matemáticos têm progredido consideravelmente nos últimos anos. Segundo a autora, recentemente modelos teóricos têm sido propostos numa tentativa de caracterizar os processos cognitivos que poderiam explicar o comportamento das crianças durante a solução de problemas e ainda que, importantes pesquisas na área tem sido desenvolvidas pelo pesquisador francês, Gérard Vergnaud, criador da teoria dos campos conceituais.

Em relação à solução de problemas dentro do ensino e aprendizagem da matemática, outras considerações ainda se fazem necessárias. Diferentes estudos apontam que a solução de problemas nas escolas não propicia momentos para a reflexão, ficando seu uso restrito à fixação de determinada operação aritmética, e que a apresentação de problemas se dá de forma estereotipada em muitos livros-textos de matemática.

Uma situação é problemática quando leva a criança a verbalizar seu pensamento matemático, explicar ou justificar sua solução, resolver pontos de vista conflitantes e formular uma explicação para esclarecer a solução encontrada por um companheiro. (Golbert, 2002).

Atualmente, quando se aborda o tema solução de problemas em situações de ensino, evidencia-se a preocupação de conduzir o aluno a raciocinar criativamente sobre a construção dos conceitos matemáticos subjacentes à tarefa, sem regras pré-estabelecidas; aspectos estes

muitas vezes relegados a segundo plano nas formas mais tradicionais do ensino.

A nossa experiência como professora das séries iniciais do Ensino Fundamental, bem como dados de pesquisas — como as de Golbert (2002), Smole e Diniz (2001), Starepravo e Moro (2005), Vasconcelos (2003) — apontaram que é grande o número de alunos que ao terminarem o 1<sup>o</sup> Ciclo do Ensino Fundamental (1<sup>a</sup> a 4<sup>a</sup> série) não conseguem identificar em uma situação de solução de problema a operação a ser utilizada, tornando-se conhecida a famosa frase - “Professora, é para multiplicar ou dividir? É conta de mais ou de menos?”- indicando que as regras e treinos utilizados nas escolas para ensinar o cálculo aritmético muitas vezes não propiciam aos alunos momentos para reflexão sobre a sua utilização em determinado contexto de solução de problema.

Pesquisas, como as de Lopes (2005), Hough (2003), Malone, Douglas, Kissane, e Mortlock (1997), Smole e Diniz (2001), e Rabelo (2002), também assinalaram a necessidade de se trabalhar diferentes tipos de problemas com os estudantes e que muito do que se denomina problema rotineiro na escola deveria ser chamado de exercício de fixação, memorização e repetição de técnicas, ressaltando-se que, em muitos casos, também desempenham um papel importante na aprendizagem matemática. O que os estudos apontaram é a necessidade de exploração frente às atividades de solução de problemas e que também seja oferecido aos estudantes outro tipo de problema, os não rotineiros: problemas que desenvolvam no aluno a capacidade de planejar, elaborar estratégias para compreensão do problema, testar soluções, avaliar o raciocínio posto em prática e os resultados encontrados.

Compreender o processo envolvido na solução de problemas pelos alunos torna-se, então, fundamental para pesquisadores e professores envolvidos com a matemática, pois não se pode considerar a prática de solução de problemas como aleatória. De acordo com Vergnaud (1990a, 1990b, 1996), é necessário reconhecer a diversidade de estruturas de problemas, analisar as operações envolvidas e as operações de pensamento necessárias para resolver cada classe de problemas. Isto se deve ao fato de que em cada classe de problemas as dificuldades variam e os procedimentos envolvidos também.

Buscando relacionar a teoria com a prática de ensino da matemática, Vergnaud (2003) apontou a necessidade e a preocupação em se fazer uma verdadeira teoria da prática, ao mesmo tempo introduzir um pouco mais de teorização na compreensão da representação do

saber prático. Segundo o autor “a psicologia não é suficiente para dar conta da teorização em educação” (p. 36). Assim sendo, Vergnaud assinalou que seus estudos buscam fundamentos nas teorias de Piaget e Vigotski:

Interessa-me focalizar, em Piaget, a interação sujeito/objeto, que corresponde em Vygotski, à interação adulto/criança, com ênfase numa proposta teórica de Vygotski sobre a zona de desenvolvimento proximal. E por que isso? Porque precisamos de uma teoria voltada para a intervenção do professor. Considerando o professor como mediador, o que é uma idéia bastante vygotskiana. (Vergnaud, 2003, p.36).

Entretanto, Vergnaud (2003) lembra que Vigotski não diz praticamente nada sobre a escolha de uma situação para o aluno, situações que tivessem relação com o conteúdo que era destinado ao ensino; porque na época ele não dispunha dos instrumentos teóricos e metodológicos para isso. E, infelizmente, segundo o autor, também não se acha essa resposta em Piaget .

Sabendo que não há uma teoria que dê conta de toda complexidade humana e do campo educativo, e que por melhor que sejam sempre carregam marcas do seu tempo e do seu momento histórico, este estudo, vinculado à interação social e a solução de problemas aritméticos buscou nas contribuições da corrente sócio-histórica da psicologia<sup>4</sup>, por intermédio dos estudos de Vigotski e nos estudos dos campos conceituais de Gérard Vergnaud, elementos para a elaboração, execução e análise da pesquisa.

Pensar este estudo sobre a interação social e a solução de problemas aritméticos pelos estudantes significa pensar a integração destes dois aspectos, onde a linguagem empregada pelos participantes no curso da interação é percebida, de acordo com a teoria sócio-histórica, como facilitadora do processo de pensamento e desenvolvimento, tornando-se um meio para desenvolver as habilidades dos alunos em relação à própria linguagem e a construção dos conceitos matemáticos.

Ainda, e de acordo com Cecchini (2003), pensar a aprendizagem por meio da

---

<sup>4</sup> A análise da literatura apresenta diferentes denominações relacionadas aos estudos de Vigotski e seguidores, a saber: teoria sócio-histórica, teoria sócio-histórica-cultural, teoria histórico-cultural, teoria sociogenética e teoria cultural-histórica Neste estudo, a teoria de Vigotski será tratada como enfoque sócio-histórico da psicologia. Quando a teoria for apresentada em forma de citação será mantida a denominação utilizada pelo autor em sua obra.



comunicação e do desenvolvimento alcançado pelos sujeitos na concepção vigotskiana significa pensar que a aprendizagem está em função não só da comunicação, mas também do nível de desenvolvimento alcançado, adquirindo então relevo especial: além da análise do processo de comunicação, a análise do modo como o sujeito constrói os conceitos comunicados e, portanto, a análise qualitativa dos procedimentos adotados, das dificuldades, dos erros e do processo de generalização. Trata-se de compreender como funcionam esses mecanismos mentais que permitem a construção dos conceitos e que se modificam em função do desenvolvimento.

Na concepção da teoria sócio-histórica, a ação do sujeito sobre o objeto de conhecimento é mediada socialmente pelo outro e por intermédio dos instrumentos e signos construídos ao longo do desenvolvimento cultural e histórico da humanidade. Desta forma, nas contribuições dos estudos de Vigotski também se tem a possibilidade de redimensionamento do campo teórico e metodológico sobre o estudo da interação, principalmente por trabalhar com a função mediadora no que diz respeito à cognição. Uma metodologia investigativa que, segundo Vigotski (1996), reflete a perspectiva que se tem das questões a serem estudadas.

A procura de um método torna-se um dos problemas mais importantes de todo empreendimento para a compreensão das formas caracteristicamente humanas de atividade psicológica (...). Uma análise do processo em oposição à análise do objeto; uma análise que revela as relações dinâmicas ou causais, reais, em oposição à enumeração das características externas de um processo, isto é, uma análise explicativa e não descritiva; uma análise do desenvolvimento que reconstrói todos os pontos e faz retornar à origem o desenvolvimento de uma determinada estrutura. (Vigotski, 1996, p. 86).

De acordo com Freitas (2002), os estudos qualitativos com o olhar da perspectiva sócio-histórica, ao valorizarem os aspectos descritivos e as percepções pessoais, devem focalizar o particular como instância da totalidade social, procurando compreender os sujeitos envolvidos e o contexto da investigação.

Tendo como premissa básica que a interação social não pode nunca ser considerada como decorrência de um fator isolado, mas constitui-se entrelaçada a componentes afetivos, cognitivos, culturais e sociais, com o olhar da perspectiva sócio-histórica da psicologia e os

estudos de Vergnaud sobre os campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas, este estudo buscou responder a seguinte pergunta.

*A interação social em díade, entre alunos da 4.<sup>a</sup> série do Ensino Fundamental, tem relação com o desempenho dos estudantes na solução de problemas aritméticos rotineiros e não rotineiros?*

Assim sendo, o objetivo principal desta investigação é verificar se há alteração no desempenho dos estudantes, na solução de problemas aritméticos rotineiros, após a interação social em díades. A pesquisa procurou também apresentar uma análise qualitativa, a partir do diálogo estabelecido entre os participantes, da dinâmica da interação social em díade durante a solução dos problemas e investigar, a par das verbalizações e dos procedimentos adotados na solução, o conhecimento dos estudantes sobre os conceitos matemáticos envolvidos na solução dos problemas e os procedimentos de solução e representação gráfica adotada.

Para responder a questão central deste estudo, a análise dos dados comporta duas instâncias investigativas: a primeira, de caráter quantitativo, apresenta o desempenho dos participantes na solução de problemas aritméticos, antes e após serem submetidos às sessões deliberadas de interação social em díade e os procedimentos de solução adotados; a segunda instância, de caráter qualitativo, evidencia os aspectos relacionados à interação social em díade durante a solução dos problemas matemáticos, onde o pesquisador, a partir do diálogo estabelecido entre os participantes, investiga o conhecimento dos estudantes sobre os conceitos matemáticos envolvidos na solução dos problemas, os procedimentos de solução, bem como, a interação social em díade neste contexto.

O primeiro capítulo deste estudo destina-se à apresentação dos principais conceitos abordados pela corrente sócio-histórica da psicologia, por intermédio dos estudos de Lev Vigotski, a qual tem embasado um grande número de pesquisas no campo da interação social no contexto escolar.

O segundo capítulo aborda questões relacionadas aos dois grandes campos da

aritmética elementar: às estruturas aditivas e multiplicativas, assim como, a apresentação da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud.

O terceiro capítulo focaliza a discussão atual sobre o ensino e aprendizagem da matemática por meio da solução de problemas, com a apresentação de pesquisas sobre a interação social no ambiente escolar e de investigações na área da Educação Matemática relacionadas à solução de problemas aritméticos.

O quarto capítulo é dedicado à apresentação dos procedimentos metodológicos que conduziram à construção, desenvolvimento e análise desta investigação.

O quinto capítulo apresenta os resultados e as análises quantitativas e qualitativas da pesquisa, relacionadas ao desempenho dos participantes na solução dos problemas propostos, procedimentos de solução e as representações gráficas adotadas pelos participantes, assim como, a apresentação e análise de fragmentos de diálogos estabelecidos entre os componentes das díades e o papel da interação social neste contexto. Por fim, apresenta-se a conclusão final de estudo.

## **CAPÍTULO I**

### **A INTERAÇÃO SOCIAL E A TEORIA DE VIGOTSKI**

#### **1. As teorias psicológicas e a interação social**

Sabe-se que a interação social vem sendo estudada e discutida por pesquisadores de diferentes áreas, sendo comum encontrarmos artigos, bem como, dados de pesquisas experimentais, apontando a importância da interação social na construção do conhecimento. No entanto, há ainda muito que se esclarecer em relação ao papel da interação social sobre o desenvolvimento dos processos cognitivos e ações de pensamento.

Observa-se também que muitos estudos foram suscitados a partir da vertente psicogenética, cujo principal representante é Jean Piaget, e dos estudos de Lev Vigotski, vertente sócio-histórica da psicologia. Como assinalou Vergnaud (2003, 2004) é preciso considerar que há algumas idéias que podemos tomar dos estudos de Piaget e de Vigotski, na sua convergência e complexidade e que não se pode opor radicalmente estas duas grandes correntes da psicologia. Nas palavras do autor:

É interessante ressaltar que muito da teoria de Vygotski foi construído a partir de sua leitura de Piaget, seja comentando ou criticando, enquanto Piaget só conheceu os trabalhos de Vygotski alguns anos após a sua morte. No posfácio do livro *Pensamento e Linguagem*, editado na França, Piaget lamenta não ter podido conhecer Vygotski. Há convergências importantes a ressaltar em termos do que os dois chamam de tomada de consciência e metacognição. E há também convergências relevantes entre a função

simbólica e a linguagem, mesmo considerando que Piaget não estudou profundamente a linguagem em suas pesquisas (Vergnaud, 2003, p. 24).

Carvalho (2005a) ressaltou que nos últimos 20 anos, na Psicologia, houve um número significativo de investigações evidenciando a potencialidade das interações sociais na apropriação de conhecimentos e mobilização de competências, fruto de novos olhares acerca de como aprendemos. Entretanto, apesar das inúmeras pesquisas, o aprimoramento da prática e do estudo acerca do processo de ensino e aprendizagem por meio da interação social se constitui ainda num grande desafio para os educadores. Quando se trata da prática educativa e da formação do professor parece que esta habilidade e capacitação, mesmo sendo considerada de fundamental importância e merecedora de maior atenção, ainda é pouco desenvolvida.

Em relação ao papel das interações sociais no contexto educativo, Smolka (2000) ressaltou que uma revisão da literatura na área indica a diversidade de perspectivas teóricas e considerações sobre o assunto. Pontuou que, de maneira geral, podem ser consideradas quatro tendências de estudo relativas à interação: (1) a primeira tendência incluiria estudos empíricos cognitivistas, cuja questão central seria os aspectos psicológicos do desenvolvimento cognitivo; (2) uma segunda tendência incluiria estudos empíricos marcadamente interacionistas, desenvolvidos principalmente por sociólogos, antropólogos e sociolinguistas; (3) uma terceira tendência abarcaria estudos teóricos que exploram as relações escola/sociedade, linguagem/escola, analisando, por exemplo, relações de poder e resistência; (4) uma quarta tendência apresenta estudos que procuram trabalhar não só o empírico e o teórico, mas também a teoria e a prática no contexto educacional. Segundo a autora, “nesta tendência estariam incluídos estudos que se têm desenvolvido ultimamente a partir dos pressupostos da perspectiva sócio-histórica.” (Smolka, 2000, p. 61)

Os estudos sobre a interação social comportam, basicamente, duas linhas: a dos que, apoiando-se nos estudos de Vigotski, procuram saber de que maneira as formas coletivas de organização das atividades de aprendizagem contribuem para o desenvolvimento das funções mentais superiores e a dos que — dentro da linha sociointeracionista de origem piagetiana como Doise, Mugny e Perret-Clermont — se preocupam mais em saber de que forma a colaboração interpares favorece a aquisição do conhecimento. (Moysés, 2004)

Nesta investigação, buscou-se na vertente sócio-histórica elementos para o

desenvolvimento e análise da pesquisa sobre a influência da interação social em idade na construção das competências matemáticas. Os estudos de Vigotski, ao salientar a importância da interação social no desenvolvimento dos processos psicológicos superiores, permite o avanço das pesquisas na área educacional, relacionadas ao papel da interação e atividade compartilhada entre os estudantes.

Sendo assim, para que se possa melhor compreender o papel desempenhado pela interação social no contexto educativo, serão percorridos os caminhos das principais teses e conceitos da teoria de Lev Semyonovich Vigotski, pioneiro da corrente sócio-histórica da psicologia.

## **2. A teoria de Vigotski**

Lev Seminovitch Vigotski nasceu em 1896, na Bielo-Rússia, país da extinta União Soviética e morreu em 1934, vítima de tuberculose, aos 37 anos. Vigotski foi professor e pesquisador e trabalhou nas áreas de psicologia, pedagogia, filosofia, literatura, deficiência física e mental. Com Leontiev e Luria, formou o grupo conhecido como “troika” que buscavam na Rússia pós-revolução construir uma nova psicologia. Em linhas gerais, pode-se dizer que embora sua produção não tenha tido um esquema explicativo completo, ela foi muito rica e vasta, abordando diversos temas sobre neurologia, literatura, deficiência, linguagem, psicologia e educação.<sup>5</sup>

Se fosse necessário definir o caráter específico da obra de Vigotski mediante uma série de palavras-chave seria preciso que fossem mencionadas ao menos as seguintes: mediação semiótica, sociabilidade do homem, interação social, signo e instrumento, cultura, história e funções mentais superiores. E, se fosse necessário organizar essas palavras em uma única expressão, poder-se-ia dizer que a teoria de Vigotski é uma teoria “sócio-histórico-cultural do desenvolvimento das funções mentais superiores”, ainda que ela seja mais conhecida como “teoria histórico-cultural” e “teoria sócio-histórica.”<sup>6</sup>

---

<sup>5</sup> Maiores informações sobre a biografia de Vigotski podem ser encontradas na revista “Viver Mente e Cérebro”: Lev Semenovich Vygotsky, Coleção Memória da Pedagogia, n.2, 2005.

<sup>6</sup> Originariamente publicada na revista: “Perspectivas: revista trimestral de educación comparada (Paris, UNESCO:

Para uma visão geral das idéias centrais dos estudos vigotskianos, em um primeiro momento desta exposição, apresentam-se os conceitos centrais desta teoria: a mediação, o processo psicológico superior, a internalização, a formação de conceitos e a zona de desenvolvimento proximal. No entanto, torna-se importante salientar que embora tasi constructos estejam apresentados de forma separada, os mesmos se encontram estreitamente entrelaçados no desenvolvimento da teoria de Vigotski. Assim sendo, em alguns momentos desta apresentação, o texto poderá apresentar alguma repetição ou entrelaçamento das idéias principais. Em um segundo momento, aborda-se algumas implicações teóricas da teoria sócio-histórica relacionadas à educação.

As teses básicas da teoria referem-se ao caráter histórico e social dos processos psicológicos superiores, ao papel que os instrumentos da mediação protagonizam em sua execução e, num plano metodológico, à necessidade de um enfoque genético em psicologia. Segundo Baquero (2001, p. 25), costuma-se formular como as idéias centrais da teoria sócio-histórica as seguintes teses:

- A tese de que os processos psicológicos superiores (PPS) têm origem histórica e cultural.
- A tese de que os instrumentos de mediação (ferramentas e signos) cumprem um papel central na constituição de tais PPS.
- A tese de que se devem abordar os PPS segundo os processos de sua constituição, quer dizer, a partir de uma perspectiva genética.

## **2.1 Processos Psicológicos Elementares e Processos Psicológicos Superiores**

Em relação às funções mentais superiores, capacidade tipicamente humana, Vigotski (1996, 2000) afirmou que estas ocorrem em dois momentos consecutivos, primeiro em nível das interações sociais ou interindividuais, e segundo ao nível intrapsíquico. Este processo representa o principal mecanismo de transmissão da cultura e inserção do indivíduo no

---

Oficina Internacional de Educación), vol.XXIV, nos 3-4, 1994, págs. 773-799. Tradução e resumo de ZACHARIAS, Vera Lúcia.

universo de significados e valores típicos do grupo social de que faz parte. Para Vigotski, além da condição biológica que se dá por intermédio da maturação do sistema nervoso central, é a qualidade das interações que o indivíduo estabelece com o próximo, ao longo de sua vida, que permite ao sujeito a construção do conhecimento e do desenvolvimento.

De acordo com Coll-Salvador (1997) o princípio vigotskiano de que todas as funções psicológicas superiores tem sua origem nas relações entre as pessoas exige logicamente uma maneira original de entender o desenvolvimento e sua vinculação com a aprendizagem, sendo que, o conceito de “zona de desenvolvimento proximal” sintetizou o ponto de Vigotski a este respeito.

Ainda, no contexto da teoria de Vigotski, os Processos Psicológicos Elementares são regulados por mecanismos biológicos ou ligados à linha de “desenvolvimento natural” e seriam compartilhados com outras espécies superiores. Trata-se de formas elementares de memorização, atividades senso-perceptivas, motivação, dentre outras.

A formulação central da teoria de Vigotski se refere aos processos psicológicos superiores, os quais se originam na vida social, na participação do sujeito em atividades compartilhadas com outros. Isto é, a teoria se propõe centralmente a analisar o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores a partir da internalização de práticas sociais específicas, as quais o sujeito participa. Pressupõe-se a existência dos processos elementares, mas estes não são condições suficientes para sua aparição.

Baquero (2001, p. 26) apontou algumas diferenças centrais entre os processos psicológicos superiores (PPS) e os processos psicológicos elementares (PPE). O autor considerou que os PPS, diferentemente dos PPE, são:

- Constituídos na vida social e, específicos dos seres humanos.
- Responsáveis pela regulação da ação em função de um controle voluntário, superando sua dependência e controle por parte do meio ambiente.
- Regulados conscientemente ou terem necessitado dessa regulação consciente em algum momento da sua constituição (ainda que seu exercício reiterado possa haver “automatizado”).
- O fato de se valerem, em sua organização, do uso de instrumentos de mediação. Dentro dessas formas de mediação, a mediação semiótica é a que ocupa um lugar



de maior relevância.

Vigotski (1996) fez ainda uma diferenciação entre os processos psicológicos superiores rudimentares e os processos psicológicos superiores avançados. Entre os primeiros, estaria a linguagem oral, como processo psicológico superior adquirido na vida social, sendo produzido pela internalização de atividades sociais organizadas por meio da fala. Os processos psicológicos avançados possuem um maior grau de uso do instrumento da mediação, que vai se tornando independente do contexto, de regulação voluntária e consciente. A linguagem escrita e seu domínio possuem mais esta característica do que a linguagem oral. Em geral, os processos psicológicos avançados são instituídos de socialização mais específica. Exemplo disto são os processos de escolarização, uma vez que o domínio da leitura/escrita não é adquirido nos processos de socialização genéricos, tal qual a fala.

Sabe-se que Vigotski buscou compreender a gênese, ou seja, a origem do desenvolvimento tendo como questão central a relação entre os processos de desenvolvimento e aprendizagem. De acordo com Oliveira (1998, p. 55) a abordagem de Vigotski estende-se nos níveis “filogenético (desenvolvimento da espécie humana), sociogenético (história dos grupos sociais), ontogenético (desenvolvimento do indivíduo) e microgenético (desenvolvimento de aspectos específicos do repertório psicológico dos sujeitos)”.

Segundo Griz (2003), para Vigotski, haveria duas linhas de desenvolvimento para explicar a construção dos processos psicológicos que pertenciam à ontogênese: uma linha cultural e uma linha natural de desenvolvimento. O que ganha primazia é a linha cultural, uma vez que se refere ao desenvolvimento humano, especificamente. No entanto, ambas as linhas exercem um papel complementar.

Ainda, de acordo com a autora, dentro do domínio ontogenético, foram desenvolvidos estudos sobre os processos de interiorização, sobre os instrumentos de mediação, tanto no cenário sócio-cultural quanto nos processos interpsicológicos. Vigotski realizou seus estudos sempre em busca de compreender como se originam e como se desenvolvem os processos psicológicos, não apenas da humanidade, como na história individual.

Nesse sentido, na perspectiva sócio-histórica, a relação entre o homem e o meio físico e social não é uma relação natural, total, e diretamente determinada pela estimulação ambiental. No processo do desenvolvimento, desde o nascimento, as reações naturais de

respostas aos estímulos do meio, herdadas biologicamente (tais como a percepção, a memória, as ações reflexas, as reações automáticas e as associações simples) “entrelaçam-se aos processos culturalmente organizados e vão se transformando qualitativamente em modos de ação, de relação e de representação caracteristicamente humanos” (Fontana & Cruz, 1997, p. 58).

Nas palavras de Fontana e Cruz (1997), Vigotski destacava que, diferentemente de outras espécies, o homem, por intermédio do trabalho, transforma o meio produzindo cultura. A relação homem/meio é sempre uma relação mediada por produtos culturais humanos, como o instrumento e o signo são pelo outro.

## **2.2 Mediação, Instrumento e Signo**

A mediação é uma idéia central para a compreensão das concepções de Vigotski sobre o desenvolvimento humano como processo sócio-histórico. Enquanto sujeito do conhecimento o homem não tem acesso direto aos objetos, este acesso é sempre mediado, operados pelo “outro” e pelos sistemas simbólicos de que o sujeito dispõe.

De acordo com Sirgado (2000), o conceito de mediação semiótica é central na obra de Vigotski, pois permite explicar, por exemplo, os processos de internalização, as relações entre pensamento e linguagem e a interação entre sujeito e objeto do conhecimento. Segundo o autor, “a mediação dos sistemas de signos constitui o que denominamos *mediação semiótica*” (p. 39).

Vigotski enfatizou a construção do conhecimento como uma interação mediada pelo “outro social” e pelos fatores mediatizadores, como os instrumentos e signos. Em relação à prática educativa, por exemplo, Oliveira (1998) ressaltou que a idéia do “outro social” na relação professor/aluno não se refere necessariamente a situações em que o educador esteja fisicamente presente. O “outro social” pode apresentar-se por meio de objetos, da organização do ambiente, do mundo cultural que rodeia o indivíduo.

Torna-se ainda importante destacar que, quanto à mediação que se dá na relação com o outro, Vigotski deixou claro a necessidade e a importância “do outro” no processo de

constituição do sujeito. Entretanto, salientou que não havia um recurso necessário à presença física para ocorrência da mediação.

Ao tratar a atividade mediada por signos e instrumentos, Vigotski (1996, p.71) destacou que “a analogia básica entre signo e instrumento repousa na função mediatizadora que os caracteriza. Portanto, eles podem, a partir da perspectiva psicológica, ser incluídos na mesma categoria”.

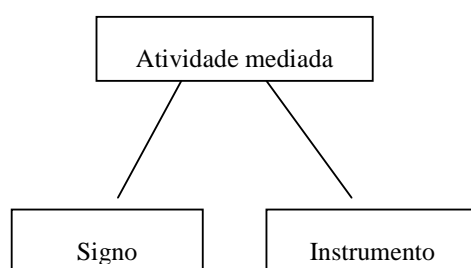


Figura 1 - Atividade mediada (signo e instrumento).

Para Vigotski, o uso de instrumentos e signos é compartilhado pelos indivíduos do grupo social e permite a comunicação e o aprimoramento das interações. Contudo, é fundamental lembrar que esse processo acontece ao longo da história da humanidade.

Na introdução do livro “Formação Social da Mente”, Scribner (em Vigotski, 1996) chamou a atenção para o fato de que Vigotski traçou sua linha de pensamento baseado nas teorias marxistas da sociedade, conhecido como materialismo histórico, em que, para Marx, mudanças históricas na sociedade e na vida material produzem mudanças na “natureza humana” (consciência e comportamento). Assim, para Vigotski:

O animal meramente usa a natureza externa, mudando-a pela sua simples presença; o homem, por intermédio de suas transformações, faz com que a natureza sirva a seus propósitos, dominando-a. Esta é a distinção final e essencial entre o homem e os outros animais (Vigotski, 1996, p. 9).

Moysés (2004), ao tratar de um dos principais marcos teóricos da teoria vygotskiana, a mediação, também salientou a influência de Marx no pensamento de Vigotski. Segundo a autora, a própria formação anterior de Vigotski o levava a utilizar, de forma original, algumas

idéias marxistas da época, como por exemplo, o princípio de que o trabalho e sua divisão social acabam por gerar novas formas de comportamento, novas necessidades, novos motivos e que esses levam o homem à busca de meios para sua realização. Assim sendo, introduz na psicologia um novo elemento, o fator sócio-histórico.

Outra idéia de inspiração marxista, e que acabou sendo um dos pontos chaves da teoria, foi o uso de instrumentos na modificação da natureza. Da mesma forma que Marx concebeu o instrumento mediatizando a atividade laboral, Vigotski concebeu a noção de signo, como instrumento psicológico por excelência, o qual estaria mediatizando não só o pensamento, como o próprio processo social humano.

A análise do esquema inicial de Vigotski, o qual deu origem à sua teoria, é a introdução de um novo elemento no modelo estímulo-resposta. Segundo o autor, “a estrutura de operações com signos requer um intermediário entre o estímulo e a resposta. Esse elo intermediário é um estímulo de segunda ordem (signo), colocado no interior da operação, onde preenche uma função especial: ele cria uma nova relação entre S e R.” (Vigotski: 1996, p. 53).

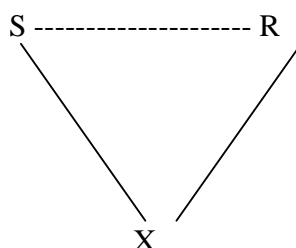


Figura 2. Esquema triangular proposto por Vigotski.

O processo simples estímulo-resposta é substituído por um ato complexo e mediado, o qual possui uma característica importante de ação reversa (isto é, ele age sobre o indivíduo e não sobre o ambiente). Segundo Vigotski:

Na medida em que este estímulo auxiliar possui a função específica de ação reversa, ele confere à ação psicológica formas qualitativamente novas e superiores, permitindo aos seres humanos, com o auxílio de estímulos extrínsecos, controlar o seu próprio comportamento (Vigotski, 1996, p. 54).

### **2.3 O uso dos instrumentos e signos**

Os animais, de maneira geral, quando sentem fome, por exemplo, procuram à comida da forma como ela se encontra na natureza e seu comportamento, neste caso, é orientado pelas suas características biológicas e pelas resistências ou facilidades que o ambiente lhe impõe (abundância ou escassez de alimento).

Nas palavras de Fontana e Cruz (1997), o homem é diferente, no sentido de criar instrumentos. Neste caso, o instrumento, pode ser entendido como tudo aquilo que se interpõe entre o homem e seu ambiente, ampliando e modificando suas formas de ação no mundo, como, por exemplo, os instrumentos de trabalho (a enxada, a serra, o arado, as máquinas, etc.). Criados pelo homem para ter um ação sobre a natureza (o arado, para arar a terra; a serra para cortar as árvores e transformá-las em madeira, etc.), os instrumentos acabam transformando o próprio comportamento humano, que deixa de ser, como no caso dos animais, uma ação direta sobre o meio e controlada apenas pela relação entre as necessidades de sobrevivência e o ambiente. O instrumento amplia os modos de ação naturais do homem ao seu alcance. Assim, da mesma forma que o homem atua sobre a natureza, transformando-a, ele atua sobre si próprio, transformando suas formas de agir.

No entanto, Smolka (1995) salientou que a simples utilização dos instrumentos não caracteriza a atividade tipicamente humana, uma vez que os animais também usam instrumentos. Segundo a autora, “é a produção, enquanto trabalho material e simbólico, significativo, enquanto atividade prática e cognitiva, que distingue e instaura a dimensão histórica e cultural.” (Smolka, 1995, p. 13)

Como mencionando antes, em relação à questão da linguagem na teoria vigotskiana, além de ser vista como um sistema simbólico, é também considerada um instrumento ou ferramenta de auxílio ao pensamento. Sobre a linguagem, enquanto instrumento, Smolka (1995) salientou que:

(...) Vygotsky deriva suas conseqüências psicológicas, levantando questões sobre a natureza das relações que se estabelecem entre o uso de instrumentos e do desenvolvimento da linguagem. Retomando as idéias de Engels e Marx, Vygotsky aponta a função mediadora como a analogia básica entre signo e instrumento,

ressaltando, no entanto, as diferenças essenciais entre estes. Os instrumentos são meios de controle e domínio da natureza e orientam o comportamento para o objeto da atividade, provocando modificações nos objetos. Em contraste, os signos são meios de atividade internos, dirigidos para o controle do indivíduo, modificando as próprias operações psicológicas e não o objeto sobre o qual incidem (Smolka, 1995, p. 11).

De maneira simples, poderíamos dizer que o signo é comparado por Vigotski ao instrumento, o qual ele denomina de “instrumento psicológico”. O signo é considerado aquilo que é utilizado pelo homem para representar, evocar ou tornar presentes coisas ausentes, como por exemplo, a palavra, o desenho, os símbolos, etc. Inclui-se entre os signos: a linguagem, os vários sistemas de contagem e de cálculo, as técnicas mnemônicas, os sistemas simbólicos algébricos, as obras de arte, a escrita, os esquemas, os diagramas, mapas, atlas, desenhos, e todo tipo de signos tradicionais existentes. (Moysés, 2004; Vergnaud, 2004).

A posição de Vigotski sobre a importância dos signos na constituição do sujeito é visto com relevância em todos os campos do saber. Na matemática, por exemplo, a utilização de signos como os sistemas de contagem, o cálculo, os sistemas algébricos e as diversas formas de representação proporcionam aos estudantes meios para a apropriação dos conceitos científicos e para o desenvolvimento do pensamento matemático. A linguagem (pictórica, escrita e oral) enquanto sistema simbólico apresenta-se não só com a função de comunicar o que está sendo feito, mas também exprime uma fundamental importância na estruturação do pensamento matemático pelo estudante.

Schliemann e Carraher (2002) ressaltaram que a compreensão matemática é tanto pessoal como cultural. É pessoal na medida em que acarreta invenção e redescoberta quando as pessoas estão imersas na compreensão de fatos e convenções. É cultural porque se dá por meio de sistemas simbólicos convencionais e do contexto social.

Moura (2005), relacionando o uso de signos ao ensino da matemática, assinalou que uma aprendizagem mediatizada por signo requer que o estudante transforme o signo que antes se apresentava externamente em signo interno, encaminhando-o para a estrutura cognitiva, sendo uma representação mental. Isso é fundamental, pois a matemática é simbólica.

Na teoria vigotskiana, as operações com signos (mediatizada) surgem ao longo de um processo de desenvolvimento complexo e histórico, conduzindo os seres humanos a uma

estrutura específica de comportamento, o qual se destaca do desenvolvimento biológico, criando novas formas de processos psicológicos enraizados na cultura. Desta forma, as funções psicológicas superiores (FPS) tem sua origem na vida social, por meio da participação do sujeito em atividades compartilhadas. O uso de signos permite aos indivíduos controlar seu comportamento reestruturando e afetando todos os processos psicológicos superiores.

Dentro desta concepção teórica, o instrumento seria, então, o que está orientado externamente para dirigir, controlar e modificar o ambiente. Enquanto que o signo é orientado internamente, modificando o funcionamento psicológico humano.

Os instrumentos e os sistemas de signos, criados pelo homem, vão propiciando mudanças na sociedade e, conseqüentemente, mudanças no próprio indivíduo. Hoje em dia, mediante o grande avanço tecnológico o uso de computadores tornou-se presente na vida de um grande número de pessoas. Sua linguagem tecnológica (sistema de signos) possibilita e gera mudanças na sociedade por intermédio da comunicação instantânea entre diferentes pessoas em nível mundial. Entretanto, artefato criado pelo homem, o computador só se torna um instrumento quando associado à atividade de quem os utiliza.

Vergnaud (2004) traçou um paralelo entre o papel desempenhado pelos instrumentos — herança da teoria de Vigotski — no desenvolvimento da sociedade e, em especial, no desenvolvimento educacional:

Como bom marxista, Vygotski se preocupa com o papel dos instrumentos nas sociedades humanas; e ele estende essa noção aos instrumentos psicológicos que, aos seus olhos, são os signos lingüísticos e os outros meios semióticos, dos quais a sociedade e a escola fazem atualmente grande uso. É uma idéia estranhamente premonitória quando se sabe, atualmente, o peso da informática, das máquinas-utensílios com comando numérico, da comunicação com máquinas e do papel dos computadores no trabalho e na educação. Vygotski não teve tempo de desenvolver essa noção de instrumento. Mas atualmente pesquisadores retomam essa linha de pensamento (Vergnaud, 2004, p. 95-96).

## **2.4 O processo de internalização**

De acordo com Bezerra e Meira (2006, p. 194), a definição de internalização na teoria de Vigotski “é bastante sintética, embora admiravelmente adequada” sendo a mesma uma reconstrução interna de uma operação externa típica do funcionamento psicológico superior e tem origem social. Os autores realçaram que “esta perspectiva estabelece também que tais operações sofrem mudanças, pois são reconstruídas para funcionar num novo sistema (o indivíduo) e atender às suas especialidades; portanto, não são cópias daquelas próprias interações sociais” (p. 195).

Segundo Vigotski (1996), a internalização humana de formas culturais e sociais típicas de uma sociedade ocorre ao longo do desenvolvimento e consiste numa série de transformações:

(A) uma operação que inicialmente representa uma atividade externa é reconstruída e começa a ocorrer internamente. (...). (B) um processo interpessoal é transformado num processo intrapessoal. Todas as funções no desenvolvimento da criança aparecem duas vezes: primeiro no nível social e, depois, no nível individual; primeiro, entre pessoas (interpsicológica), e, depois no interior da criança (intrapsicológica).(...). (C) a transformação de um processo interpessoal num processo intrapessoal é resultado de uma longa série de eventos ocorridos ao longo do desenvolvimento. O processo, sendo transformado, continua a existir e a mudar como forma externa de atividade por um longo período de tempo, antes de internalizar-se definitivamente. Para muitas funções, o estágio de signos externos dura para sempre, ou seja, é o estágio final do desenvolvimento. Outras funções vão além ao seu desenvolvimento, tornando-se gradualmente funções interiores (...) (Vigotski, 1996, p. 75).

Para Scriptori (2003), a chave do entendimento desta passagem é enfatizar que o desenvolvimento cultural aparece primeiro no plano social. O desenvolvimento cultural envolve o aprendizado de características da cultura particular. Vigotski não define este termo, mas na extensão do que ele quer dizer, significa que essas são características que o indivíduo não pode aprender sem a comunicação com os outros. Nas palavras de Vigotski:

A internalização de formas culturais envolve a reconstrução da atividade psicológica tendo como base as operações com signos (...). A internalização das atividades socialmente enraizadas e historicamente desenvolvidas constitui o papel característico



da psicologia humana (Vigotski, 1996, p. 75-76).

De acordo com Baquero (2001, p.33, 34), contra a imagem intuitiva, que interpretando o conceito como uma espécie de transferência ou cópia de conceitos externos no interior de uma consciência, no campo da teoria na verdade, os processos de interiorização seriam os criadores de tal espaço interno. Quer dizer, deve-se conceitualizar a internalização como a “criadora de consciência e não como a recepção na consciência de conteúdos externos.” A lembrar que, os processos de internalização se referem à constituição dos processos psicológicos superiores (e não dos elementares). A internalização se refere sempre à reorganização interior de uma operação psicológica posta em jogo no meio social e, portanto, ligada à linha cultural de desenvolvimento.

## **2.5 A formação de conceitos**

As concepções de Vigotski sobre o processo de formação de conceitos remetem à questão do processo de significação pelos indivíduos, às relações entre pensamento e linguagem, ao processo de internalização e ao papel da escola na transmissão de conhecimento, que é de natureza diferente daqueles aprendidos na vida cotidiana.

De acordo com Moura (2005) a tarefa da escola é auxiliar o aluno a construir os conceitos científicos e estabelecer vínculo indireto com o objeto por meio das abstrações em torno de suas propriedades e da compreensão que ele mantém com um conhecimento mais amplo.

Para Vigotski, “a formação de conceitos científicos é uma operação mental que exige centrar ativamente a atenção sobre o assunto, abstraindo dele os aspectos que são fundamentais e inibindo os secundários e se chegue enfim a generalizações mais amplas mediante uma síntese” (citado por Moura, 2005, S/N)

Vigotski (2005) diferenciou dois tipos de conceitos: os conceitos cotidianos (espontâneos) e os científicos (não-espontâneos). Os conceitos espontâneos são considerados aqueles que a criança aprende no seu dia-a-dia, nascidos do contato que ela possa ter tido com determinados objetos, fatos, fenômenos etc., dos quais a criança não tem consciência. Já, os conceitos científicos são caracterizados como aqueles sistematizados e transmitidos

intencionalmente. Encontram-se na encruzilhada dos processos de desenvolvimento espontâneos e daqueles induzidos pela ação pedagógica, e são, por excelência, os conceitos que se aprendem na situação escolar, considerados ponto de encontro da experiência cotidiana a da apropriação de corpos sistemáticos do conhecimento.

Salienta-se que o estudo dos processos de formação de conceitos e a diferenciação entre conceitos cotidianos e científicos ocupam lugar de destaque na teoria vigotskiana. Rego (2005), fazendo referência ao pensamento de Vigotski, ressaltou que:

Ele (Vygotsky) chama de conceitos cotidianos (ou espontâneos) aqueles que são adquiridos pela criança fora do contexto escolar ou de qualquer instrução formal e deliberada; são os conceitos formados no curso da atividade prática e nas relações comunicativas travadas em seu dia-a-dia. Já os conceitos científicos seriam aqueles desenvolvidos no processo de assimilação de conhecimentos comunicados sistematicamente à criança durante o ensino escolar (Rego, 2005, p. 60).

Em relação ao desenvolvimento dos conceitos, diferente de outros psicólogos, Vigotski defendeu a importância e o papel crucial da escola no desenvolvimento dos conceitos científicos, pois os mesmos são conhecimentos sistemáticos e hierárquicos apresentados e aprendidos como parte de um sistema de relações, ao contrário do conhecimento espontâneo, composto de conceitos não sistemáticos, baseados em situações particulares e adquiridos em contextos da experiência cotidiana.

Vigotski (2005) apontou as “diferenças” entre os conceitos espontâneos e científicos, entretanto, o mesmo destacou a complexidade e os laços indissolúveis que unem ambos. Segundo Laborde (2003), em relação aos conceitos científicos, o autor defendeu a tese segundo a qual:

1. As representações dos conceitos científicos surgem sob a influência decisiva dos conhecimentos adquiridos por meio do contato com as pessoas que rodeiam a criança;
2. Entretanto, a criança não assimila estes os conceitos científicos “prontos e acabados”, mas sim reelabora-os a sua maneira (Laborde, 2003, p.30).

Desta forma, no contexto do ensino, a promoção e o desenvolvimento dos conceitos científicos devem ser vistos inter-relacionados aos processos de desenvolvimento cotidianos. Sabe-se que no caso da aritmética, por exemplo, as crianças trazem consigo experiências

anteriores com quantidades, com operações de adição, divisão, etc. Em situações cotidianas, sem perceber, como em compras que realizam com o adulto, em brincadeiras, nas tarefas do dia a dia, dentre outras, elas classificam, comparam, estabelecem relações, etc. Nessas situações, os conhecimentos vão sendo elaborados entrelaçados às necessidades e aos interesses envolvidos.

Na escola essas relações se modificam. Ali as relações de conhecimento são intencionais e planejadas. A criança e o adulto sabem que estão ali para a apropriação de um determinado tipo de conhecimento e modos de pensar que foram organizados para tal fim. Nesta inter-relação e entrelaçamento de idéias entre as crianças e o professor e entre os próprios alunos é que a criança vai se apropriando dos conceitos científicos.

Dentro desta concepção, Nunes, Campos, Magina e Bryant (2005) ressaltaram que a partir do final da década de 80, começaram a ser discutidas no Brasil novas perspectivas sobre o desenvolvimento do conceito de números e operações, considerando a experiência que os alunos têm fora da sala de aula com problemas numéricos. Citando o trabalho desenvolvido por pesquisadores como Carraher e Schliemann, pontuaram que os alunos, principalmente os da camada popular, têm maior experiência com a aritmética oral fora da sala de aula do que com a aritmética escrita da sala de aula.

Para Moysés (2004, p. 35), a escola tem papel fundamental na elaboração dos conceitos científicos, pois: “ao contrário do espontâneo, o conceito científico só se elabora intencionalmente, isto é, pressupõe uma relação consciente e consentida entre o sujeito e o objeto do conhecimento”.

A investigação sobre a formação de conceitos por Vigotski (2001) remete sempre à idéia de que em qualquer nível de desenvolvimento, o conceito é, em termos psicológicos, um ato de generalização e a tese segundo a qual os “conceitos psicologicamente concebidos evoluem como significados das palavras, a essência do seu desenvolvimento é, em primeiro lugar, a transição de uma estrutura de generalização à outra” (Vigotski, 2001, p. 246).

Em relação à formação dos conceitos científicos, de acordo com a teoria vigotskiana, é necessário identificar a relação existente entre os diferentes conceitos, pois no processo de sua formação, existem conceitos correlacionados que propiciam a sua generalização. Para Vigotski (200, p. 292), “generalização significa ao mesmo tempo tomada de consciência e

sistematização de conceitos”. Por exemplo, no ensino da matemática elementar, Vigotski verificou que:

A tomada de consciência do sistema decimal, isto é, a generalização, que redundará na sua compreensão como caso particular de qualquer sistema de cálculo, leva a possibilidade de ação arbitrária nesse e em outro sistema. O critério de tomada de consciência reside na possibilidade de passagem para qualquer outro sistema, pois isso significa generalização do sistema decimal, formação de um conceito geral sobre os sistemas de cálculo (...). Assim, a investigação mostra que sempre existem vínculos da generalização superior com a inferior e, por meio desta, com o objeto (Vigotski, 2001, p. 373).

Além da generalização do princípio que rege o sistema de numeração decimal como um sistema, é preciso fazer referência às operações matemáticas que o envolvem. No processo de apropriação do significado das operações e do algoritmo utilizado, o que vai sendo aprofundado é o nível de consciência em relação aos conceitos e em relação aos próprios sistemas de conhecimentos (Grando, Marasini & Muhl, 2002).

Especificamente, em relação ao estudo sobre o processo de formação de conceitos, Vigotski (2001) enfatizou que esse é de natureza ontogenética e que a evolução que culmina no desenvolvimento dos conceitos se constitui por três estágios básicos: o sincrético, o complexo e o conceito, propriamente dito; sendo que cada uma desses estágios se divide em várias fases.

O primeiro estágio, o sincrético, se revela com mais frequência nas crianças de tenra idade. Para Vigotski (2001, p. 175), nesse estágio, “o significado da palavra é um encadeamento sincrético não informado de objetos particulares que, nas representações e na percepção da criança, estão mais ou menos concatenados em uma imagem mista”. Ou seja, na percepção, no pensamento e na ação a criança revela uma tendência a associar, a partir de uma única impressão, os elementos mais diversos. Vigotski (2001) descreve esse fenômeno como uma tendência infantil a substituir a carência de nexos objetivos por uma superabundância de nexos subjetivos e a uma tendência a confundir a relação entre as impressões e o pensamento com a relação entre os objetos.

O segundo estágio de desenvolvimento dos conceitos, denominado pensamento por

complexos, se inicia, segundo Vigotski (2001, p. 371) na fase pré-escolar. Nesse estágio, as generalizações representam, pela estrutura, complexos de objetos particulares concretos, não mais unificados à base de vínculos subjetivos, mas de vínculos objetivos que existem entre os objetos. “A criança começa a unificar objetos homogêneos em um grupo comum, a complexificá-los já segundo as leis dos vínculos objetivos que ela descobre entre os tais objetos” (Vigotski, 2001, p. 179).

Nesse estágio, Vigotski identificou cinco fases do desenvolvimento dos conceitos. Na primeira fase a criança se baseia em vínculos associativos por semelhanças. As palavras deixam de ser denominações de objetos isolados, tornam-se nomes de famílias. “Chamar um objeto pelo nome significa relacioná-lo a esse ou aquele complexo ao qual está vinculado” (2001, p. 182).

A segunda fase consiste em combinar objetos e impressões concretas das coisas em grupos, geralmente denominadas de coleções. Nas experimentações realizadas por Vigotski, nesta fase, por exemplo, a criança apanha algumas figuras que diferem da amostra pela cor, forma, tamanho ou outro indício qualquer. Contudo, não as apanha de forma aleatória, mas pelo indício de que são diferentes e complementares ao indício existente na amostra que ela toma por base da combinação.

A terceira fase, denominada por Vigotski de complexo em cadeia, “se constrói segundo o princípio da combinação dinâmica e temporal de determinados elos em uma cadeia única e da transmissão do significado por meio de elos isolados dessa cadeia” (2001, p. 185). Em situação experimental, a criança escolhe em uma amostra um ou vários objetos associados em algum sentido para a amostra; depois, orientada por um traço secundário fora da amostra, continua a reunir os objetos em um complexo único.

Segundo Vigotski (2001), a quarta fase do pensamento por complexos, tem como característica essencial:

O próprio traço ao combinar, por via associativa, os elementos e complexos concretos particulares, parece tornar-se difuso, indefinido, diluído, confuso, dando como resultado um complexo que combina por meio dos vínculos difusos e indefinidos os grupos diretamente concretos de imagens ou objetos (Vigotski, 2001, p. 188).

Neste estágio, a criança ingressa em um mundo de generalizações difusas, permanece

nos limites dos vínculos concretos e diretamente figurados entre os objetos particulares. Por exemplo: uma criança escolhe para uma determinada amostra — um triângulo amarelo — não só triângulos, mas também trapézios, uma vez que eles lembram triângulos com o vértice cortado. Depois aos trapézios juntam-se os quadrados, aos quadrados os hexágonos, aos hexágonos os semicírculos e posteriormente os círculos. Observa-se, que neste caso, a forma se dilui e se torna difusa quando tomada como traço básico.

Para completar o quadro do desenvolvimento por complexos, na quinta fase, denominada por Vigotski (2001) de pseudoconceito, embora semelhante ao empregado pelos adultos em atividades intelectuais, é muito diferente do conceito propriamente dito, pois difere em sua essência e natureza psicológicas. Segundo Vigotski (2001, p. 190) “a criança produz um pseudoconceito cada vez que se vê às voltas com uma amostra de objetos que poderiam ser agrupados com base em um conceito abstrato”. Essa generalização feita pela criança surge ainda com base no seu pensamento por complexos.

Ainda, em relação à formação do pseudoconceito, Vigotski (2001, p. 191) salientou que “os pseudoconceitos constituem a forma mais disseminada, predominante sobre todas as demais e, freqüentemente, quase exclusiva de pensamentos por complexos na fase pré-escolar”. Vigotski ressaltou ainda que os complexos infantis, que correspondem aos significados das palavras, não se desenvolvem de forma livre e espontânea, pois são previamente esboçadas pelo significados das palavras dadas pelos adultos. Nas palavras de Vigotski (2001):

Por meio da comunicação verbal com a criança, o adulto pode determinar o caminho por onde se desenvolvem as generalizações e o ponto final desse caminho, ou melhor, a generalização daí resultante. Mas os adultos não podem transmitir à criança o seu modo de pensar. Destes, ela assimila os significados prontos das palavras, não lhe ocorre escolher por conta própria os complexos e os objetos concretos. As vias de disseminação e transmissão dos significados das palavras são dadas pelas pessoas que a rodeiam no processo de comunicação verbal com ela. Mas a criança não pode assimilar de imediato o modo de pensamento dos adultos (...). É isso que chamamos de pseudoconceito. Obtém-se algo que, pela aparência, praticamente coincide com os significados das palavras para os adultos, mas no seu interior difere profundamente

delas (p. 193).

O terceiro e último estágio do desenvolvimento de conceitos considerado por Vigotski (2001) é o conceito propriamente dito e tem como função desenvolver a decomposição, a análise e a abstração. Segundo Vigotski:

O conceito, na sua forma natural e desenvolvida, pressupõe não só a combinação e a generalização de determinados elementos concretos da experiência, mas também a discriminação, a abstração e o isolamento de determinados elementos e, ainda a habilidade de examinar esses elementos discriminados e abstraídos fora do vínculo concreto e factual em que são dados na experiência (2001, p. 220).

A primeira fase deste estágio ainda é muito próxima ao pseudoconceito. As crianças unificam objetos concretos pela sua semelhança. Os traços que mostram a semelhança com o modelo dado é o centro das atenções, sendo abstraídos dos demais traços que permanecem na “periferia” da atenção (Vigotski, 2001).

A segunda fase no processo de desenvolvimento de conceitos é chamada de estágio de conceitos potenciais, “a criança dessa fase de desenvolvimento costuma destacar um grupo de objetos que ela generaliza depois de reunidos segundo um atributo comum”. Eles são conceitos dentro de uma possibilidade. Ainda não é um conceito, mas alguma coisa que pode vir a sê-lo (Vigotski, 2001, p. 222-223).

Na última fase da evolução do pensamento infantil a criança passa a dominar o processo de abstração. Entretanto, para Vigotski (2001, p. 228), a conclusão de sua investigação sobre a formação dos conceitos “é a tese basilar que estabelece: só na adolescência a criança chega ao pensamento por conceitos e conclui o terceiro estágio do seu intelecto”. Sendo a formação dos conceitos o núcleo fundamental que aglutina todas as mudanças no pensamento do adolescente, entretanto, como frisou Vigotski (2001, p. 229), “a adolescência não é um período de conclusão, mas de crise e amadurecimento do pensamento. No que tange à forma superior de pensamento, acessível à mente humana, essa idade é também transitória, e o é em todos os sentidos”.

Em síntese, por intermédio de experimentos sobre o desenvolvimento dos conceitos, concluiu Vigotski:

Descobriu-se que as idéias da criança em idade pré-escolar (que possuem a estrutura de

complexos) resultam da elaboração de generalizações que predominam durante uma fase anterior, e não do agrupamento de imagens e objetos isolados. Num nível mais elevado, descobrimos uma relação análoga entre as antigas e novas formações, no que diz respeito ao desenvolvimento dos conceitos aritméticos e algébricos. A transformação dos pré-conceitos (é o que geralmente são os conceitos da criança em idade escolar) em conceitos verdadeiros, tais como os conceitos algébricos dos adolescentes, é alcançada por meio de generalizações no nível anterior (...) um plano de desenvolvimento novo e mais elevado (...). Os conceitos novos e mais elevados, por sua vez, transformam o significado dos conceitos anteriores (2005, p. 142-143).

Ainda, em relação ao desenvolvimento conceitual, torna-se fundamental destacar que, para Vigotski, os processos que conduzem à elaboração conceitual são sempre mediados pela palavra:

Os nossos experimentos nos levam a uma conclusão essencialmente distinta. Mostram como das imagens e vínculos sincréticos, do pensamento por complexos, dos conceitos potenciais e com base no uso da palavra como meio de formação de conceitos surge a estrutura significativa original que podemos denominar de conceito na verdadeira acepção desta palavra (Vigotski, 2001, p. 239).

Na elaboração conceitual, a palavra é a primeira mediadora do processo, para depois se tornar símbolo do conceito. A criança começa a perceber o mundo não somente por intermédio dos olhos, mas também por meio da fala. “A percepção natural é suplantada por um processo de mediação; a fala como tal torna-se parte essencial do desenvolvimento cognitivo da criança” (Vigotski, 1996, p. 46). Como salientou Cruz (2005), pela palavra, na relação com o outro, referimo-nos ao mundo, classificando, recortando, agrupando, representando, significando, enfim, o real.

## **2.6 O papel da linguagem**

Como visto anteriormente, de acordo com a perspectiva sócio-histórica da psicologia, a linguagem é o sistema de signo mais importante na constituição humana. No momento em que a espécie humana sentiu necessidade de utilizar os instrumentos, transformar a natureza,



realizar intercâmbios durante o trabalho e planejar, aconteceu a comunicação social, criou-se um sistema que permitiu as trocas de informações. Um processo gradativo que evolui de acordo com as necessidades, da espécie biológica para a sócio-histórica. Desta forma, os significados das palavras são um produto da evolução, história e relação entre os homens.

Vigotski (2005) procurou entender os mecanismos pelos quais o sujeito, a partir de uma linguagem centrada em aspectos referenciais e comunicativos, passa a estruturá-la num nível interno, formando assim a linguagem interior ou pensamento verbal. Grande parte desse seu trabalho encontra-se na sua obra *Pensamento e Linguagem*, escrita em parte, em 1934, ano de sua morte.

Ao discorrer sobre a função da linguagem na perspectiva vigotskiana, Baquero (2001) salientou que a linguagem parece desempenhar o duplo papel de: (a) exemplo paradigmático de processo psicológico superior em cuja formação pode se descrever com clareza a natureza dos processos de interiorização com a conseqüente reconstrução interna do PPS; (b) constituir-se no instrumento central de mediação que possui um lugar privilegiado na interiorização dos processos psicológicos superior (Baquero, 2001, p. 33).

A primeira função da linguagem é a de intercâmbio social, é para se comunicar com seus semelhantes que o homem cria e utiliza os sistemas de linguagem. No decorrer de seu desenvolvimento, o homem passa a usar a linguagem, neste caso, a palavra, para agrupar ocorrências de uma mesma classe de objetos, eventos, situações de uma mesma categoria. Por exemplo, ao usar a palavra cachorro estou classificando-a dentro da categoria cachorro e ao mesmo tempo diferenciando-a de outras categorias de animais. Um cachorro em particular (pastor alemão) é parte da categoria (cachorro), mas ao mesmo tempo diferente de membros de outras categorias de animais como: gato, girafa, carro, etc. Esse fenômeno que gera a segunda função da linguagem: a de pensamento generalizante. Essa função generalizante é que torna a linguagem um instrumento do pensamento (Oliveira, 1997).

De acordo com Smolka (1995), a “linguagem não é só nem simplesmente um instrumento de comunicação”:

A linguagem nomeia, identifica, designa, recorta, configura, estabelece relações; mais do que um “meio”, é um modo de (inter/oper)ação: relação com o outro, atividade mental; um modo, fundamental, de significação (produção de signos, de sentidos). A

linguagem tem a propriedade de remeter a si mesma, ou seja, fala-se da linguagem com e pela linguagem. Ainda, o homem fala de si, se (re)conhece, se volta sobre si mesmo pela linguagem. A linguagem nem sempre comunica, ela não é transparente; ela significa por meio do “não dito” e não necessariamente significa por meio do que é dito. Podemos dizer que ela funciona por si, produzindo múltiplos sentidos (p. 19-20).

## **2.7 Pensamento e linguagem**

A relação entre desenvolvimento do pensamento e a linguagem ocupa também lugar central na teoria vigotskiana; sendo esta relação geradora de controvérsias entre os estudiosos do desenvolvimento.

Nos seus estudos Vigotski (2005) enfatizou a importância da linguagem e sua relação com o desenvolvimento do pensamento. Como se pode perceber, por intermédio das duas citações a seguir, para o autor, pensamento e linguagem têm origens diferentes e desenvolvem-se segundo trajetórias diferentes e independentes, até que ocorra uma estreita ligação entre os dois fenômenos.

O fato mais importante revelado pelo estudo genético do pensamento e da fala é que a relação entre ambos passa por várias mudanças. O progresso da fala não é paralelo ao progresso do pensamento. As curvas de crescimento de ambos cruzam-se muitas vezes; podem atingir o mesmo ponto e correr lado a lado, e até mesmo fundir-se por algum tempo, mas acabam se separando novamente. Isso se aplica tanto à filogenia como à ontogenia (Vigotski, 2005, p. 41).

O pensamento e a linguagem, que refletem a realidade de forma diferente daquela da percepção, são as chaves para a compreensão da consciência humana. As palavras desempenham um papel central não só no desenvolvimento do pensamento, mas também na evolução histórica da consciência como um todo. Uma palavra é um microcosmo da consciência humana. (Vigotski: 2005, p. 190)

Segundo Oliveira (1997), as investigações realizadas por Vigotski sobre as relações entre pensamento e linguagem foram desencadeadas considerando os estudos feitos com

primatas superiores, mais precisamente com os chimpanzés e suas formas de comunicação e funcionamento intelectual, identificando neste processo a “fase pré-verbal e fase pré-intelectual do desenvolvimento do pensamento”.

Ainda, de acordo com a autora, os animais são capazes de utilizar *instrumentos mediadores* entre eles e o ambiente para resolver determinados problemas mostrando ter a *inteligência prática*, porque alteram o ambiente, solucionando o problema. Esse modo de funcionamento intelectual é independente da linguagem, definindo a chamada fase pré-verbal do desenvolvimento do pensamento.

Vigotski (2005) afirmou que os humanos, também passam por uma fase pré-verbal e pré-intelectual, a da inteligência prática. Contudo, na medida em que a criança interage com o grupo social, aos dois anos mais ou menos, a linguagem interage com o pensamento, iniciando-se um funcionamento psicológico sofisticado. A fala torna-se verbal, mediada por significados dados pela linguagem.

Oliveira (1997) ressaltou ainda que, para Vigotski, a aquisição da linguagem verbal não elimina a linguagem sem pensamento (como em frases decoradas ou linguagem puramente emocional), nem do pensamento sem linguagem (uso da inteligência prática, do pensamento instrumental). Mas, o pensamento verbal passa a predominar na ação psicológica tipicamente humana.

Em adição, em relação aos signos e instrumentos, para a perspectiva sócio-histórica, é importante considerar que as utilizações destes não se limitam à experiência pessoal do indivíduo. Por exemplo, no caso de um instrumento como o martelo, quando o utilizamos estamos incorporando ações às experiências de gerações precedentes, na medida em que o martelo, suas funções e modo de manipulação não foram criados por nós, mas foram transmitidos em nossas relações com o outro. (Oliveira, 1997)

Com os signos ocorre a mesma coisa: o acesso à escrita, às notações musicais, à palavra, dentre outros são uma incorporação da experiência anterior de um determinado grupo social. Nas diversas atribuições da linguagem, por exemplo, os significados das palavras são um produto da história e da relação entre os homens. O significado das palavras para o grupo (significado propriamente dito) e a significação individual (sentido) estão relacionados ao contexto de uso da palavra e às vivências afetivas do sujeito. No caso das crianças, por

exemplo, é a partir de sua relação com o outro que ela interioriza formas culturais de ação e de pensamento, as significações e uso das palavras.

Nos estudos sobre o desenvolvimento da linguagem, Vigotski (2000) afirmou que este processo ocorre em três estágios: linguagem externa, egocêntrica e interna. Para o autor, a linguagem externa tem a função de comunicação, estabelecendo relações entre as crianças e as pessoas que as rodeiam. A linguagem egocêntrica, a qual é uma fase transitória entre a linguagem externa e interna, torna-se um elemento constitutivo da atividade prática da criança, organizando o pensamento e permitindo organizar as ações. De forma simultânea, a linguagem egocêntrica muda de função, passando a ser internalizada.

Baquero (2001), analisando as idéias de Vigotski sobre a constituição da fala interior, relatou que a progressão da fala externa para a fala interna se constitui numa *reconstrução interna* de uma operação externa, uma variação da função e estrutura da fala externa. A variação de sua função aparece com clareza por migrar o foco principal da atividade lingüística em desenvolvimento da função comunicativa para a intelectual.

Ainda, segundo Baquero (2001), a linguagem começa a ser utilizada, gradual e crescentemente, orientada em parte para si mesma, e operando como espécie de organizadora e avaliadora da própria ação ou da resolução de situações problemáticas. Sua função comunicativa foi o substrato que inicialmente tornou possível uma atividade intelectual interpsicológica. Desta forma, a variação da função da linguagem não é um mero produto da transformação do externo para o interno, mas de um desenvolvimento precursor da nova função ao nível interpsicológico, constituindo, desta forma, o desenvolvimento da linguagem interior.

Sabe-se que a chamada linguagem egocêntrica vem despertando o interesse de estudo em diversas áreas do ensino. Educadores, psicólogos e lingüistas buscam compreender e analisar a transformação sofrida pela linguagem egocêntrica nesta reconstrução interna. Para Vigotski (citado por Baquero, 2001, p. 53) o desenvolvimento de tal linguagem na criança “além de acompanhar a atividade infantil, se converte num instrumento para pensar em sentido estrito, isto é, começa a exercer a função de planificar a resolução da tarefa surgida no curso de sua atividade”.

Vigotski (2005) atribui à linguagem egocêntrica um papel crucial no desenvolvimento

psicológico e na regulação da atividade. Por isso, sustentou que vê profundas diferenças quanto a interpretar tanto “a origem como o destino” da fala egocêntrica, diferenciando-o dos behavioristas e dos estudos de Piaget acerca do papel da linguagem na constituição do pensamento.

A fala egocêntrica, enquanto uma forma lingüística separada, é o elo genético de extrema importância na transição da fala oral para a fala interior, um estágio intermediário entre a diferenciação das funções da fala oral e a transformação final de uma parte da fala oral em fala interior. (...). Toda a concepção da fala varia profundamente, de acordo com a interpretação que for dada ao papel da fala egocêntrica. Desse modo, o nosso esquema de desenvolvimento – primeiro fala social, depois egocêntrica, e então fala interior – diverge tanto do esquema behaviorista – fala, sussurro, fala interior – quanto da seqüência de Piaget – que parte do pensamento autístico não-verbal à fala socializada e ao pensamento lógico, por meio do pensamento e da fala egocêntricos. Segundo a nossa concepção, o verdadeiro curso do desenvolvimento do pensamento não vai do individual para o socializado, mas do social para o individual (Vigotski, 2005, p. 23-24).

Vergnaud (1990a), ao discorrer sobre importantes questões sobre a epistemologia e a psicologia da educação matemática, apontou algumas contribuições dos estudos de Vigotski relacionados ao papel dos símbolos e da linguagem no desenvolvimento do pensamento. O autor salientou que Vigotski deu atenção ao relacionamento entre o conhecimento implícito presente no raciocínio aritmético das crianças e o conhecimento explícito, requerido para se entender o uso da álgebra.

Vergnaud (1997, 1990a) assinalou ainda que Vigotski chegou a traçar um paralelo entre o movimento da aritmética para a álgebra e o movimento da linguagem falada para a escrita, assim como a língua materna e as línguas estrangeiras. Pontuou que na matemática, a linguagem e símbolos também têm a função de expressar conceitos e teoremas para comunicação ou gerar eventualmente uma solução, e que a partir do uso de palavras, símbolos ou desenhos de algum tipo, os estudantes identificam objetos e relações relevantes.

## 2.8 Desenvolvimento e Aprendizado

O processo de desenvolvimento foi analisado por Vigotski como um processo de internalização de modos culturais de pensar e agir. Esse processo de internalização inicia-se nas relações sociais, nas quais os adultos ou as crianças mais velhas, por meio da linguagem, do jogo e do fazer junto compartilham e transmitem às crianças uma série de conhecimentos.

De acordo com Freitas (2005b), na concepção vygotskiana, há uma estreita relação entre aprendizado e desenvolvimento:

As concepções de Vygotsky sobre o conhecimento representam um marco na interação que existe simultaneamente entre aprendizado e desenvolvimento humano. As relações com que o conhecimento anteriormente possuído dirige a atenção e a memória do indivíduo, orientando sua percepção e facilitando a aprendizagem. Os mecanismos mediadores são internalizados e o indivíduo deixa de operar com signos externos, passando a usar as representações mentais, os conceitos, as imagens visuais, as palavras realizando atividades mais complexas, nas quais é capaz de controlar deliberadamente suas ações, por meio de recursos internalizados. Trata-se então de uma trama complexa implícita no processo de construção do conhecimento dos seres humanos (Freitas, 2005b, p. 4).

Embora diferencie aprendizado e desenvolvimento, Vigotski considerou que esses dois processos caminham juntos desde o primeiro dia de vida da criança, e ainda que o aprendizado suscita e impulsiona o desenvolvimento. Ou seja, tudo aquilo que a criança aprende com o adulto ou com outra criança mais velha, vai sendo elaborado por ela, transformando seus modos de agir e de pensar.

Griz (2003), também apontou a importância dada por Vigotski ao processo de internalização via mediação ou observação das crianças de outras pessoas. Segundo a autora, a partir de suas pesquisas, Vigotski constatou que no cotidiano das crianças, elas observam o que os outros dizem, por que dizem, o que falam, por que falam, internalizando tudo o que é observado e se apropriando do que viram e ouviram. Recriam e conservam tudo o que se passa ao seu redor. Em função desta constatação, Vigotski afirmou que a aprendizagem da criança se dá pelas interações com outras crianças e adultos de seu ambiente. Na internalização, todos os

processos intrapsíquicos se desenvolvem a partir dos processos interpssíquicos, ocorridos pela vivência entre os sujeitos do mesmo grupo cultural.

Em relação aos processos de desenvolvimento e aprendizado Vigotski (1996) afirmou que:

O aspecto mais essencial de nossa hipótese é a noção de que os processos de desenvolvimento não coincidem com os processos de aprendizado. Ou melhor, o processo de desenvolvimento progride de forma mais lenta e atrás do processo de aprendizado; desta seqüênciação resultam, então, as zonas de desenvolvimento proximal (...). Portanto, torna-se uma preocupação importante na pesquisa psicológica mostrar como se internalizam o conhecimento externo e as capacidades das crianças. (...) Um segundo aspecto essencial de nossa hipótese é a noção de que, embora o aprendizado esteja diretamente relacionado ao curso de desenvolvimento da criança, os dois nunca são realizados em igual medida ou paralela (Vigotski, 1996, p. 118-119).

## **2.9 Zona de desenvolvimento proximal**

Outro conceito presente na obra de Vigotski, hoje muito presente em pesquisas educacionais, é o conceito de *zona de desenvolvimento proximal*. No olhar da educadora Griz (2003), este conceito é a mola mestra da teoria vigotskiana. Com ela, se conectam o processo de desenvolvimento do indivíduo por meio de sua interação com o contexto social e cultural. Quando o sujeito se encontra num momento no qual ele já é capaz de resolver problemas, sozinho, onde é capaz de elaborar mentalmente um problema, a ação externa não se faz tão necessária. No entanto, é na zona de desenvolvimento proximal que mais o aluno recebe influência propulsora de seu desenvolvimento.

Muitos psicólogos, estudiosos do desenvolvimento e educadores concordam sobre a importante contribuição da teoria vigotskiana relacionada aos conceitos de zona de desenvolvimento: zona de desenvolvimento real e zona de desenvolvimento proximal (ZDP).

Desta forma, no contexto da teoria vigotskiana, os professores deveriam promover o desenvolvimento e a aprendizagem dentro da ZDP. Sendo que a idéia central da zona de desenvolvimento proximal implica na compreensão de:

- aquilo que a criança realiza hoje com auxílio de uma pessoa mais especializada, mais tarde poderá realizar com autonomia;
- o conceito nos lembra a constituição dos processos psicológicos superiores;
- nem toda interação entre as pessoas gera desenvolvimento.
- uma boa aprendizagem precede o desenvolvimento.
- a aprendizagem acelera processos evolutivos internos.

Na perspectiva vigotskiana, para compreensão dos níveis de desenvolvimento mental dos estudantes, torna-se então necessário revelar dois níveis de desenvolvimento: o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial. De acordo com Vigotski:

O primeiro nível pode ser chamado de nível de desenvolvimento real, isto é, o nível de desenvolvimento das funções mentais da criança que se estabeleceram como resultado de certos ciclos de desenvolvimento já completados. (...) Por mais de uma década, mesmo os pensadores mais sagazes nunca questionaram esse fato; nunca consideraram a noção de que aquilo que a criança consegue fazer com ajuda dos outros poderia ser, de alguma maneira, muito mais indicativo de seu desenvolvimento mental do que aquilo que consegue fazer sozinha. (...). Zona de desenvolvimento proximal é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar por meio da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado por meio da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (Vigotski, 1996, p. 111-112).

Por intermédio do conceito de zona de desenvolvimento proximal (ZDP), Vigotski ressaltou que é possível verificar não somente os ciclos já completados, aquilo que o aluno é capaz de fazer sozinho ou os conceitos já assimilados. A noção da ZDP permite também compreender os conceitos e teoremas que estão em via de formação, ou seja, o que o aluno é capaz de fazer com assistência de um adulto ou com um par mais competente. Permite ainda o professor o delineamento das competências já adquiridas pelos alunos e o vislumbrar de suas futuras conquistas, assim como, o conhecimento do desenvolvimento real dos alunos e da ZDP favorece a elaboração de estratégias pedagógicas que auxiliem na trajetória de construção dos conceitos. Segundo o autor:

A zona de desenvolvimento proximal permite-nos delinear o futuro imediato da criança



e seu estado dinâmico de desenvolvimento, propiciando o acesso não somente ao que já foi atingido por meio do desenvolvimento, como também àquilo que está em processo de maturação (Vigotski, 1996, p. 113).

Quanto ao apoio dado ao estudante na zona de desenvolvimento proximal Daniels (2003) ressaltou que Vigotski insistia que não havia um recurso necessário à presença física.

Quando em casa a criança resolve um problema com base num modelo que lhe mostraram na sala de aula, ela continua a agir em colaboração, embora no momento o professor não esteja ao seu lado. De uma perspectiva psicológica, a solução do segundo problema é similar a essa em casa. É uma solução alcançada com a ajuda do professor. Está contida no que parece, de fora, a solução independente dada ao problema pela criança (Vigotski, citado por Daniels, 2003, p. 87).

Para Vergnaud (1998), a maior tarefa do professor é prover oportunidades para as crianças desenvolverem seu potencial de esquemas na zona de desenvolvimento proximal, como notou Vygotsky, sessenta anos atrás.

## **2.10 O papel da escola segundo a teoria vygotskiana**

Embora a criança traga para a escola inúmeros conhecimentos e modos de funcionamento intelectual necessários à elaboração dos conhecimentos científicos sistematizados, durante o processo de educação escolar, ela realiza a re-elaboração desses conhecimentos, por meio de uma nova realização especialmente cognitiva com o mundo e seu próprio pensamento. Entretanto, é preciso ainda, levar em consideração que a aprendizagem da criança começa muito antes da aprendizagem escolar. Segundo Vigotski (2003):

A aprendizagem escolar nunca parte do zero. Toda a aprendizagem da criança tem uma pré-história. Por exemplo, a criança começa a estudar aritmética, mas já muito antes de ir a escola adquiriu determinada experiência referente à quantidade, encontrou já várias operações de divisão e adição, complexas e simples; portanto a criança teve uma pré-escola de aritmética, e o psicólogo que ignorasse isso estaria cego. (...) Mas a existência desta pré-história da aprendizagem escolar não implica uma direta continuidade entre as duas etapas do desenvolvimento aritmético da criança. O curso

da aprendizagem escolar da criança não é continuação direta do desenvolvimento pré-escolar em todos os campos; (...) mas é precedida sempre de uma etapa perfeitamente definida de desenvolvimento, alcançado antes de a criança entrar na escola (Vigotski, 2003, p. 8-9).

Como já abordado, Vigotski defendeu que o processo de aprendizagem e desenvolvimento não são coincidentes. Desta forma e em relação às operações aritméticas, Vigotski ressaltou que:

A criança aprende a realizar uma operação de determinado gênero, mas ao mesmo tempo apodera-se de um princípio estrutural cuja esfera de ampliação é maior do que a operação de partida. Por conseguinte, ao dar um passo à frente no campo da aprendizagem, a criança dá dois no campo do desenvolvimento; e por isso aprendizagem e desenvolvimento não são coincidentes (Vigotski, 2003, p. 8).

De maneira geral, estudiosos da educação matemática concordam que no aprendizado da matemática as crianças vão vivenciar inúmeras situações dentro e fora da escola, em que aparecem os números e as operações. Combinando suas experiências, começarão a empregar, primeiramente de forma não convencional, esses símbolos em suas atividades, até adquirirem o domínio de seu uso. A partir daí, no curso de seu desenvolvimento, sua atividade inicialmente espontânea vai incorporando a linguagem matemática científica específica de nossa cultura. Entretanto, como salientou Schliemann (2003b):

Os estudos em Psicologia da Educação Matemática sugerem que a reflexão sobre relações matemáticas em situações socialmente significativas em que a matemática é utilizada como instrumento para atingir objetivos relevantes, permite que a aprendizagem seja feita de forma significativa. Mas situações relevantes não se restringem àquelas que ocorrem fora da escola. As situações a serem criadas na escola devem abranger conceitos variados e permitir aspectos matemáticos que não são facilmente encontrados em situações fora da escola (Schliemann, 2003b, p. 32).

Desta forma, o educador além de levar em consideração o conhecimento dos estudantes em relação à matemática, que ocorre fora do ambiente escolar, necessita ampliar esta concepção original, ou seja, favorecer a apropriação e desenvolvimento dos conceitos científicos pelos estudantes em diversas situações.

Neste sentido, e de acordo com a teoria vigotskiana, o uso da linguagem, mais do que uma forma de comunicação, é uma poderosa “ferramenta” para auxiliar o pensamento dos estudantes. Sistemas simbólicos, como a linguagem matemática, por exemplo, são poderosas ferramentas para o pensar e o processo de aquisição destes instrumentos é essencialmente dependente das interações das crianças com os outros, especialmente com adultos que utilizam e dominam as diferentes linguagens simbólicas. (Rischbieter, n/d).

Em relação à comunicação nas aulas de matemática, Golbert (2002) salientou a importância da análise de outro elemento essencial da matemática escolar: os símbolos escritos e seu impacto sobre a aprendizagem dos conceitos matemáticos, pois os símbolos comunicam. Para a autora, os alunos deveriam perceber a matemática enquanto atividade social, pois o homem usa diferentes símbolos na comunicação; assim sendo, os processos de comunicação deveriam ser objeto de estudo e reflexão. Ainda, em relação à matemática escolar, a autora fez as seguintes considerações:

Os matemáticos se valem dos símbolos escritos: para organizar e guiar o pensamento e para se comunicar com os outros. Se considerarmos os símbolos como ferramentas para o fazer matemático e entendemos a matemática como uma atividade social, é óbvio que os alunos precisam de uma linguagem comum, com a qual possam construir significados compartilhados, numa discussão em que toda a classe possa participar. Inicialmente, é recomendável deixar que as crianças inventem símbolos para representar suas ações sobre as quantidades físicas. Mas, logo que avançam nos conceitos, precisam passar a usar as notações convencionais, cujos significados são compartilhados pela cultura mais ampla. (Golbert, 2002, p. 26)

Sobre a interação social nas aulas de matemática, Nikson (1994) pontuou que os resultados da natureza do conhecimento matemático e os efeitos na pedagogia são afetados pelo contexto social da interação na sala de aula e, também pela cultura de seus participantes. O autor salientou que os professores precisam ser cuidadosos em relação aos efeitos sutis da interação social na sala de aula, com as ações e comentários acerca do conhecimento dos alunos. Novas metodologias de ensino e aprendizagem criam situações onde os estudantes são incentivados a desafiar e questionar o professor e os colegas. Esta situação precisa reconhecer e valorizar o que os estudantes oferecem. Acima de tudo, criar uma atmosfera de cumplicidade

e respeito pelas idéias do outro.

De acordo com Vigotski, a escola deve promover o domínio dos instrumentos de mediação que possuem caráter acentuadamente descontextualizado e permitir o acesso às formas de conceitualização próprias da ciência, realçando a importância ativa do sujeito na re-elaboração desses conhecimentos.

Neste sentido, e de acordo com a vertente sócio-histórica da psicologia, Baquero (2001) fez importantes considerações em relação à função da escola no desenvolvimento e aprendizado dos estudantes.

1. A aprendizagem escolar define um sistema de trabalho particular que regula o uso dos próprios instrumentos mediadores que funcionam como conteúdo ou “veículo” do ensino.
2. O sistema escolar implica num sistema discursivo particular e uma organização material das atividades também específica.
3. A aprendizagem consiste, portanto, não apenas no domínio dos instrumentos ou sistemas conceituais, dos procedimentos de seu uso abstrato, como também de sua “recontextualização” no cenário escolar.
4. Admitir que no contexto escolar as atividades demandam tarefas cognitivas “estranhas” aquelas do cotidiano, exigem uma motivação completamente diferente à que impulsiona o desenvolvimento espontâneo em contextos cotidianos.
5. O domínio da língua escrita e o desenvolvimento dos conceitos científicos são exemplos paradigmáticos (trata-se de processos psicológicos formados em cenários específicos) dos graus e modalidades de desenvolvimento alcançáveis mediante a participação nas atividades escolares. Neste caso os processos superiores avançados (a língua escrita, por exemplo) se distinguem dos rudimentares (linguagem oral, seria um exemplo) pelo grau maior de descontextualização dos instrumentos de mediação utilizados e pelo maior grau, de consciência e controle voluntário das próprias operações intelectuais envolvidas.
6. O modelo requer um sujeito ativo, permitindo crescentes graus de tomada de consciência das próprias operações intelectuais e um domínio crescente e voluntário de sua própria atividade. (Baquero, 2001, p. 83,84)

Em relação à linguagem empregada entre os participantes da comunidade escolar, Vigotski e seus colaboradores deixaram claro que a fala não só acompanha a díade professor-aluno e aluno-aluno como também deve estar presente em toda a atividade prática, tendo um papel específico na sua realização. Nas palavras de Vigotski:

Quando analisada dinamicamente, a fala e ação têm uma função muito específica na história do desenvolvimento da criança; demonstra, também, a lógica de sua própria gênese. (...). O caminho do objeto até a criança e desta até o objeto passa por meio de outra pessoa. Essa estrutura humana complexa é o produto de um processo de desenvolvimento profundamente enraizado nas ligações entre a história individual e história social (Vigotski, 1996, p. 40).

Na perspectiva vigotskiana, o processo de ensino e aprendizagem no ambiente escolar ocorre em uma complexa dinâmica interativa, da qual participam três elementos essenciais: o aluno, como sujeito do ato de conhecer; os conteúdos e significados e o professor que atua como mediador do conhecimento.

Salienta-se que, em relação à interação social no contexto da sala de aula, um número elevado de estudos, fundamentados na perspectiva sócio-histórica, recai na relação do professor com os alunos. Entretanto, Goodman e Goodman (2002) pontuaram que há indícios crescentes de que uma aprendizagem colaborativa entre parceiros, independentemente das habilidades envolvidas, ativa a zona de desenvolvimento proximal e que professores, enquanto profissionais, mas também adultos, podem ser brilhantes observadores dos alunos, quando se preocupam com o que eles *estão fazendo* e com o que *são capazes de fazer*.

Em relação à teoria sócio-histórica e a prática educativa, conclui-se que os estudos de Vigotski provêm meios para o aperfeiçoamento da prática educativa, entretanto, muitas pesquisas ainda são necessárias para compreender e desvendar o papel das relações sociais na complexa rede que envolve o desenvolvimento humano. Citando o discurso de Daniels (2003):

A escolarização pode ser compreendida como uma forma elaborada de atividade sociocultural. Essa compreensão invoca uma concepção ampla de pedagogia. O trabalho de Vygotsky fornece uma estrutura na qual o apoio para a aprendizagem do aluno e a posição dos alunos em estruturas de discursos específicos podem ser explorados. Ele também pode ser usado para considerarmos as implicações

desenvolvimentais de diferentes aspectos do conhecimento e das atividades produtoras de conhecimento. As relações sociais que servem para mediar processos de transformação e mudança individuais são relações pedagógicas. Ainda sabemos muito pouco sobre a natureza e a extensão desses fatores sociais, culturais e históricos que moldam o desenvolvimento humano (Daniels, 2003, p. 224).

Por fim, é preciso lembrar que os diversos estudos na área da psicologia do desenvolvimento trouxeram grandes contribuições para entendermos como o homem se constitui, como se desenvolve o processo de pensamento, como se desenvolve a sociedade. Entretanto, como nos diz Vergnaud (1990a) importantes conhecimentos acerca dos aspectos epistemológicos são totalmente esquecidos pelos professores, planejadores curriculares e mesmo pesquisadores ou ainda, a sua importância para o ensino e a pesquisa podem ser superestimada. Segundo o autor, “há um espaço entre a epistemologia dos professores e a epistemologia dos estudantes, e essa distância é reforçada pelo fato de que os professores usualmente não questionam sua própria epistemologia nem aquela implícita nos livros textos” (Vergnaud, 1990a, p. 20).



## **CAPÍTULO II**

### **O ESTUDO DAS ESTRUTURAS ADITIVAS E MULTIPLICATIVAS DA ARITMÉTICA ELEMENTAR**

Na matemática escolar, desde a educação infantil, apesar de todos os avanços no campo de pesquisa da educação matemática, ainda imperam algumas crenças quanto à discussão e apresentação das quatro operações aritméticas em situações de solução de problemas do cotidiano. Neste sentido, Kamii (2002) pontuou que:

No ensino tradicional da matemática, o professor mostra às crianças como somar, subtrair, multiplicar e dividir e então dá problemas semelhantes para praticar. Ao contrário, nós não dizemos às crianças o que fazer e, em vez disso, damos problemas de modo que elas usem o que sabem para inventar novas formas de resolvê-los (Kamii, 2002, p. 231).

A história da Matemática coloca em evidência que na origem das atividades matemáticas encontra-se um problema a ser resolvido. Desta forma, os estudos na área da Educação Matemática devem resgatar a importância da solução de problemas na compreensão e aplicação das operações aritméticas elementares.

No contexto de ensino e aprendizagem da matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental, de uma maneira geral, a análise da literatura na área aponta a necessidade de se propor situações-problema desde a educação infantil, sendo este o caminho tido como mais eficaz para desenvolver o raciocínio lógico matemático dos estudantes. Neste sentido, torna-se necessário ao educador conhecer todos os mecanismos que envolvem a construção conceitual das estruturas aditivas e multiplicativas para que efetivamente possa mediar o



desenvolvimento destas competências em seus alunos.

Ainda, como salientaram Maldaner e Isaia (2001), uma metodologia que pretende problematizar as operações fundamentais, como forma de oportunizar a reconstrução das mesmas pelos alunos, requer, por parte do professor, clara compreensão dos princípios envolvidos em cada das operações aritméticas elementares: a adição, multiplicação, subtração e divisão.

Sabe-se que a aritmética é considerada a parte da matemática que estuda as propriedades dos números e as operações que se possa realizar sobre esses números. A palavra aritmética deriva da palavra grega *arithmos*, a qual significa número (Centurión, 2002).

Segundo Brumfiel, Eicholz e Shanks (1972) apesar dos princípios da adição e multiplicação serem considerados básicos e simples, eles são o fundamento de qualquer estudo cuidadoso de aritmética, bem como da álgebra.

Desta forma, a compreensão destes princípios básicos permitiria ao professor lidar melhor com as diversas situações da matemática cotidiana e escolar, e a compreender e refletir sobre os diferentes caminhos percorridos pelos alunos nas atividades matemáticas. Assim sendo, a seguir, apresentam-se os princípios gerais das operações aritméticas de adição e multiplicação de números inteiros positivos:<sup>7</sup> (Brumfiel e cols. 1972, p. 55-62)

*I - O princípio da existência e unicidade:* quando adicionamos um número inteiro a um segundo, existe exatamente um número inteiro que é a soma dos dois. “Se eu adicionar um número inteiro a outro obterei um número inteiro; além disso, há somente uma resposta correta.” Este princípio é conhecido como da existência ou unicidade. Este princípio é válido para a adição e também para a multiplicação de números inteiros.

*II – O princípio da comutatividade:* este princípio diz respeito à ordem na adição e multiplicação. Pode-se dizer que a soma ou produto de dois números não dependem da ordem em que é feita a adição ou a multiplicação. Se “a” e “b” são números inteiros positivos, *então:*  $a + b = b + a$  e  $a \times b = b \times a$

---

<sup>7</sup> De acordo com Brumfiel e cols. (1972) os princípios apresentados são verdadeiros também para os números racionais. Caraça (1989) ressaltou a necessidade do homem em considerar o zero na contagem. Ainda, de acordo com o autor, são considerados números naturais a seqüência (1, 2, 3, ...) e a seqüência iniciada pelo zero (0, 1, 2, 3, ...) como a sucessão de números inteiros positivos.

*III – O princípio da associatividade:* Na linguagem matemática usando-se variáveis pode-se anunciar o princípio da associatividade como: se “a” “b” e “c” são números inteiros, então:  $a + b + c = a + c + b$  e  $a \times b \times c = a \times c \times b$ .

Na adição, a propriedade associativa mostra também que podemos primeiramente juntar duas parcelas e depois as demais parcelas e que o resultado final não se alterará:  $3 + 7 + 5 = 15$  ou  $10 + 5 = 15$  (as parcelas associadas foram  $3 + 7$ ). Segundo Magalhães (n/d), esta propriedade pode ajudar as crianças, se forem devidamente estimuladas, a serem mais rápidas nos cálculos mentais, ainda que o elemento neutro da adição seja o zero, pois qualquer somado ao zero resultará sempre no valor adicionado:  $10 + 0 = 10$ .

Ainda, segundo a autora, não é necessário passar esta teoria para os alunos ou fazer a criança “decorar” as mesmas. Entretanto, é preciso estimular os estudantes a aprofundar seus conhecimentos e que as aplicações destes conhecimentos em situações problemas são muito mais significativas.

Ressalta-se que a multiplicação comporta ainda a propriedade distributiva em relação à adição, onde  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ .

$$\text{Exemplo: } 6 \times (5+3) = 6 \times 5 + 6 \times 3 = 30 + 18 = 48$$

Em relação às operações da aritmética elementar de estrutura aditiva, a adição e a subtração, é consenso geral entre os matemáticos dizer que a idéia básica da adição está ligada a situações que envolvem ações de reunir, juntar ou acrescentar; enquanto que a operação da subtração liga-se a três idéias básicas, a saber: a idéia de retirar, a de completar e a de comparar. (Centurión, 2002).

De acordo com Caraça (1989), a operação de adição é a operação da qual todas as outras dependem, pois a idéia de adicionar ou somar está incluída na própria noção de número natural. Segundo o autor, “de que é a passagem de um número ao seguinte, senão a operação de somar uma unidade a um número?” (Caraça, 1989, p. 17)

Quanto às operações inversas, em relação à adição, Caraça (1989) assinalou que a inversão consiste em: dada a soma e uma das parcelas, determinar a outra. Ainda, segundo o autor, deveria haver duas operações inversas, conforme se pedisse o adicionando ou o adicionador, mas, em virtude da propriedade comutativa da adição, os papéis das duas parcelas podem ser trocados, e as duas inversas se fundem numa só, que se chama subtração.

No caso da multiplicação, Caraça (1989) assinalou que a inversão consiste em: dado o produto e um dos fatores, determinar o outro fator. Neste caso, deveria também haver duas inversas, mas que se fundem numa só — a divisão — em virtude da propriedade comutativa do produto.

Pesquisas em diferentes países, envolvendo a adição e subtração, como por exemplo, as de Carpenter e Moser (1983); Nesher, Greeno e Riley (1982); Riley, Greeno e Heller (citado por Fayol, 1996) apontaram que, de uma maneira geral, as categorias semânticas relacionadas a estas operações são denominadas como “mudança”, “combinação” e “comparação”.

As características semânticas dos problemas referem-se aos conhecimentos relativos aos aumentos, às diminuições (transformações), combinações e comparações de conjunto de elementos. Muitos autores elaboraram uma taxonomia de problemas em função destes aspectos. De acordo com Fayol (1996):

Uma concepção mais ou menos “espontânea” da aritmética e de sua gênese leva a considerar que os problemas do tipo subtrativo, por exemplo, são mais difíceis de serem resolvidos do que os do tipo aditivo. O mesmo raciocínio vale para o que concerne à multiplicação e à divisão. Acontece que, até o momento, nenhuma pesquisa aprofundada foi realizada para confirmar ou anular esta “teoria” de bom senso. Há pouco, tal fato se modificou, em resultado, pelo menos em parte, do trabalho de pesquisa que foi conduzido a fim de evidenciar a organização semântica subjacente aos problemas aritméticos (Fayol, 1996, p. 124).

Em função da relação semântica que descrevem um determinado tipo de situação e em função das operações de adição e subtração relacionadas ao elemento desconhecido Riley, Greeno e Heller (1983, citado por Fayol, 1996) categorizaram os problemas em quatro conjuntos:

1. Mudança – (reunião ou separação). Implicam a ocorrência de uma transformação aplicada a um estado inicial que resulta (ou tendo resultado) num estado final. A transformação pode ser aditiva ou subtrativa, abrangendo seis tipos de mudanças.

Exemplo de dois tipos de mudanças:

Carla tinha 5 lápis. Sua mãe lhe comprou mais 7. Quantos lápis ela tem agora?

(transformação, utiliza-se uma adição).

Carla tinha alguns lápis. Sua mãe lhe deu mais 7. Agora ela tem 12 lápis. Quantos lápis sua mãe lhe deu? (transformação, resolve-se com uma subtração).

2. Combinação – diz respeito a situações estáticas e não a transformação.

Ex: Pedro tem 4 carrinhos e Felipe tem 6. Quantos carrinhos Pedro e Felipe tem juntos?

Pedro e Felipe têm juntos 10 carrinhos. Pedro tem 4 carrinhos. Quantos carrinhos tem Felipe?

3. Igualização (igualar as quantidades) – este tipo de problema envolve as mesmas ações dos problemas de mudança, mas existe, também, uma comparação envolvida, ou seja, possui um *status* intermediário entre os problemas do tipo comparação e mudança. Exemplos:

Carlos tem 3 bolas. Marcelo tem 5. O que Carlos deve fazer para ter o mesmo número de bolas que Marcelo?

Marcelo tem 5 bolas. Carlos tem 3. O que Marcelo tem que fazer para ter o mesmo número que Carlos?

4. Comparação – envolve a comparação entre quantidades. Ao contrário dos problemas de mudança e igualização, que envolvem uma dinâmica, estes são estáticos, ou seja, há comparação de quantidades estáticas apresentadas com a ajuda de fórmulas do tipo “mais de/menos de”. Este tipo de problema comporta seis categorias.

Ex: Raquel tem 7 bonecas. Mariana tem 5. Quantas bonecas Raquel tem a mais que Mariana?

Raquel tem 7 bonecas. Mariana tem 5. Quantas bonecas Mariana tem a menos que Raquel?

Mariana tem 5 bonecas. Raquel tem 2 bonecas a mais. Quantas bonecas tem Raquel?

Raquel tem 7 bonecas. Mariana tem 2 a menos. Quantas bonecas tem Mariana?

Raquel tem 7 bonecas. Ela tem duas a mais que Mariana. Quantas bonecas tem Mariana?

Mariana tem 5 bonecas. Ela tem 2 bonecas a menos que Raquel. Quantas bonecas tem Raquel?

Em relação à classificação mencionada, Fayol (1996) salientou que ela apóia-se,

essencialmente, em uma análise da organização subjacente descrita pelo enunciado, desta forma, ela pode ser contestada. O autor assinalou que os aspectos semânticos sozinhos não bastam, assim sendo, os pesquisadores da educação matemática tiveram que levar em conta, também, a natureza da incógnita e ainda que, as diferentes possibilidades consideradas não esgotam o conjunto de casos possíveis.

Baseado no tipo de relação entre os dados, Carpenter e Moser (1983) fizeram uma classificação dos problemas de adição e subtração apropriados para crianças da escola “primária.” Neste sentido, pontuaram que Vergnaud fez uma classificação mais completa das estruturas de problemas de adição e subtração, que estende as operações para níveis mais elevados.

A análise realizada por Carpenter e Moser (1983) apresenta uma classificação dos problemas simples de adição e subtração, as quais envolvem as ações de:

1. Mudar: há dois tipos de mudança, as quais envolvem a ação de juntar (adição) e separar (subtração), tendo cada uma dessas ações 3 subcategorias.

2. Combinar: envolve relação estática. Possui 2 subcategorias, uma relacionada à adição e a outra à subtração.

3. Comparar: envolve relação estática e possui 6 subcategorias, sendo 3 relacionadas à adição e 3 à subtração

4. Igualar (igualização): este tipo de problema envolve comparar e mudar e possui 6 subcategorias, 3 de adição e 3 de subtração. A questão básica deste tipo de problema é: “O que poderia ser feito em um desses conjuntos para ficar igual ao outro?” Os autores assinalaram que este tipo de categorização de problema não é comumente encontrado na literatura americana.

Ex: Pedro tem 13 bolinhas de gude. Juliano tem 5. Quantas bolinhas de gude Juliano tem que comprar para ter a mesma quantidade que Pedro?

Nesher, Greeno e Riley (1982) propuseram uma análise semântica na qual os significados dos problemas são estruturas que incluem relações de ordem e classe. Os diferentes tipos de problemas variam em complexidade das estruturas semânticas e das operações requeridas para obtenção dos significados estruturais dos problemas. Os autores apresentaram uma síntese das pesquisas realizadas sobre as diferentes categorias semânticas de

problemas de adição e subtração, assinalando que dentro de cada uma dessas categorias existem diferentes problemas, com maior ou menor grau de dificuldade, os quais podem ser elaborados variando o elemento desconhecido.

Categoria	Características	Exemplos	Pesquisas e títulos para a mesma categoria
1. Combinação	Envolve relação estática. Pergunta-se sobre juntar ou separar.	Existem 3 meninos e 4 meninas. Quantas crianças ao todo?	<i>Combinação</i> : Greeno (1980), Heller e Greeno (1978); Riley (1979); Riley e cols. (1981). <i>Parte-parte-todo</i> : Carpenter e Moser (1981), Carpenter e cols. (1981). <i>Estático</i> : Nesher (1978, 1981) <i>Composição de duas medidas</i> : Vergnaud e Durant (1976), Vergnaud (1981).
2. Mudança	Descreve aumento ou diminuição em alguns estados iniciais para produzir um estado final.	João tem 6 bolinhas de gude. Ele perdeu duas delas. Quantas ele tem agora?	<i>Mudança</i> : Greeno (1980). <i>Junção e separação</i> : Carpenter e Moser (1981), Carpenter e cols. (1981). <i>Dinâmica</i> : Nesher e Katriel (1978), Nesher (1981). <i>Transformação ligando duas medidas</i> : Vergnaud e Durant (1976), Vergnaud (1981)
3. Comparação	Envolve comparação de quantidades estáticas. Pergunta sobre a diferença entre as quantidades analisadas.	Antônio tem 6 bolinhas de gude. José tem 4. Quantas bolinhas de gude Antônio tem a mais que José?	<i>Combinação</i> : Greeno (1980); Carpenter e Moser (1981); Carpenter e cols. (1981); Nesher e Katriel (1978); Nesher (1981). <i>Um relação estática ligando duas medidas</i> : Vergnaud e Durant (1976); Vergnaud (1981).

Figura 3. As três categorias semânticas de problemas de adição e subtração.<sup>8</sup>

<sup>8</sup> Adaptado do original de Nesher, Greeno e Riley (1982). Na coluna referente aos estudos prévios realizados, todas as pesquisas são citadas pelos autores. Para maiores esclarecimentos consultar o estudo original e as referências apresentadas na obra.

Salienta-se que o estudo que gerou a apresentação destas informações foi realizado em 1982. Entretanto o mesmo permite uma visão geral das diversas categorias de problemas de adição e subtração e as denominações dadas por diferentes pesquisadores para a mesma categoria, as quais, ainda hoje, são referências na construção e desenvolvimento

Em relação à estrutura multiplicativa, em geral, a apresentação da idéia de multiplicação nos livros didáticos de matemática está associada a situações que envolvem a adição de parcelas iguais, mas há outras situações que também sugerem a idéia de multiplicação, como por exemplo, as situações que envolvem o raciocínio combinatório.

Nunes e Bryant (1997) assinalaram que uma das formas de solucionar problemas de multiplicação pelas crianças é a adição repetida. O aluno, por exemplo, pode obter a resposta para  $3 \times 270$  somando 270 três vezes. Os autores ainda salientaram que relações semelhantes existem entre a subtração e a divisão, pois se pode obter a resposta para 270 dividido por 90 vendo quantas vezes deve-se subtrair 90 de 270 para chegar a zero. Para os autores, *seria errado tratar a multiplicação como apenas uma outra forma, bastante complicada, de adição, ou a divisão como outra forma de subtração* (Nunes & Bryant, 1997, p. 142)

Ainda, de acordo com os autores, situações que dão lugar ao raciocínio multiplicativo são diferentes, pois não envolvem as ações de unir e separar. Para este tipo de raciocínio existe três tipos principais de situação multiplicativa:

1. *Situações de correspondência um-para-muitos.*

Consistem nas situações mais simples, pois as crianças ainda pequenas lidam com situações do tipo: uma criança tem duas pernas, um saquinho de aniversário tem 10 balas, ainda, um carro tem quatro rodas (1-para-4), 1 mesa com 6 cadeiras (1-para-6).

Este tipo de situação leva à compreensão de um novo conceito matemático, o de *proporção*. Cada vez que acrescentamos um carro devemos acrescentar 4 rodas. Isso contrasta com a situação de adição, uma vez que, para manter constante a diferença entre dois conjuntos, somamos o mesmo número de objetos a cada conjunto. Ou seja, o conceito de proporção envolve, diferentemente do raciocínio aditivo, uma relação multiplicativa constante entre dois conjuntos.

2. *Situações que envolvem relações entre duas ou mais variáveis.*

Exemplo: “Mariana tem 3 saias (uma branca, uma preta e uma azul) e 4 blusas de cores diferentes. De quantas maneiras diferentes ela pode se vestir combinando sempre uma das saias com uma das blusas?”.



Como assinalaram os autores, este tipo de problema envolve a relação entre duas variáveis, ou seja, os dois conjuntos básicos (saias e blusas) e mais um terceiro conjunto formado pelas diferentes combinações possíveis (trajes).

### 3. *Situações que envolvem distribuição.*

Esta situação envolve uma nova visão de parte-todo, que difere de tais relações em situações aditivas, pois na distribuição, há três valores a serem considerados: o total, o número de receptores e a cota (tamanho da distribuição), sendo que a cota e o número de receptores estão em uma relação inversa, enquanto um cresce o outro diminui.

As pesquisas desenvolvidas por Correa e Spinillo (2004) também ressaltaram que alguns procedimentos utilizados pelos alunos em situação de multiplicação apóiam-se no desenvolvimento de estruturas aditivas. Citam como exemplo, uma criança que ao calcular quanto de comida seria dado a um animalzinho, tendo 24 unidades de um alimento e 3 animais para alimentar, ter adotado o seguinte procedimento: “Dá 8”. Eu fui juntando. Eu boto um 8, mais outro 8 e mais 8, aí faz 24.” (p. 105)

Para as autoras, apesar de a criança valer-se de uma estratégia aditiva para situações que envolvem multiplicação ou divisão, isto não quer dizer que não existam diferenças qualitativas entre o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo e o das estruturas aditivas:

O raciocínio multiplicativo vai se constituir a partir do desenvolvimento de algumas competências, principalmente aquelas relativas à coordenação das relações entre, pelo menos, duas variáveis; ou entre, pelo menos, duas grandezas ou quantidades. Já o raciocínio aditivo desenvolve-se principalmente a partir dos esquemas relativos às ações de juntar e separar (Correa & Spinillo, 2004, p. 106).

Ainda, em relação à multiplicação, utilizando referencial teórico piagetiano, Kamii (2002) argumentou que há uma diferença significativa entre o pensamento aditivo e multiplicativo, pois a multiplicação envolve o tipo de pensamento hierárquico, ou seja, níveis simultâneos de abstração e de relações de inclusão.

Segundo a autora, para a maioria dos professores de matemática, a multiplicação é apenas uma forma mais rápida de fazer adições repetidas. Contudo, a estrutura de um problema de adição repetida como  $5 + 5 + 5 + 5$  é simples, pois envolve apenas unidades em um nível de abstração. Enquanto que, um problema de multiplicação como  $4 \times 5$  envolve a

estrutura hierárquica. No caso  $4 \times 5$ , por exemplo, o “4” refere-se a “4 cinco”, ou seja, em  $4 \times 5$ , o aluno tem de ser capaz de transformar “5 unidades” em “um cinco”, que é uma unidade de ordem superior; como representado na figura abaixo (Kamii, 2002, p. 118).

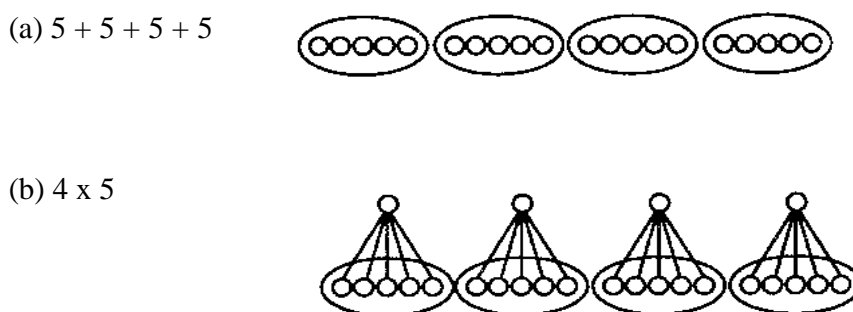


Figura 4. Diferença estrutural entre adição e multiplicação.

Já em relação à divisão, encontra-se a idéia de que esta pode ser feita em partes iguais ou não. Segundo Correa e Spinillo (2004, p. 108) em relação à divisão, o uso de esquemas de ação de correspondência vai estar relacionada à idéia da partição. “Em termos gerais, a noção de partição implica no desmembramento de uma quantidade em partes, não necessariamente equivalentes.” Uma criança, por exemplo, pode realizar uma partição de 12 objetos de modo que uma parte tivesse 5 objetos, outra 3 e outra 4 objetos.

Na divisão, torna-se importante ainda considerar a natureza do objeto que está sendo dividido para que se possa de forma significativa interpretar o resultado da mesma. Centurión (2002) e Nunes, Campos, Magina e Bryant (2005)<sup>9</sup> salientaram a importância da lógica das quantidades extensivas e intensivas no ensino e pesquisa sobre a divisão. Quando, por exemplo, dizemos “três bombons”, “três quilos”, “três metros” ou “três cadeiras” estamos pensando em uma quantidade extensiva.

---

<sup>9</sup> As pesquisas desenvolvidas pelos autores fundamentaram-se nos estudos desenvolvidos por Piaget sobre o tema. Moro (2002, 2004, 2005a, 2005b), também se fundamentando em Piaget, desenvolveu uma série de investigações sobre a divisão. Para maior conhecimento sobre, especificamente, sobre a divisão consultar as referências.

Segundo Nunes et al. (2005, p. 120) “uma forma simples de pensarmos em quantidades extensivas é pensar no número 3, nos exemplos acima, como um indicador de quantas unidades temos”. Por outro lado, as medidas baseadas na relação ou comparação entre duas quantidades diferentes são medidas de quantidades intensivas e a lógica deste tipo de quantidade é diferente da lógica da quantidade extensiva porque não está baseada na relação parte-todo.

Ainda, segundo Nunes et al. (2005) a lógica das quantidades extensivas baseia-se, como apresentado, na relação parte-todo, portanto no raciocínio aditivo. Já, a lógica das quantidades intensivas baseia-se numa relação entre duas quantidades (líquidos, por exemplo), portanto, no raciocínio multiplicativo.

Nesta mesma direção, Centurión (2002) ressaltou que é necessário verificar com que tipo de grandeza se está trabalhando; se esta é uma *grandeza discreta ou grandeza contínua*. Numa linguagem de fácil compreensão Oscar de Brito (citado por Centurión, 2002) definiu como uma grandeza discreta, também chamada descontínua, aquela que:

Não pode crescer ou decrescer segundo nossa vontade; ela cresce ou decresce por graus determinados, como um grupo de homens, um rebanho de ovelhas, etc. A grandeza descontínua não pode ser medida com unidades arbitrárias; a unidade deve ser da mesma natureza da grandeza. Se tratar de um rebanho de ovelhas, a unidade necessariamente será ovelhas (Oscar de Brito, citado por Centurión, 2002, p. 206).

Em exemplo clássico dos livros didáticos, relacionados à divisão, tem-se que: ao dividirmos certa quantidade de alunos por um determinado número de salas, não se pode ter como resultado, por exemplo, 8 alunos e “meio”, porque meio aluno não existe. Neste caso, trata-se de uma grandeza discreta.

Ainda, em relação ao significado da divisão, torna-se também necessário levar em consideração o contexto de uma dada situação problema, como exemplificado a seguir:

Se dividirmos 53 laranjas (todo discreto) por 5 caixas, teremos 10 laranjas em cada caixa e restarão 3 laranjas. As 3 laranjas poderiam ser repartidas e serem colocados pedaços iguais em cada uma das 5 caixas, mas isso modificaria o sentido da simples repartição inicial das laranjas (inteiras) (Centurión, 2002, p. 206).

Na divisão de grandezas contínuas, o resto pode ser dividido sem alterar o significado

das partes que resultarão da divisão. Em estudo sobre frações, por exemplo, conhecer estes princípios permite ao estudante a compreensão do conceito fracionário.

Por fim, pode-se dizer que discreto e contínuo são termos que se referem respectivamente a duas das ações básicas na elaboração da Matemática: *contar* e *medir*. Desta forma e, segundo Brolezzi (1996):

De modo geral, *discreto* é aquilo que exprime objetos distintos, que se revela por sinais separados, que se põe à parte. Vem do latim *discretus*, particípio passado do verbo *discernere* (discernir), que significa *discriminar, separar, distinguir, ver claro*. (...) Já *contínuo* vem de *con-tenere* (*ter junto, manter unido, segurar*). *Contínuo* é o que está imediatamente unido à outra coisa (Brolezzi, 1996, p. 1).

Brolezzi (1996) ressaltou ainda que quando ocorrem ampliações na idéia de número no currículo de Matemática elementar, e se introduzem os números racionais e reais, sente-se de modo determinante a falta de uma abordagem que leve em conta a relação entre discreto e contínuo. Mas o verdadeiro significado do número racional, composto pelas idéias de fração, de divisão e de razão, só pode ser atingido por um trabalho que leve em consideração o duplo aspecto, discreto e contínuo, dos números. Segundo o autor, historicamente, percebe-se que o caminho para a construção das idéias fundamentais do cálculo pode ser feito pela via do discreto ou do contínuo, e ambas as abordagens acabam se complementando.

## **1. A Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud**

Gérard Vergnaud (2005, 2003), é diretor de pesquisa do Centro Nacional de Pesquisa Científica da França (CNRS) e coordenador da rede francesa de pesquisadores em didática dos conhecimentos científicos. Dedicado aos estudos da formação de conceitos matemáticos desenvolveu uma série de pesquisas de modo a oferecer aos professores um quadro teórico que lhes permitam compreender como os estudantes aprendem conceitos matemáticos.

Segundo Parra e Saiz (2001), a Didática da Matemática atualmente é desenvolvida em vários países. Porém é na França é, principalmente, na França que os estudiosos da Didática da Matemática reclamam seu reconhecimento como disciplina autônoma no campo científico e, enquanto disciplina, este campo do saber busca descrever e explicar os fenômenos relativos às

relações entre ensino e aprendizagem da Matemática.

Torna-se ainda importante destacar que o francês Gérard Vergnaud, criador da teoria dos campos conceituais, não vê sua proposta como uma teoria didática, mas considera-a de extremo interesse para o campo educacional. (Vergnaud, 1990b)

Nesse sentido e como demonstraram várias pesquisas na área da educação matemática, embora a teoria dos campos conceituais não seja uma teoria didática, ela seguramente tem implicações didáticas, uma vez que Vergnaud defende que o saber se constrói a partir dos problemas a resolver, desta forma, o prioritário para a didática seria a investigação de uma variedade de situações-problema significativas e funcionais à elaboração dos conceitos.

Ao discorrer sobre sua carreira acadêmica, Vergnaud (2005a) demonstrou grande preocupação com o ensino, bem como, seu interesse pelos estudos de Piaget e Vigotski, como se pode perceber na passagem a seguir:

Fui aluno de Piaget e li com muito interesse os escritos de Vygotski. Estou entre aqueles que desenvolveram, na França, a didática da matemática, e também coordenei o trabalho com 80 professores, em todo território francês, em física e informática. Depois trabalhei com adultos de fraca instrução inicial e também pesquisei sobre o desenvolvimento de competências profissionais. Constata-se, hoje, a necessidade de conhecer a didática de cada disciplina porque se aprende a partir de conceitos em situação, que tem a ver com aspectos específicos da realidade relacionados com os conhecimentos das várias disciplinas. (...) Da mesma maneira que compreendemos melhor os problemas de aprendizagem das crianças, observando-as e analisando o que elas fazem, nós compreendemos melhor também os problemas dos professores analisando a sua prática. Estes, entretanto, são domínios de pesquisa muito pouco desenvolvidos até agora (Vergnaud, 2005, p. 86).

Segundo Golbert (2002) e Moreira (2004), Vergnaud, criador da teoria dos campos conceituais, amplia e direciona em sua teoria o foco piagetiano das operações lógicas, das estruturas gerais do pensamento, para o estudo do sujeito - em - situação, fundamentando seus estudos nas pesquisas realizadas por Piaget para elaborar, entre outras, a noção de esquema, reconhecendo também o legado de Vigotski, relacionado principalmente ao papel da interação social e da linguagem na formação do sujeito.

Avaliando as idéias de Piaget, amplamente aceitas no campo de Estudo da Educação Matemática, Vergnaud (1990a) assinalou que Piaget não estudou sobre o processo de ensino-aprendizagem, desta forma:

É interessante avaliar as idéias de Piaget à luz da presente pesquisa. Sua visão construtivista das competências matemáticas e concepções (o conhecimento é produzido pela atividade individual da criança) é, provavelmente, uma das visões mais amplamente aceitas hoje entre os pesquisadores da Psicologia da Educação matemática, embora muitos deles se queixem de que Piaget não deu atenção suficiente aos aspectos sociais do processo ensino-aprendizagem, além de não ter integrado as importantes visões que foram desenvolvidas por Vygotski, Bruner e outros. Realmente, Piaget nunca pesquisou sobre o processo ensino-aprendizagem, seja na sala de aula ou em casa. Essa é uma de suas omissões e um assunto importante para pesquisas presentes e futuras no campo da Educação matemática (Vergnaud, 1990a, p. 18-19).

De acordo com Vergnaud (2003) é preciso conceber o processo cognitivo, não só como aquele que organiza as atividades e o seu funcionamento em situação, mas também de formas inteligentes de organização da atividade de certa pessoa durante a sua experiência. A questão teórica fundamental é: “o que é que se desenvolve e sob que condições?” (Vergnaud, 2003, p. 22).

Para Golbert (2002, p. 47), a teoria dos campos conceituais utiliza-se de conceitos tradicionais da psicologia cognitiva, mas apresenta alguns aspectos originais. Na sua essência, preocupa-se com o vínculo entre um conhecimento e os problemas teóricos e práticos aos quais responde. “O critério definitivo do pensamento conceitual é sua relação com condutas, a possibilidade de uma atividade de acordo com uma situação, a elaboração de uma resposta a um problema”.

Um campo conceitual é definido por Vergnaud (1983, 1990a, 1990b, 1996, 1998) como um conjunto de situações, cuja análise, tratamento e apropriação requerem o domínio de vários tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas que estão conectadas uns aos outros. Um exemplo seria o campo conceitual das estruturas multiplicativas, que consiste em todas aquelas situações que podem ser analisadas como problemas simples, ou de múltiplas proporções, ou ainda aqueles que precisam normalmente multiplicar ou dividir.

Moreira (2004) descreveu a teoria dos campos conceituais, proposta e apresentada por Vergnaud em diferentes trabalhos, como uma teoria psicológica cognitivista que supõe que o núcleo do desenvolvimento cognitivo é a conceitualização do real. Assinalou que, para Vergnaud, o conhecimento está organizado em campos conceituais, cujo domínio, de parte do aprendiz ocorre ao longo de um largo período de tempo, por meio de experiência, maturidade e aprendizagem.

Por fim, um campo conceitual é um conjunto de problemas e situações no qual conceitos, procedimentos e representações, diferentes, mas estreitamente conectadas, são necessários no processo de aquisição e desenvolvimento de conhecimentos específicos e habilidades. (Vergnaud, 1983).

## **1.1 Principais Conceitos da Teoria dos Campos Conceituais**

### **1.1.1. Esquema**

Vergnaud chamou de esquema a *organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situação* (Vergnaud, 1997, p. 12, Vergnaud 1990b), segundo ele, são nos esquemas que se devem pesquisar os conhecimentos-em-ação do sujeito, isto é, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória.

De acordo Vergnaud (1997, 1990b) são ingredientes dos esquemas:

1. Metas e antecipações — um esquema se dirige sempre a uma classe de situações nas quais o sujeito pode descobrir uma possível finalidade de sua atividade.
2. Regras de antecipação do tipo “se...então” que constituem a parte verdadeiramente geradora do esquema.
3. Invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) que dirigem o reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação; são os conhecimentos contidos nos esquemas, de base implícita ou explícita, que permite obter a informação pertinente e dela inferir a meta a alcançar e as regras de ação adequadas.

4. Possibilidades de inferências (ou raciocínios) que permitem “calcular” as regras e antecipações a partir das informações e invariantes operatórios de que dispõe o sujeito na situação imediata.

### **1.1.2 Conceitos**

De acordo com Vergnaud (1996, 1997, 1998, 1990b) o estudo e o conhecimento de como os conceitos matemáticos se desenvolvem na mente das crianças, por meio da sua experiência na escola e fora dela, precisa ser considerado como um tripé de três conjuntos,  $C = (S,R,I)$  onde:

S: conjunto de situações que dão sentido ao conceito, (referente do conceito);

I: conjunto de invariantes operatórios que podem ser usados pelo indivíduo para lidar com estas situações, ou conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito, ou conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito, (significado do conceito);

R: conjunto de representações simbólicas, lingüísticas, gestual, gráficas ou diagramas que podem ser usadas para representar invariantes, situações e procedimentos, (significante).

Segundo Vergnaud (1998) em termos psicológicos, S é a realidade e (I e R) a representação. A representação pode ser considerada como dois aspectos do pensamento interagindo, o significante (R) e o significado (I).

### **1.1.3 Conceito-em-ação e Teorema-em-ação**

Do ponto de vista teórico, o conceito de esquema proporciona o vínculo entre a conduta do aluno e a representação desta conduta. A relação entre situações e esquemas é a fonte primária da representação e, portanto, da conceitualização. Mas são os invariantes operatórios que fazem a articulação entre a teoria e a prática, pois a percepção de um problema, a busca e a seleção da informação baseiam-se no que Vergnaud chama de conceitos-em-ação disponíveis para o sujeito (objetos, atributos, relações, condições, circunstâncias) e nos teoremas-em-ação subjacentes a sua conduta. (Moreira, 2004; Vergnaud, 1997).



Moreira (2004) apontou a diferença e ao mesmo tempo a completude dos invariantes operatórios: conceitos-em-ação e teoremas-em-ação da seguinte forma:

Há uma relação dialética entre conceitos-em-ação e teoremas em ação, uma vez que conceitos são ingredientes de teoremas e teoremas são propriedades que dão os conceitos seus conteúdos. Mas seria um erro confundi-los. Conceitos em ação são ingredientes necessários das proposições. Mas conceitos não são teoremas, pois não permitem derivações (inferências ou computações); derivações requerem proposições. Proposições podem ser verdadeiras ou falsas; conceitos podem ser apenas relevantes ou irrelevantes. Ainda assim não existem proposições sem conceitos. Reciprocamente não há conceitos sem proposições (p. 16).

Por meio da exposição de exemplos de problemas percebe-se de forma clara o que seriam conceitos-em-ação e teoremas-em-ação e como os dois estão intrinsecamente relacionados.<sup>10</sup>

A: Janete tinha sete bolinhas de gude. Ela jogou e ganhou 5 bolinhas. Quantas bolinhas ela tem agora?

B: Paulo tinha 12 bolinhas de gude. Ele jogou e perdeu 5 bolinhas. Quantas bolinhas ele tem agora?

C: Hans tinha 9 bolinhas de gude. Ele jogou com Rute. Ele tem agora 14 bolinhas de gude. O que aconteceu no jogo?

D: Rute jogou bolinhas de gude com Hans e perdeu 5 bolinhas. Ela agora tem 7 bolinhas de gude. Quantas ela tinha antes de jogar?

Os *conceitos em ação* estão implícitos na compreensão dessas situações: número cardinal, ganho e perda, aumento e diminuição, transformação e estado, estado inicial e final, transformação positiva e negativa, adição e subtração.

Os conceitos são os mesmos em todos os exemplos, mas a situação D é a mais difícil para alunos de sete ou oito anos, pois implica raciocinar “para trás”<sup>11</sup> e achar o estado inicial.

---

<sup>10</sup> Os exemplos de problemas apresentados se encontram nos estudos de Vergnaud, citados por Moreira (2004, p. 15-16).

<sup>11</sup> Nos estudos de base piagetiana raciocinar “para trás” implica na verdade a reversibilidade dos processos de

Tal raciocínio depende de um forte *teorema em ação*.

Segundo Vergnaud (1998) teoremas em ação são definidos como relações matemáticas, as quais são levadas em consideração pelos estudantes quando eles escolhem uma operação ou seqüência de operações para resolver um problema. Normalmente, essas relações não são expressas verbalmente por eles. Portanto, teoremas-em-ação são teoremas no sentido convencional do termo porque a maioria deles não são explícitos.

Conceitos-em-ação e teoremas-em-ação são conhecimentos na maioria das vezes implícitos e, em geral, aluno tem dificuldade em expressá-lo. É por meio do processo de explicitação do conhecimento implícito, que os teoremas-em-ação e conceitos-em-ação podem se tornar verdadeiros teoremas e conceitos científicos. Neste sentido, o professor tem uma fundamental importância enquanto mediador, ajudando o aluno a tornar explícito o seu pensamento (Moreira, 2004).

Como assinalou Vergnaud (1997), a matemática enquanto ciência não existiria se não existissem os esquemas e algoritmos para colocá-los em ação, mas isto também não existiria se não existissem as palavras e teoremas para que pudessem ser compartilhados e o conhecimento textual debatido. De acordo com Vergnaud:

Se quisermos levar em consideração tais teoremas, devemos desenvolver uma estrutura de referência dos problemas aritméticos que não são, usualmente, tomados em consideração pelos matemáticos ou pelos autores dos livros-texto. Por exemplo, os matemáticos não estão interessados nos conceitos de tempo e dimensão, mas as crianças levam esses aspectos em consideração durante a resolução (citado por Vasconcelos, 2003, p. 62).

## **1.2 Os dois principais campos conceituais da aritmética: as estruturas aditivas e multiplicativas**

Em relação ao estudo das quatro operações aritméticas elementares, torna-se necessária uma metodologia que permite problematizá-las, dando aos estudantes oportunidade de

---

pensamento.

reconstrução das mesmas dentro de um contexto significativo.

Por meio de exemplos para cada uma das categorias apresentadas por Vergnaud, dentro de cada uma destas duas estruturas, procura-se evidenciar a conexão entre a teoria e a prática. Como disse Vergnaud (2005a), “o único meio de tornar viva uma teoria são os exemplos”.

### **1.2.1 Estrutura aditiva**

De acordo com Vergnaud (1990b), o campo conceitual das estruturas aditivas é um conjunto de situações cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações e o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações como tarefas matemáticas.

Dentro do conjunto de problemas de estrutura aditiva encontramos diferentes relações aditivas de acordo com a complexidade e incógnita dos problemas. Segundo Vergnaud:

Existem vários tipos de relações aditivas e, em consequência, vários tipos de adições e subtrações. A matemática considera, a justo título, a subtração e a adição como operações matemáticas estreitamente aparentadas. Por “problemas de tipo aditivo” entendemos aqueles cuja solução exige adições ou subtrações; da mesma forma que por “estruturas aditivas” entendemos as estruturas ou as relações em jogo que somente estão formadas de adições ou subtrações (1991, citado por Huete & Bravo, 2006, p. 142).

Para Vergnaud, uma mesma expressão numérica pode ser indicada para a solução de problemas de adição e subtração de diferentes estruturas. Diferencia cálculos numéricos e cálculos relacionais, o primeiro ocorrendo pela mobilização e resolução de um algoritmo, sem haver necessariamente conexão com aspectos semânticos e estruturais de uma situação problema, e por isso não havendo necessariamente relações implícitas no cálculo; o segundo envolve a consideração da atividade matemática no contexto de uma situação-problema, neste caso, uma mesma expressão proposta pode trazer relações de diferentes naturezas, dependendo da estrutura do problema apresentado (Pessoa, 2002).

Ainda, o cálculo relacional envolve as operações de pensamento necessárias para manipular as relações envolvidas no problema, não sendo necessariamente explícitas pelas

crianças, mas pode-se levantar hipóteses por meio de suas ações. O cálculo relacional, quando válido, pode ser expresso em forma de teoremas e, quando não válidos em forma de falsas inferências. Os teoremas são chamados por Vergnaud de “teoremas em ação”. (Vasconcelos, 2003).

Vergnaud (1990b,1996,1997) concebe o campo das estruturas aditivas, formado por seis categorias ou relações de base da adição e subtração; contendo algumas delas subcategorias, a partir das quais é possível engendrar todos os problemas de adição e subtração.

- Categoria 1 – composição de duas medidas.

Dois medidas que se compõem para dar lugar a uma terceira medida. Neste caso, não ocorre aumento nem diminuição das quantidades envolvidas, apenas uma combinação entre elas.

Nesta categoria podem-se encontrar duas subcategorias. Exemplo de uma das subcategorias:

*Na classe da professora Ana há 29 alunos. Sei que 17 são meninas. Quantos são os meninos?*

- Categoria 2 – transformação (quantificada) de uma medida inicial em uma medida final.

Uma transformação opera sobre uma medida para dar lugar a uma terceira medida. Ocorre transformação no estado inicial de uma quantidade, modificando seu estado final. Esta categoria pode lidar de forma implícita com números relativos e oferece 6 subcategorias, segundo a incógnita do problema. Exemplo de uma das subcategorias:

*Renato coleciona figurinhas. Ele deu 5 para Pedro. Agora ele tem 12. Quantas figurinhas Renato tinha antes?*

- Categoria 3 – relação (quantificada) de comparação entre duas medidas.

Uma relação une duas medidas. Compara duas quantidades distintas, em uma situação.

Esta categoria também pode dar lugar a 6 subcategorias, dependendo da posição da incógnita. Exemplo de uma das subcategorias:

*Márcia tem 12 bombons. Ela tem 4 a mais que Tiago . Quantos bombons Tiago tem?*

- Categoria 4 – composição de duas transformações.

Duas transformações se compõem para dar lugar a uma transformação, ou seja, a partir de duas transformações dadas (T1 e T2), determina-se uma terceira (T3) composição das anteriores.

Esta categoria também pode dar lugar a números relativos e se subdivide em 3 subcategorias. Exemplo de uma das subcategorias:

*Moisés tinha 12 Reais. Ganhou 7 de seu pai e depois gastou 5. Quanto ele tem agora?*

- Categoria 5 – transformação de uma relação.

Trata de uma transformação entre duas relações concomitantes, para dar lugar a um estado relativo. Exemplo:

*Gabriela devia R\$ 15,00 a Patrícia. Ela pagou R\$7,00. Quanto ela ainda deve?*

- Categoria 6 – composição de duas relações.

Composição de dois relacionamentos estáticos onde dois estados relativos se compõem para dar lugar a um outro estado relativo. Exemplo:

*Paulo devia 14 bolinhas a Gabriel, mas Gabriel agora está devendo 8 bolinhas a Paulo. Quantas bolinhas Paulo ainda deve a Gabriel?*

Nos estudos de Vergnaud, a representação gráfica das idéias de estado e relações pode ser apresentada por meio de diagramas: *o quadrado representa um estado*, no qual é colocado o número associado ao que é conhecido. Quando um estado corresponde a uma pergunta dentro do problema coloca-se um *ponto de interrogação* dentro do quadrado.

*As relações, por sua vez, são representadas por círculos*, no seu interior é colocada uma informação numérica sobre a transformação a ser efetuada. O círculo é acompanhado de uma flecha que simboliza a ligação entre o estado inicial e o estado final quando se trata de transformações, e entre o estado referente e o referido quando se trata de comparações.

Exemplo envolvendo transformações: José tinha 8 bolinhas de gude. Ele jogou uma partida com Mário e ganhou 6. Quantas bolinhas ele tem agora?

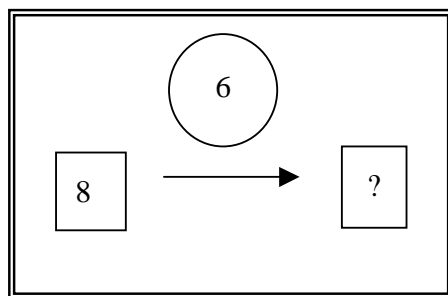


Figura 5. Exemplo de diagrama proposto por Vergnaud envolvendo transformação.

Márcia tem 8 anos a menos que sua irmã Lúcia. Sabendo que Márcia tem 5 anos. Qual a idade de sua irmã?

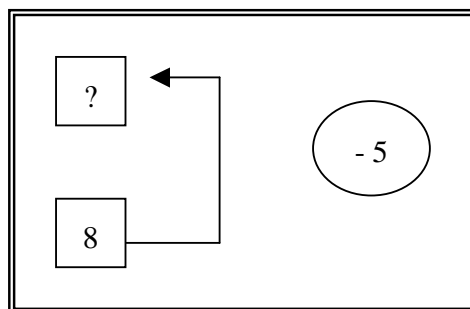


Figura 6. Exemplo de diagrama proposto por Vergnaud envolvendo comparação.

Sabe-se que, apesar da grande variedade de estruturas envolvendo problemas de adição e subtração estas distinções não se fazem habitualmente no ensino fundamental. Em geral, os estudos indicam que dificuldades apresentadas pelos alunos na solução de problemas de estruturas aditivas podem ser causadas pela falta de variedade de problemas ensinados na escola.

Em relação às estruturas aditivas, Magina (2005) assinalou que Vergnaud propôs estudar um campo conceitual ao invés de um conceito, que numa situação problema qualquer, nunca um conceito aparece isolada. No caso de problemas de estrutura aditiva, por exemplo, quando colocamos o problema “Ana tinha 5 blusas e no seu aniversário sua avó lhe deu 2 blusas. Quantas blusas Ana tem agora?” podemos identificar vários conceitos os quais a criança precisa ter adquirido para resolver o problema, os quais são: adição, temporalidade

(tinha = passado, tem agora = presente), contagem (depois do 5 vem o 6, depois o 7). Quando trabalhamos com números maiores, acima de 15 ou 20, a autora ressaltou que seria também necessário que a criança compreendesse a formação do sistema de numeração decimal.

Nesta mesma direção, Magina e Campos (2004) apontaram que a idéia de estrutura aditiva envolvem diferentes conceitos que fazem parte dessas estruturas, dentre os quais se destacam: o conceito de medidas, (por exemplo, a magnitude 5 é maior que 3, que é maior que 1), o conceito de adição, o conceito de subtração, o conceito de transformação de tempo (por exemplo, “ontem eu tinha... quanto tenho agora?”) e o conceito de número (por exemplo, número natural; inteiro, decimal).

Ainda, em relação às estruturas aditivas, de acordo com Vergnaud (2005<sup>a</sup>, p. 93) é falso crer que a adição e a subtração são competências matemáticas somente para as crianças pequenas. “Existem situações relativamente simples que vão ser compreendidas por uma extensão de um invariante operatório e existem outras que vão resistir por muito tempo.”

Como exemplo elucidativo a esta questão, Vergnaud (2005a, p. 94) propôs o seguinte problema para uma platéia adulta em uma de suas palestras. “O Sr. Smiths compra um cavalo por \$300 dólares e revende por \$400 dólares; ele compra novamente o mesmo cavalo por \$500 dólares e o revende por \$600. Qual foi o lucro ou perda que ele teve e de quanto?”

Devido as divergentes respostas, Vergnaud, além de apresentar a resposta correta (\$ 200 dólares de lucro) aos participantes, discorreu sobre as etapas desenvolvidas pelos sujeitos para solucionar o problema e levantou questões fundamentais relacionadas ao ensino e aprendizagem da matemática. Por que nos enganamos? Por que hesitamos em entender a solução? Segundo o autor, nos enganamos porque no esquema de raciocínio usual fazemos o tratamento seqüencial das informações. “Há um predomínio do raciocínio seqüencial utilizado na ciência, em física, em química, em biologia. (...). Se as coisas acontecessem sempre em ordem e se recebesse a informação, etapa por etapa, fica-se relativamente confortável” (Vergnaud, 2005a, p. 96).

### **1.2.2 Estrutura multiplicativa**

Para Vergnaud (1990b), o campo conceitual das estruturas multiplicativas abrange um

conjunto de situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões, e o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações.

Ainda, de acordo com o autor, é importante ressaltar que as estruturas multiplicativas são diferentes das estruturas aditivas, pois, as relações de base mais simples não são ternárias, mas sim quaternárias, porque os problemas mais simples de multiplicação e de divisão implicam na proporção simples de duas variáveis, uma em relação à outra.

A análise que Vergnaud fez dos problemas que envolvem a multiplicação e a divisão mostra que os problemas de estrutura multiplicativa situam-se em geral no contexto de duas grandes categorias: isomorfismo de medidas e produto de medidas.

A outra grande categoria considerada por Vergnaud, a proporção múltipla, é considerada uma categoria mais complexa e se refere a problemas de proporcionalidade em que intervêm ao menos três magnitudes, sendo estão problemas compostos, nos quais se torna necessário mais de uma operação para sua solução. (Huete & Bravo, 2006)

- *Isomorfismo de medidas*

Nos estudos apresentados por Vergnaud o isomorfismo de medida é a primeira grande forma de relação multiplicativa, sendo uma relação entre quatro quantidades; duas quantidades são medidas de um certo tipo, enquanto o restante são medidas de outro tipo.

Exemplo: “Tenho 3 bandejas de iogurte. Há 6 potinhos de iogurte em cada bandeja. Quantos iogurtes eu tenho?”.

Como mostra o esquema, esse problema envolve uma relação quaternária entre os elementos do problema (bandejas e iogurtes) pois:

1 bandeja → 6 iogurtes

3 bandejas → x iogurtes

Em relação a esta categoria Taxa e Fini (2001) colocaram que, em geral, este tipo de problema é muito utilizado pelos professores para introduzir e exercitar a multiplicação; lembrando que, em geral, estes problemas são comumente conhecidos como de multiplicação tipo “adições sucessivas”. Inspirados nos problemas apresentados por Vergnaud, as autoras apresentaram o seguinte esquema:



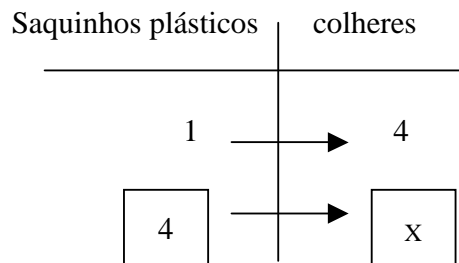


Figura 7. Esquema estrutura multiplicativa do tipo isomorfismo de medida.

Ainda, segundo as autoras, mesmo considerando a estratégia metodológica da adição sucessiva — quatro saquinhos com quatro colheres em cada são: quatro colheres mais quatro colheres mais quatro colheres mais quatro colheres — a criança pode apresentar dificuldade significativa na busca da incógnita do problema, precisando construir uma representação interna dos dados para depois aplicar fórmulas matemáticas. Apontaram que, na maioria das vezes, registros de adições sucessivas, como:  $4 + 4 + 4 + 4 = 16$  não têm significação para as crianças, e tampouco são equivalentes ao algoritmo da multiplicação  $4 \times 4 = 16$ , como ensinam os professores (Taxa & Fini, 2001, p.180).

- *Produto de medidas*

Segundo Vergnaud, esse tipo de relação consiste em uma relação ternária entre três quantidades, das quais uma é o produto das outras duas, tanto no plano numérico quanto no plano dimensional. Exemplos: (citado por Huete & Bravo, 2006, p. 147).

1) “Três rapazes e 4 moças querem dançar. Cada rapaz quer dançar com cada uma das moças e cada moça com cada um dos rapazes. Quantos pares possíveis há?”.

2) “Quer se fabricar bandeirinhas com tecido de duas cores diferentes (vermelho e azul). Se as bandeirinhas devem ter três franjas, quantas bandeirinhas diferentes podem ser fabricadas?”.

Nunes, Campos, Magina e Bryant (2002) apontaram que, em geral, as situações envolvendo produto de medidas aparecem como significativamente mais difíceis do que as outras situações multiplicativas. Como por exemplo:

“Júlia tem três camisetas (uma branca, uma xadrez e uma listrada) e dois shorts (um

preto e um branco) que ela usa para fazer caminhada. Se ela combinar, por exemplo, a camiseta xadrez com o short branco, faz um conjunto. Se ela combinar a camiseta xadrez com o short preto, faz outro conjunto diferente. Se ela combinar em cada dia uma das três camisetas com um dos dois shorts, quantos conjuntos diferentes ela pode fazer.”<sup>12</sup>

O exemplo mostra que, no caso, os conjuntos são um produto da combinação de um short com uma camiseta. Os autores chamaram a atenção para a estrutura do problema. “Observe-se que esses problemas envolvem uma correspondência um-a-muitos, como os outros problemas de multiplicação, mas essa correspondência está implícita, e deve ser construída pelo próprio aluno” (Nunes et al., 2002, p.181).

Ainda, segundo os autores, as investigações mostraram que é muito difícil explicar a solução de problemas de produto de medidas aos alunos de forma verbal, contudo, os alunos não acham tão difícil se este tipo de problema for apresentado visualmente, em forma de diagrama ou tabela.

Pertinente às propriedades comutativa e distributiva da multiplicação, Vergnaud (1988) assinalou que a propriedade comutativa da multiplicação possibilita a inversão do multiplicador e multiplicando. Entretanto, é preciso considerar que as crianças tendem a abstrair o que representam os números. Já, a propriedade distributiva passa a ser necessária no momento em que se introduzem dois dígitos no multiplicador, a dificuldade da criança está na decomposição aditiva do multiplicador, e não na propriedade distributiva em si. Como por exemplo, ao multiplicar 43 vezes 12, a criança apresenta dificuldade em entender que o 12 é igual a 10 mais 2.

Em relação à estrutura multiplicativa, em problemas de divisão, Vergnaud distingue dois tipos de divisão: a por partição e a por cota.

Na divisão por partição desconhece-se o valor de cada parte e conhece-se o valor total e o número de partes. Nesse caso, o valor de cada parte é encontrado dividindo-se o valor total pelo número de partes. Segundo Moro (2005a, p. 218), “na divisão por partição, da totalidade (dividendo), descobrir a extensão da parte (quociente) conforme um escalar (o divisor), do que resulta uma medida como a da totalidade inicial sobre o qual o escalar opera.” Exemplo:

---

<sup>12</sup> Problema apresentado por Nunes e cols. (2002, p. 181)

*Para fazer quatro bolos, são necessários vinte ovos. Se todos os bolos têm a mesma receita, quantos ovos são necessários para fazer somente um bolo?*

Enquanto que, na divisão por cotas desconhece-se o número de partes e conhece-se o valor total e o valor de cada parte. Nesse caso, o número de partes é encontrado dividindo-se o valor total pelo valor de cada parte. Exemplo:

*Quantos bolos podem ser feitos com vinte ovos, se cada bolo leva cinco ovos?*

Torna-se importante salientar que, assim como as estruturas aditivas, as estruturas multiplicativas envolvem um aprendizado em longo prazo, sendo necessário que os estudantes experimentem uma grande quantidade de situações diferentes. Assim, os conteúdos desse campo conceitual se estendem pelos programas que vão desde o início do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. (Filho, 2002. Relatório final do SPAECE).

### **1.3 A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e a prática educativa**

A teoria dos campos conceituais não é específica da matemática. Como assinalou Moreira (2004), embora Vergnaud esteja particularmente interessado nos campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas, a teoria dos campos conceituais não é específica desses campos, a mesma se aplica ao ensino de ciências, português, biologia, geografia, dentre outras.

Em relação à teoria dos campos conceituais e ao ensino e aprendizagem da matemática, Vergnaud (1997, p. 9) apontou alguns aspectos centrais que deveriam ser objetos de análise e pesquisa:

- Quais categorias de situações oferecem ocasiões para as crianças e os estudantes formarem os conceitos matemáticos, na escola e fora dela? Como nós podemos analisar a complexa hierarquia dessas situações e clarificá-las?
- Quais procedimentos são usados pelos estudantes frente a estas situações? Quais foram as formas bem sucedidas e quais não foram? Sob quais condições? Quais os conceitos e teoremas implícitos de que cada procedimento depende?
- Quais procedimentos são ensinados? Quais deles se desenvolvem preferencialmente de forma espontânea? O que os professores, pais e “pares”

(colegas) fazem para ajudar os alunos?

- Quais palavras, sentenças e expressões simbólicas são usadas pelos sujeitos para comunicar e comentar o que eles fazem ou o que eles estão entendendo, para acompanhar, gerar e controlar suas operações, pensamentos e procedimentos, e para representar os objetos e as relações envolvidas?
- Que tipos de situações, nunca encontradas foras da escola, deveriam ser introduzidas na sala de aula para tornar significativos os conceitos matemáticos?

A teoria dos campos conceituais de Vergnaud fornece elementos que permitem pensar a construção dos conceitos matemáticos e a problematização das operações aritméticas dentro de uma análise das concepções dos estudantes sobre determinado assunto, situações de aprendizagem, estratégias de pensamento, função do professor e colegas dentro de uma atividade mediada.

Neste sentido, retomando a teoria de mediação de Vigotski, Vergnaud (2004, p. 104) salientou que “o primeiro ato de mediação do professor é, efetivamente, a escolha da situação a propor aos alunos. Mas este ato é seguido de vários outros atos de mediação”, dentre eles: ter esclarecimento dos objetivos gerais e específicos da tarefa, assumir parte das ações que o aluno teria dificuldade em realizar sozinho, ajudar na extração das informações pertinentes e na explicitação eventual, ajudar às inferências.

Segundo Vergnaud (1998) a teoria dos campos conceituais e a definição de um conceito possibilitam ainda ao professor e ao pesquisador a análise e compreensão dos seguintes aspectos:

- Os conceitos matemáticos estão enraizados nas situações e problemas.
- Professores e pesquisadores precisam analisar e classificar as situações e procedimentos que os estudantes usam ao lidar com as situações problemas.
- As idéias e competências dos estudantes se desenvolvem ao longo de um período de tempo. Ensinar estudantes de uma determinada série requer que tenhamos a idéia dos passos que eles podem ou não podem dar e os próximos passos decisivos que nós gostaríamos que eles alcançassem.
- Precisamos dar uma atenção especial à distinção entre situações invariantes e símbolos. Os símbolos (significantes) não se referem diretamente à realidade, mas aos

componentes cognitivos (significado) que estão por trás dos procedimentos comportamentais dos estudantes, como, por exemplo, as categorias, objetos, propriedades, relações e teoremas-em-ação, aos os quais Vergnaud denominou invariantes.

Ainda, de acordo com Vergnaud (1990b), o funcionamento cognitivo do sujeito em situação depende dos seus conhecimentos, implícitos e explícitos. Portanto, é necessário o professor conceder uma grande atenção ao desenvolvimento cognitivo, as suas continuidades, rupturas, a complexidade relativa das classes de problemas, procedimentos, representações simbólicas, a análise dos principais erros e das principais descobertas.

Para Vergnaud (2004) parte do desafio do professor é organizar situações didáticas, traçando tanto objetivos de curto prazo, que permitem ao estudante desenvolver competências e concepções de uso imediato, quanto objetivo de longo prazo, que lhes oferece uma base para os conceitos que serão essenciais mais tarde. Segundo o autor, ensinar para crianças pressupõe um claro entendimento de suas atuais competências e concepções, de suas competências quando elas eram mais jovens e das competências que elas precisarão ter quando elas forem mais velhas.

## **CAPÍTULO III**

### **A MATEMÁTICA E A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

Sabe-se que, muitos estudos na área da Psicologia da Educação Matemática, bem como os PCN, apontam que é por meio de situações de solução de problemas que os conceitos matemáticos se desenvolvem e tornam-se significativos. Entretanto, apesar dos estudos na área e das recomendações dos PCN, o processo de ensino e aprendizagem da matemática continua a enfrentar uma série de dificuldades.

A análise da literatura nos apresenta dados preocupantes em relação ao desempenho dos alunos em matemática. Resultados, como por exemplo, os dados avaliativos obtidos pelo SAEB (MEC/INEP, 2004) e SPAECE (Filho, 2002), demonstraram que os alunos possuem habilidades matemáticas elementares para quem está concluindo a 1ª etapa do ensino fundamental. Alunos, ao final da 4ª série, apresentam apenas capacidade de solucionar problemas de subtração e adição, situações cotidianas e reconhecimento de figuras geométricas simples. As pesquisas revelaram ainda um baixo desempenho dos alunos diante de situações-problema envolvendo as quatro operações básicas, estando estas dificuldades relacionadas tanto ao raciocínio, quanto ao domínio do procedimento.

Em relação à matemática escolar, é preciso ainda considerar que a temática de solução de problemas na escola envolve vários aspectos — lingüísticos, psicológicos, conceituais e sócio-culturais do indivíduo — os quais devem ser considerados nas propostas apresentadas aos alunos.

A solução de problemas deveria ser vista como uma prática ou estratégia que incentiva

o aluno a busca da solução, entretanto, como bem salientou Vergnaud (1997), uma determinada situação pode ser um problema para uma pessoa e não para outra, face ao nível de desenvolvimento de cada uma, dos aspectos sócio-culturais envolvidos, da experiência e do conhecimento relacionados aquela questão.

De maneira geral, pesquisas realizadas no âmbito escolar (Guimarães, 2005; Maldaner e Isaia, 2001; Oliveira e Tourinho, 2001; Pessoa e Da Rocha Falcão, 1999; Taxa, 2001, 1996 e Vasconcelos, 2003), apresentaram a solução de problemas como norteadora das atividades escolares no campo da matemática, sobretudo em relação à construção conceitual referente ao ensino e aprendizagem das operações aritméticas nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Verschaffel e De Corte (1997) salientaram que o estudo dos conceitos matemáticos por meio de solução de problemas desempenha uma importante função: os problemas funcionam como um veículo para desenvolvimento das capacidades e habilidades matemáticas dos estudantes.

Em relação às quatro operações fundamentais da matemática — adição, subtração, multiplicação e divisão — apesar das várias recomendações de estudos na área, o que a prática educativa ainda nos mostra é que há no ensino certas concepções acerca da funcionalidade, ou aplicabilidade das operações aritméticas, sendo comum, em situação de solução de problemas os alunos perguntarem qual a operação aritmética deve ser utilizada para solucionar o problema — apesar de muitos dominarem os algoritmos do cálculo. Essa situação mostra a necessidade de um ensino que vá além das definições e regras de cálculo, se o objetivo for o uso e o emprego correto das operações aritméticas nas situações de solução de problemas matemáticos.

Assim sendo, a matemática, nas séries iniciais do Ensino Fundamental, nos coloca frente a grandes desafios, principalmente, em relação à construção de conceitos matemáticos básicos, dentre eles a construção do número, o que envolve também a construção dos conceitos das quatro operações aritméticas fundamentais. Todavia, como assinalaram Maldaner e Isaia (2001, p.105) a história da matemática evidencia que na origem da matemática encontra-se um problema a ser resolvido. Assim, parece claro que o caminho a ser percorrido pela Educação Matemática tenha como ponto de partida o problema. Entretanto, como salientaram os autores, é preciso considerar que a solução também demanda os recursos

do cálculo, “nos levando a pensar na necessidade de construção dos conceitos num constante ir e vir entre a contextualização e a descontextualização”.

Ainda, segundo Maldaner e Isaia (2001), a contextualização pode dar-se por meio de experiências concretas do aluno no seu respectivo contexto social ou por meio da referência e (ou) da reconstrução, na escola, de experiências significativas que já fazem parte do mundo cultural das crianças, tais como: medição, situações de compra e venda, jogos, etc.

De acordo com Nunes et al. (2005), a visão sociocultural da inteligência propõe que a escola participe do processo de desenvolvimento da inteligência da criança ao lhe oferecer acesso a instrumentos e objetos simbólicos, como os sistemas de numeração, os quais ampliam a capacidade de registrar quantidades, lembrar e solucionar problemas.

Exemplificando o uso de símbolos pelas crianças pequenas, Nunes et al. (2005) mostraram que na contagem de bombons, por exemplo, a criança os representa por intermédio de símbolos – tracinhos, blocos, dedos – Além de usar símbolo para representar os bombons, a criança também utiliza um instrumento simbólico, o sistema de numeração para quantificar a sua resposta.

A expressão “*solução de problemas*”, comporta várias situações. Nas várias profissões, na vida cotidiana, na política e em diferentes disciplinas do currículo escolar contém muitos significados distintos. Nos dias de hoje, é fácil comprovar a diversidade de situações onde a expressão “*solução de problemas*” se apresenta, por intermédio dos grandes sites de busca da “internet”.

Relacionado ao contexto escolar, o estudo PISA 2003<sup>13</sup> (GAVE, 2004) colocou que a maior parte das pessoas envolvidas no estudo da solução de problemas, seja em contexto de investigação ou baseado na prática, independente da definição adotada, está de acordo em relação ao fato de que, na descrição da solução de problemas por parte dos estudantes, o enfoque reside na descrição dos atos cognitivos que os estudantes desenvolvem enquanto apropriam-se, resolvem e comunicam a solução. Nesse sentido, o estudo PISA de 2003 adota a

---

<sup>13</sup> PISA (Programme for International Student Assessment), GAVE (Gabinete da Avaliação Educacional do Ministério da Educação. Publicado originalmente em inglês e francês pela OCDE (Organization for Economic Co-operation and Development). A qualidade da tradução portuguesa e sua fidelidade ao texto original é da responsabilidade do Ministério da Educação/ GAVE.



seguinte definição da solução de problemas:

A resolução de problemas é a capacidade de um indivíduo usar processos cognitivos para confrontar e resolver situações reais e interdisciplinares, nas quais o caminho para a solução não é imediatamente óbvio e em que os domínios de literacia ou áreas curriculares passíveis de aplicação não se inserem num único domínio, seja o da matemática, das ciências ou da leitura. (GAVE, 2004, p. 10).

Embora a “solução de problemas” em matemática seja mais específica, ela também comporta diferentes interpretações. Brito (2006, p.19), conceituou solução de problemas como:

A solução de problemas refere-se a um processo que se inicia quando o sujeito se defronta com uma determinada situação e necessita buscar alternativas para atingir uma meta; nesses casos, o sujeito se encontra frente a uma situação-problema e, a partir daí desenvolve as etapas para atingir a solução. A solução de problemas é, portanto, geradora de um processo por intermédio do qual o aprendiz vai combinar, na estrutura cognitiva, os conceitos, princípios, procedimentos, técnicas, habilidades e conhecimentos previamente adquiridos que são necessários para encontrar a solução com uma nova situação que demanda uma re-organização conceitual cognitiva. Trata-se, portanto, de uma re-organização dos elementos já presentes na estrutura cognitiva, combinados com os novos elementos trazidos pela nova situação.

Desta forma, como também apontou o PISA 2003 (Gave, 2004) o ato de “resolver” problemas é a amálgama de vários processos cognitivos diferentes, relacionadas às competências de raciocínio do estudante, no sentido de atingir certo objetivo. Sendo que, “A competência para solucionar problemas pode ser descritas em termos das capacidades que permitem aos estudantes criarem e monitorarem um certo número de processos no âmbito de uma determinada gama de tarefas e situações” (Gave, 2004, p. 14).

Para Diniz (2001a), enfrentar e solucionar uma situação problema exige do estudante não apenas a compreensão do enunciado, a aplicação das técnicas, as formas adequadas e a obtenção da resposta certa, mas, além disso, demanda uma atitude de “*investigação científica*” em relação àquilo que está pronto.

De uma maneira geral, há um consenso entre pesquisadores e educadores de que a

solução de problemas é um processo complexo. Neste sentido, várias pesquisas foram desenvolvidas propondo a solução dos problemas em diversas etapas.

Polya (1978) apresentou um guia de instruções, que consta de quatro passos, para ajudar o estudante na solução de problemas, a saber: 1<sup>o</sup> compreensão do problema (procurar entender o enunciado do problema, identificar a incógnita, determinar os fatos relevantes), 2<sup>o</sup> estabelecimento de um plano (estabelecer um plano, buscar na memória solução de problemas correlatos), 3<sup>o</sup> execução do plano (colocar o plano em prática, verificar os passos), 4<sup>o</sup> retrospecto (refletir sobre a solução. A solução faz sentido? É possível chegar à solução por um caminho diferente?).

Além das etapas sugeridas para a solução de problemas, o autor enfatizou que a heurística moderna procura compreender o processo solucionador de problemas, particularmente, as operações mentais típicas desse processo. Pontuou que “a experiência na resolução de problemas e a experiência na observação dessa atividade por parte de outros devem constituir a base em que se assenta a Heurística” (Polya, 1978, p. 87).

Torna-se importante considerar que, as etapas de solução de problemas propostas por Polya não se constituem em uma “receita para ensinar” como solucionar todo e qualquer problema matemático. Entretanto, podem ajudar bastante o estudante a solucionar problemas no sentido de organizar as idéias do mesmo. De maneira geral, quando temos idéias organizadas, a solução de um problema se torna uma tarefa comumente mais simples em comparação com uma situação onde as idéias não estão organizadas.

Sabe-se que a solução de problemas é um aspecto central das reorganizações curriculares, entretanto, apesar de todos os avanços proporcionados pelas pesquisas, o ensino da matemática por meio da solução de problemas, comumente, ainda é tratado na escola como um conjunto de regras de fixação ou aplicação das operações aritméticas estudadas. Frequentemente, aos alunos basta retirar os números do texto e aplicar o procedimento algoritmo de maneira correta.

Em relação ao ensino e ao currículo, não só da matemática, encontramos na literatura uma análise histórica das muitas transformações ocorridas ao longo das últimas décadas, sendo que a tendência brasileira recente está preocupada com o indivíduo em sua totalidade, inserido em um contexto social. Com esta visão, surgiu a proposta dos Parâmetros

Curriculares Nacionais (PCN).

Para a matemática das séries iniciais do Ensino Fundamental, os PCN discutem a matemática a partir de quatro grandes blocos temáticos: os números e as operações; espaço e forma; grandezas e medidas; tratamento da informação, enfatizando a vantagem e a necessidade de se trabalhar esses grandes blocos de forma integrada.

Segundo Magina (2005) um aspecto importante a considerar sobre os PCN diz respeito a sua fundamentação teórica. Esta encontra na teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud, um de seus principais apoios.

Diferentes pesquisadores, dentre eles Starepravo e Moro (2005), Vasconcelos (2003), Golbert (2002) e Smole e Diniz (2001), apontaram que um dos grandes problemas, envolvendo a solução de problemas nas séries iniciais do ensino fundamental, está relacionado ao grande número de alunos que não conseguem identificar em situação de solução de problemas a escolha da operação adequada para resolvê-los. Nesta direção, Vergnaud assinalou que:

A competência que consiste em encontrar, sem errar, qual a operação (adição, subtração, multiplicação, divisão), deve-se aplicar a determinados dados e em que ordem, para resolver qualquer problema de aritmética dita elementar, é uma competência heterogênea que se analisa por meio de um grande número de competências distintas cuja construção “espontânea” ou a apropriação pelo aluno requer um período de tempo longo (1985, citado por Guimarães 2005).

O ensino da matemática por meio da solução de problemas deve ser visto não só como um propósito para a aprendizagem de conceitos matemáticos, mas também como meio de dar significado aquilo que os alunos estão fazendo, como um meio de saber usar a matemática em diferentes situações. Dentro desse contexto se inserem diferentes tipos de problemas: os rotineiros e os não rotineiros; estes últimos geralmente apresentados aos alunos de forma desafiadora, estimulando a elaboração de diferentes estratégias para a solução.

## 1. Os problemas rotineiros e não rotineiros na matemática escolar

A abordagem neste estudo de problemas não rotineiros<sup>14</sup> parte inicialmente da prática pedagógica vivenciada pela pesquisadora (propositora desta pesquisa), a qual sugere que este tipo de problema, em geral, motiva os alunos a encontrar a solução, possibilita maior uso dos recursos de comunicação, estimula a interação entre os alunos, permite o desenvolvimento de diferentes estratégias, proporciona o desencadeamento de idéias, o desenvolvimento e a formação dos conceitos matemáticos.

No trabalho com problemas não rotineiros, ao que tudo indica, os alunos também têm a oportunidade de contato com diferentes tipos de textos, proporcionando, conseqüentemente, o desenvolvendo de sua capacidade de leitura e análise crítica, pois o aluno precisa planejar o que e como fazer, gerando também uma atitude não passiva frente à solução dos problemas.

Em relação ao ensino de forma mecânica, traçando uma análise comparativa entre receitas culinárias e receitas para ensinar, Polya (1978) fez a seguinte analogia:

O ensino que se reduz ao desempenho mecânico de operações matemáticas rotineiras fica bem abaixo do nível do livro de cozinha, pois as receitas culinárias sempre deixam alguma coisa à imaginação e ao discernimento do cozinheiro, mas as receitas matemáticas não deixam nada disso a ninguém (p. 124).

Polya (1978) pontuou que, de modo geral, um problema rotineiro segue passo a passo um exemplo muito batido. Assim sendo, o aluno só precisa ter um pouco de cuidado e de paciência para seguir uma fórmula pré-estabelecida, sem ter a oportunidade de usar o seu discernimento e suas faculdades inventivas. O autor salientou que no ensino da Matemática, os

---

<sup>14</sup> A análise da literatura na área apresenta as expressões, “problemas não rotineiros” “problemas não convencionais”, “problemas-processo” e “problemas heurísticos”, para a mesma classe de problemas; salvaguardando as especificidades de cada uma das expressões analisadas por diferentes autores. Neste estudo, os problemas serão classificados como rotineiros e não rotineiros, salientando ainda que os problemas não rotineiros podem fazer parte tanto do cotidiano, do mundo “real”, ou trabalhar com a esfera lúdica, em um mundo fictício ou imaginário que tanto envolve, motiva e encanta as crianças.

problemas rotineiros podem fazer-se necessários. Entretanto, deixar que os alunos nada mais façam é indesculpável.

Da mesma forma, Brito (2000) assinalou que, geralmente, quando as crianças aprendem a solucionar “problemas tipo”, memorizam os passos necessários para a obtenção da resposta, reconhecendo apenas os problemas muito semelhantes ao modelo aprendido, encontrando grande dificuldade para solucionar problemas diferentes dos ensinados na escola, particularmente os problemas não rotineiros.

Sobre a necessidade de se oferecer uma variedade de problemas aos estudantes e o fato de a escola, muitas vezes, trabalhar somente com problemas rotineiros Brito (2000) ressaltou:

O fato de se trabalhar apenas com problemas rotineiros pode produzir alterações nas características da percepção mental dos alunos a respeito do problema matemático. Muitos deles passam a perceber passam a perceber o problema matemático apenas como uma coleção de fatos sem relação, ao invés de uma complexa cadeia de quantidades inter-relacionadas (p. 95).

A análise da literatura, nacional e internacional, aponta a necessidade de se trabalhar com diferentes tipos de problemas com os estudantes. Desta forma, seria interessante o professor conhecer as imensas possibilidades de trabalho com os diferentes tipos de problemas: rotineiros e não rotineiros.

Diversos pesquisadores, dentre eles, Malone et al. (1997), Smole e Diniz (2001), Lopes (2005) e Rabelo (2002) definem problemas não rotineiros como aqueles que, geralmente, permitem uma ou mais respostas de acordo com sua apresentação. Via de regra, não possuem só uma linha de raciocínio. Em geral, este tipo de problema exige que o aluno faça uma leitura mais cuidadosa do texto, selecione informações, decida quais são essenciais para a solução e utilize um pensamento mais elaborado para solucioná-los.

De acordo com Diniz (2001a, 2001b) e Lopes (2005) algumas características básicas de um problema rotineiro são: texto na forma de frases, diagramas ou parágrafos curtos; os problemas vêm sempre após a apresentação de um determinado conteúdo; todos os dados que o aluno necessita se encontram no texto e, em geral, na ordem que devem ser utilizados; a solução numericamente correta é um ponto fundamental, sempre existe e é única.

Malone et al. (1997), ao realizar uma pesquisa para medir a habilidade de alunos na solução de problemas não rotineiros, colocaram a importância de desenvolver a habilidade para resolver este tipo de problema em todos os níveis do processo de educação — da educação infantil à universidade.

Em geral, os problemas não rotineiros são caracterizados no sentido em que, ao tentar solucionar este tipo de problema, o aluno não saiba a resposta nem conheça um procedimento previamente estabelecido (rotineiro) para achá-la. Tais problemas são diferentes de exercícios ou problemas transformados em rotina pelo contexto em que ocorrem; por exemplo, as instruções que antecedem muitos problemas de textos matemáticos escolares os tornam rotineiros. (Malone et al., 1997)

A seguir, um exemplo de um problema não rotineiro para estudantes das séries iniciais do Ensino Fundamental:<sup>15</sup>

Albagali é um paquiderme. Ele usa 17 sabonetes e 22 esponjas para tomar banho. Albagali toma banho de 15 em 15 dias. Quantos sabonetes ele gasta em 3 meses?

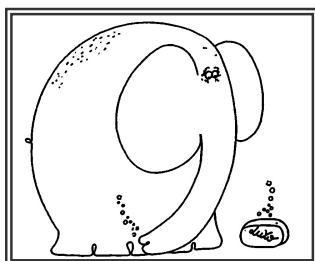


Figura 8. Figura ilustrativa de problema não-rotineiro

Qual das contas abaixo leva a solução do problema?

$17 \times 6$	$17 + 6$	$17 \times 2$	$17 + 22 = 39$ $39 \times 3$
---------------	----------	---------------	---------------------------------

<sup>15</sup> Exemplo apresentado em Gwinner, P. "Problemas": enigmas matemáticos. São Paulo: Vozes, 1990, citado por, Smole & Diniz (2001, p. 76).

LeBlanc, Proudfit e Putt (1997)<sup>16</sup> caracteriza dois tipos de problemas matemáticos: o problema modelo dos livros didáticos e os problemas-processo. Para os autores uma característica do problema-modelo dos livros didáticos é que pode ser resolvido por meio da aplicação direta de um ou mais algoritmos previamente aprendidos e a situação-problema normalmente é apresentada por meio de ilustrações, frases, sentenças ou parágrafos curtos ou uma combinação desses expedientes. Neste tipo de problema, a tarefa básica é identificar as operações ou algoritmos adequados à resolução do problema. Os problemas-modelo permitem que as crianças trabalhem com as operações em um contexto concreto ou do mundo real, cujos objetivos incluem: a recordação de fatos básicos, reforço de habilidades com os algoritmos das operações fundamentais e fortalecimento da relação entre as operações e suas aplicações em situações do mundo real.

Por outro lado, ainda segundo LeBlanc e cols. (1997) o problema-processo é outro tipo de problema que começa a aparecer nos livros didáticos.<sup>17</sup> Esse tipo de problema enfatiza mais o processo para se obter a solução do que a própria solução. Segundo os autores, os problemas-processo são usados para incentivar o desenvolvimento e a prática de estratégias de solução de problemas. Além disso, fornecem aos alunos uma oportunidade para inventar métodos criativos de solução, para compartilhar seus métodos com os colegas e para criar confiança na solução de problemas. Os problemas-processo, também propiciam aos alunos a oportunidade de sentir prazer de solucionar problemas matemáticos.

Segundo Domingues (1997), resolver problemas, dependendo de vários fatores, tanto pode ser uma atividade estimulante e enriquecedora como tediosa e improdutiva. Para o autor, a solução de um problema inteligente e “não rotineiro” — caracterizado como aquele que não

---

<sup>16</sup> Para o mesmo tipo de problema o que é caracterizado por LeBlanc, Proudfit e Putt(1997) como problemas-modelo de livros didáticos e problemas-processo, como já apontado, diversos autores denominam problema rotineiro e problema não rotineiro.

<sup>17</sup> Este estudo não teve como objetivo fazer uma análise dos materiais e livros didáticos direcionados as séries iniciais do Ensino Fundamental. O livro didático pode ser um recurso auxiliar de ensino muito útil, desde que o professor faça uma análise criteriosa do mesmo e compreenda a importância de oferecer aos alunos diferentes tipos de problemas, os quais permitam a interação do aprendiz com o problema a ser solucionado e uma reflexão sobre as etapas de solução, elaboração e execução da resposta.

depende apenas da aplicação mecânica de um ou dois algoritmos — além de exigir cuidados com alguns detalhes, pressupõe um plano cuja execução pode envolver vários pré-requisitos e algumas estratégias ou heurísticas. Ainda, segundo Domingues, a solução de problemas inteligentes e não rotineiros não é uma tarefa que possa ser improvisada, e que, muito pelo contrário, o professor precisa estar muito bem preparado para esse desafio.

Schroeder e Frank (1990) fizeram uma análise dos problemas não rotineiros como meio para desenvolver a linguagem e a competência matemática. De acordo com os autores, um dos objetivos da aprendizagem matemática é transformar um determinado problema não rotineiro em problema rotineiro. A aprendizagem da matemática por este caminho pode ser vista como um movimento do concreto (um problema do mundo real serve como uma instância da conceitualização e da técnica matemática) para o abstrato (uma simbólica representação de uma classe de problemas e técnicas para operar com os símbolos). Salientaram que em um problema não rotineiro além da interpretação seu enunciado também demanda um processo complexo, como o planejamento, seleção da estratégia, identificar os sub-objetivos, levantar hipóteses e verificar a solução encontrada. Para problemas não rotineiros, um diferente tipo de modelo é requerido.

Para Miguel (2005) a preocupação em organizar o currículo de forma a envolver mais que aspectos metodológicos, incluindo uma postura frente ao que ensinar e o que significa “aprender a aprender”, conduzem à noção metodológica da solução de problemas. O autor destaca a noção de situação-problema e amplia este conceito. Traz a tona, além da discussão sobre “*problemas convencionais*”, o tratamento dos problemas que não têm solução evidente, os “*problemas não-convencionais*”, os quais exigem que o sujeito combine os seus conhecimentos, planejando, elaborando estratégias de compreensão do problema, testando soluções, avaliando o raciocínio posto em prática e os resultados encontrados.

Carvalho (2005b) apresenta uma série de sugestões de situações problemas que podem ser propostos aos alunos. Dentre elas: completar enunciados a partir de uma resposta, construir enunciados a partir de uma operação, problemas em tiras para organização, problemas com insuficiência de dados, problemas com excesso de dados, problemas com pergunta de negação, problema de lógica, problemas envolvendo gráficos, problemas combinatórios, dentre muitas outras sugestões possíveis.



Para fornecer variedade e para ajudar as crianças a ganhar mais “perspicácia” no processo de solução de problemas, Davis e Mckillip (1997) também sugeriram algumas atividades onde os estudantes participam da formulação dos problemas, tais como: problemas sem números, problemas em perguntas e os problemas das próprias crianças.

Oferecer aos alunos o contato com diferentes tipos de problemas é permitir que ele use seus conhecimentos matemáticos, sua criatividade, relacione informações, lance mão de diferentes estratégias de solução e ainda promover o avanço na sua competência lingüística e na construção de conceitos matemáticos.

## **2. Apresentação de pesquisas na área da interação social e solução de problemas**

Com a finalidade de ampliar a compreensão da interação social no ambiente escolar, vista sob a ótica da teoria sócio-histórica, o primeiro momento desta exposição, apresenta algumas pesquisas fundamentadas neste referencial. Num segundo momento, apresenta-se um conjunto de pesquisas abrangendo um ou mais dos aspectos relacionados ao objeto deste estudo, a saber: a solução de problemas aritméticos de estrutura aditiva e multiplicativa e a interação social no contexto de solução de problemas.

Sabe-se que, por meio da análise dos principais conceitos desenvolvidos por Vigotski, dentre eles, a mediação e o desenvolvimento das funções mentais superiores, novas perspectivas se abriram para o estudo da atividade de forma interativa, tanto no plano psicológico como no pedagógico.

Neste sentido, Moysés (2004) apontou que no campo da educação matemática a tendência para se aproximar de um enfoque sociocultural surgiu por ocasião do Terceiro Congresso Internacional de Educação Matemática, na Alemanha, em 1976 e que no Brasil, há cerca de 20 anos, há um crescente movimento ao redor deste enfoque e que os estudos dos aspectos socioculturais acabam por criar uma nova área de pesquisa na Educação Matemática: a etnomatemática.

Diversas pesquisas, em diferentes disciplinas do currículo escolar, como por exemplo as de Gaspar e Monteiro (2005), Moysés (2004), Steele (2001), Freitas (2002) e Canôas (1997), fundamentadas no referencial sócio-histórico da psicologia, realçaram a importante

função do professor enquanto mediador e aquele que ao conhecer a zona de desenvolvimento real de seu aluno (o que ele já sabe e consegue realizar sozinho), planeja e propicia momentos para o avanço no processo de aprendizado e desenvolvimento, aos quais irão agir e interferir na zona de desenvolvimento proximal.

Gaspar e Monteiro (2005) realizaram um estudo de caso com atividades de demonstração experimental de um conceito de eletricidade pelo professor; entendendo o estudo como vinculado às características específicas desse procedimento, ou seja, a interação social entre professores e alunos desencadeada pela demonstração experimental e a importância da mediação simbólica neste contexto. Os autores apresentaram algumas idéias da teoria sócio-histórica que acreditaram oferecer indicações válidas para este tipo de atividade. Destacaram a importância da escola na formação dos conceitos científicos e a interação social como condição necessária à aprendizagem, entretanto não suficiente. Os autores ressaltaram que a atividade de demonstração experimental em sala de aula, particularmente relacionada aos conteúdos de Física, apesar de fundamentar-se em conceitos científicos, formais e abstratos, têm por singularidade própria a ênfase no que é observável diretamente, inferindo que este tipo de atividade acrescenta no estudante elementos da realidade e da experiência pessoal, preenchendo uma lacuna cognitiva característica dos conceitos científicos, ao mesmo tempo em que enriquecem e fortalecem os conceitos espontâneos.

Moysés (2004), tendo como referencial os estudos de Vigotski, por intermédio das idéias básicas da pesquisa-ação, em parceria com dois professores de matemática de turmas de 5ª série de uma escola pública, buscou estudar e aplicar os principais princípios vigotskianos nas aulas de matemática. Um dos objetivos da pesquisa era o de verificar as possibilidades da teoria sócio-histórica da psicologia oferecer princípios explicativos que, postos em prática, pudessem melhorar a escola na qual foi realizada a pesquisa. A autora dividiu o estudo em dois grandes grupos: o da aquisição do conhecimento e o do desenvolvimento mental dos alunos. No primeiro grupo se encontravam as questões ligadas à mediação, à formação de conceitos, e ao significado; no segundo grupo às questões relacionadas à zona de desenvolvimento proximal, à organização do trabalho pedagógico, à relação entre atividade e consciência, à criatividade e a dos aspectos afetivos. Os resultados da pesquisa apontaram que nos dois grupos, o resultado do trabalho comprovou que é promissor o uso do

enfoque sócio-histórico para a melhoria da qualidade do ensino.

Freitas (2002), apoiando-se nas idéias de Vigotski, Luria e Bakhtin, analisou as perspectivas abertas pela psicologia sócio-histórica para a investigação qualitativa no âmbito das ciências humanas. Enfatizou a compreensão dos fenômenos estudados a partir de seu acontecer histórico no qual o particular é considerado instância da totalidade social. A pesquisa é vista como uma relação entre os sujeitos, dialógica, na qual o investigador é parte integrante do processo investigativo. Dentro deste contexto, tendo como participantes adolescentes de uma escola pública, desenvolveu conjuntamente com o grupo de pesquisa LIC (Linguagem, Interação e Conhecimento) uma pesquisa qualitativa buscando compreender como o uso de um instrumento cultural da contemporaneidade, a Internet, está mediando a construção da linguagem escrita de um grupo de estudantes, seus usuários, e como a escola trabalha em seu interior a construção da escrita. A análise dos dados mostrou o quanto a escola está *off-line*, num mundo em que tudo está *on-line*.

Steele (2001), por intermédio de uma pesquisa etnográfica, realizou uma investigação visando compreender a cultura da matemática na sala de aula vivenciada por alunos de uma classe de 4ª série de uma escola elementar e para retratar como uma professora implementou os principais conceitos da teoria “*sociocultural*” no ensino da matemática. Os objetivos da pesquisa eram responder as seguintes questões: Quais as estratégias de ensino são usadas pelo professor que é guiado por sua crença que as crianças criam o entendimento matemático por meio da comunicação? Quais são as conexões entre as crenças do professor sobre como seus alunos aprendem e suas decisões instrucionais e a prática na sala de aula? Segundo o autor, sendo a comunicação ponto central dentro da linha “*sociocultural*”, no processo de ensino da matemática, os professores que guiam o seu trabalho baseados nesta teoria envolvem os alunos na explanação e justificativa do seu pensamento. Apontou que a aprendizagem individual é profundamente influenciada pela participação em práticas culturais e que os estudantes constroem o significado matemático quando eles compartilham seus pensamentos. Salientou ainda que a comunicação é uma ferramenta cultural e que, na visão da teoria sociocultural, a aprendizagem matemática envolve a participação e o estabelecimento da prática cultural da matemática dentro da sala de aula.

Laplane (1997) com auxílio das teorias enunciativas, do dialogismo de Bakhtin e da

análise do discurso, realizou uma investigação de casos específicos de interação social na sala de aula: o das crianças que não falam com os professores e colegas. A pesquisa, considerada pela autora como pesquisa aberta, pois o pesquisador é participante da mesma, foi realizada em uma classe de 1ª série do Ensino Fundamental. Por intermédio das filmagens a pesquisadora acompanhou mais de perto o caso de duas crianças; uma delas ora participa das atividades e ora apresenta estar ausente, a outra criança se recusa à comunicação verbal com adultos e colegas. A noção de interação que se desenvolve na pesquisa, baseada nas idéias de Bakhtin, extrapola a presença material dos participantes e a idéia de intercâmbio verbal. A autora apontou também os limites da interação enquanto intercâmbio comunicativo e indicou a necessidade de ampliar o próprio conceito de interação, contemplando não apenas a interlocução, mas também a produção das relações sociais, salientando que ainda, o estudo que o silêncio ocupa na estrutura comunicativa não está suficientemente claro.

Tendo como referencial os estudos de Vigotski sobre a formação dos conceitos científicos e os estudos desenvolvidos por Vergnaud relacionados à construção das estruturas multiplicativas, Canôas (1997) investigou as representações e concepções que têm os professores das séries iniciais do Ensino Fundamental em questões referentes à construção das estruturas multiplicativas. Especificamente, a autora buscou compreender como esse professor trabalha com as continuidades e descontinuidades de raciocínio, e que relações estabelecem entre os termos presentes no campo multiplicativo. A análise dos resultados mostrou que os professores têm uma visão estreita do campo conceitual multiplicativo e tendem a utilizar os conceitos e procedimentos dentro de um raciocínio de validade que não são verdadeiros em outros domínios. Contudo, não possuem um entendimento claro do que é possível e do que não é possível ser conectado nesses domínios.

Silva e Rego (2006), por intermédio dos principais conceitos desenvolvidos pela teoria sócio-histórica, buscaram investigar e compreender a importância do conhecimento prévio, o papel do outro e do meio social, a importância da mediação, dos instrumentos, signos e símbolos na construção do conceito de multiplicação. As autoras, utilizando livros da Literatura Infantil, realizaram um estudo com o objetivo de analisar a possibilidade de construção significativa do conceito de multiplicação, por alunos de uma 2ª série do Ensino Fundamental. Por meio de histórias que abordavam questões matemáticas, todos os alunos

foram submetidos a diversas atividades como: escrita, desenhos, participação em jogos e brincadeiras. Após esta atividade inicial, três estudantes foram selecionados para a intervenção planejada, onde participavam o aluno e o pesquisador. A escolha dos estudantes foi baseada nos critérios: um aluno inicialmente desmotivado para este tipo de atividade, um aluno, que segundo a professora, demonstrasse dificuldade de aprendizagem e um aluno que não apresentasse dificuldade na produção de texto e solução de problemas matemáticos. A análise dos dados apontou que, de maneira geral, os três alunos evoluíram quanto à compreensão do texto e as idéias matemáticas desenvolvidas.

Contudo, a compreensão das idéias matemáticas não foi fácil de ser escrita ou oralizada pelos alunos. Nesse sentido, as autoras salientaram que a linguagem, oral e escrita, passa a ter uma importância considerável para a formação e compreensão dos conceitos matemáticos.

Com base no pressuposto de que elementos afetivos estão interligados aos sociais e cognitivos, Loos (2004) investigou como oito duplas de estudantes de sexta e sétima séries gerenciavam, simultaneamente, a busca de solução para quatro problemas algébricos, a relação interpessoal e a ansiedade gerada pelas dificuldades eventualmente encontradas pelas duplas. Dados da pesquisa indicaram que uma boa interação facilitou o gerenciamento da ansiedade e que uma má interação piorou o desempenho, sendo fonte adicional de ansiedade, desencorajando também o desencadeamento de conflitos sócio-cognitivos. A autora salientou ainda que uma boa interação e um gerenciamento adequado da ansiedade não puderam garantir um bom desempenho quando, a pelo menos um dos participantes, faltavam os requisitos cognitivos mínimos para solucionar a tarefa proposta.

Na linha de investigação que realçam o papel da interação social, precisamente do trabalho em díade, e conjugando as contribuições que as teorias de Piaget e de Vigotski podem fornecer para a compreensão dos mecanismos de apreensão de conhecimentos e aquisição de competências matemáticas, César (1999), pesquisadora do Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, em colaboração com professores e alunos da Faculdade, implantou o projeto “Interação e conhecimento”, junto aos professores de matemática e alunos do 5<sup>o</sup> ao 12<sup>o</sup> ano de escolaridade. O principal objetivo do projeto é promover e estudar as interações entre pares nas aulas de matemática, enquanto meio para desenvolver uma atitude positiva em relação a esta disciplina, elevar a auto-estima dos alunos,

facilitar o desenvolvimento sócio-cognitivo e atingir sucesso nas aulas de matemática. Os resultados deste projeto de investigação apontaram que a interação entre pares pode contribuir na apreensão de conhecimentos e aquisição de competências matemáticas. Entretanto, a autora salientou que é necessário mudar o contrato didático, para que esta forma de trabalho possa ser utilizada nas práticas cotidianas de sala de aula.

Carvalho (2001), pesquisadora do projeto “Interação e conhecimento” da Universidade de Lisboa, realizou uma investigação centrada no estudo das interações entre pares nas aulas de matemática, mais precisamente na unidade curricular de Estatística com alunos do 7.<sup>o</sup> Ano de escolaridade. Os referenciais que embasam a pesquisa são pautados nos trabalhos de Piaget, mais notoriamente nas contribuições de Perret Clermont e colaboradores sobre o potencial da interação social no contexto escolar e na teoria de Vigotski sobre o papel crucial da interação social na construção e desenvolvimento dos conceitos científicos. O objetivo principal da investigação foi averiguar se os alunos, quando trabalham em díade, enquanto resolvem tarefas não-habituais (não rotineiras) de Estatística, revelam mais progressos no seu desenvolvimento lógico comparativamente a alunos que não vivenciam esta forma de trabalho. Os resultados principais do estudo mostraram que os alunos, que trabalharam em díade com tarefas não-habituais, apresentaram progressos mais nítidos quanto ao desenvolvimento lógico. Assim sendo, a autora ressaltou que o trabalho de interação em díade é uma das formas possíveis de alterar as práticas atuais do ensino da Matemática, facilitando o processo de apropriação de conhecimentos e mobilização de competências em Estatística.

Em relação à solução de problemas aritméticos, a revisão da literatura na área aponta um número elevado de investigações relacionadas ao campo conceitual das estruturas aditivas e multiplicativas, ou mais especificamente, ao uso de uma das operações da aritmética elementar na solução de problemas matemáticos. Como já apontado, muitos destes estudos buscaram na teoria piagetiana e nos estudos Gérard Vergnaud elementos para compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos e das estratégias cognitivas implicadas na solução dos problemas.

Moro (2005a, 2002, 2000), por exemplo, por meio de um programa de pesquisa, realizou uma série de estudos sobre construção das estruturas aditivas e multiplicativas em situação de interação social entre crianças. Segundo a autora (2002), a proposição central

destas investigações é a de verificar a hipótese da interdependência das interações sociais com suas construções individuais de aprendizagem das estruturas aditivas e multiplicativas.

Moro (2000) efetuou um estudo de caso sobre as relações da interação social de crianças com suas construções cognitivas individuais de aprendizagem da adição e subtração segundo proposições da psicologia genética. O estudo foi realizado com três meninos, alunos de uma primeira série de uma escola pública que, juntos realizaram tarefas relativas ao conteúdo aritmético da adição/subtração. Em relação à análise das interações ocorridas, Moro (2000) colocou que, o modelo piagetiano do equilíbrio explica a complexidade das interações sociais discutidas, em suas relações necessárias, mas não suficientes com as construções cognitivas individuais.

Em um de seus estudos, tendo como foco principal de investigação a composição aditiva de grandezas equivalentes, Moro (2006) efetuou um estudo, com crianças da 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> série, com o objetivo de descrever a natureza e os progressos de notações infantis. As tarefas aplicadas visavam provocar a elaboração de relações aditivas e multiplicativas e identificar os esquemas fundamentais às estruturações aditivas iniciais em passagem às multiplicativas. Em geral, a autora assinalou que as notações empregadas pelos alunos muito correspondem com as descritas por outros pesquisadores. Mais ou menos apoiados no formalismo da aritmética escolar, nelas estão presentes marcas diversas, das icônicas às simbólicas. “As notações descritas e suas transformações apontam para a proposta de que as origens das estruturas multiplicativas nas aditivas, novamente, estariam na composição-decomposição reiteradas de parte de uma coleção” (Moro, 2006, p. 70).

Por meio de tarefas de repartir coleções e produzir notações interpretadas a respeito, Moro (2005a) realizou um estudo em uma escola pública com seis alunos (7 a 8 anos) agrupados em tríades. Os objetivos eram descrever as concepções das crianças acerca da divisão por partição e identificar os níveis de consciência de relações típicas deste tipo de divisão. Em resposta ao primeiro objetivo, o estudo retratou a seguinte progressão: um primeiro momento em que os alunos dividem a coleção em duas e, depois em mais partes onde está ausente a relação entre a ação efetuada e seus resultados; e um segundo momento, de predomínio de relações aditivas e concepções elementares de divisão. Sobre os resultados referentes ao segundo objetivo do estudo, relacionados ao nível de tomada de consciência das

relações próprias da divisão por partição, obteve-se avanço de elaboração em cada nível, por meio da progressiva superação de obstáculos conceituais e relacionais referentes às realizações de repartir, com o “dar-se conta” das ações praticadas.

Como caminhos alternativos de elaboração das estruturas aditivas em sua passagem para as multiplicativas, Moro (2002), tendo como sujeitos 12 alunos de 1<sup>a</sup> série de escolas públicas, agrupados em tríades, examinou as estratégias cognitivas infantis de repartir grandezas e de adicionar grandezas equivalentes. Do conjunto de resultados, destacou que, a identificação das raízes das estruturas multiplicativas nas aditivas, focalizados no que concerne à divisão (por partição), está a distribuição de elementos em partes equivalentes por adições e subtrações reiteradas, cuja elaboração o esquema de repartir permite. E, no que se refere à multiplicação (com operador escalar) o esquema de repetir quantidades  $n$  vezes aciona: a composição de quantidades equivalentes, e a identificação de quantidades como partes equivalentes adicionáveis  $n$  vezes. Destacou ainda, e de acordo com a teoria psicogenética, o papel da tomada de consciência das ações pelos sujeitos como central para ocorrer o processo de conceitualização.

Tendo como objetivo estudar os procedimentos de solução de problemas verbais aritméticos por crianças das séries iniciais do Ensino Fundamental, Taxa (1996) analisou a construção de uma correta representação mental de solução de problemas de estrutura multiplicativa pelos alunos. A análise dos dados mostrou que as crianças constroem uma representação interna do problema, conseguem selecionar e utilizar estratégias diferenciadas (contagem, aditiva e multiplicativa) e, às vezes de forma correta ou “não tão correta”, explicitar os cálculos realizados para solucionar o problema.

Apresentando, como base para seu estudo, o modelo de equilíbrio proposto por Piaget e os estudos de Vergnaud sobre os campos conceituais das estruturas multiplicativas Taxa (2001), tendo como sujeitos 132 alunos de uma 3<sup>a</sup> série do Ensino Fundamental, analisou o desempenho escolar em matemática, os níveis de abstração em prova de múltiplos comuns, as operações combinatórias e a solução de problemas aritméticos de estrutura multiplicativa. A análise dos dados indicou que os alunos que apresentam melhor desempenho em matemática são também os que apresentam níveis mais elaborados de abstração e “tendência” de progresso em operações combinatórias. Na solução de problemas de produto cartesiano,



constatou que os estudantes, mesmo sem se valer de uma estratégia mais elaborada, conseguiram selecionar os dados pertinentes ao problema e elaborar critérios que auxiliavam na busca do sistema combinatório.

Trilhando pelos caminhos da matemática relacionados à solução de problemas por alunos e futuros professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, Pessoa e Da Rocha Falcão (2001) realizam um estudo com crianças de uma 4ª série do Ensino Fundamental e alunos do último ano de um curso de formação de professores. Os autores discutiram o papel e a formação do professor das séries iniciais do Ensino Fundamental frente ao ensino da matemática e buscaram analisar a compreensão dos professores e alunos sobre a solução de diferentes problemas aditivos. Resultados da pesquisa evidenciaram a proximidade, dos alunos e professores, em termos de dificuldades na compreensão relacionada ao ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos e na solução dos problemas apresentados.

Pessoa (2002), em situação experimental onde participaram 50 alunos de duas quartas séries de uma escola pública, analisou o papel da interação social na superação de dificuldades de resolução de problemas de estrutura aditiva. Tendo como referencial a classificação de problemas aditivos de Carpenter e Moser, investigou quais os problemas de estrutura aditiva mais difíceis para o grupo de alunos pesquisados, identificou as estratégias de solução de problemas aditivos e analisou as modificações do desempenho dos alunos após serem submetidos a sessões de interação. Na análise dos resultados constatou-se que os problemas com maior percentual de erro são aqueles de estruturas mais complexas e menos usuais na sala de aula e nos livros didáticos; porém ao comparar os resultados do pré e do pós-teste percebeu-se que na maioria dos problemas houve decréscimo no percentual de erros. Em relação a este resultado a autora colocou que este se mostra evidente, pois houve um trabalho sistemático realizado com esses problemas. Em relação à interação social, na análise do pós-teste, os sujeitos apresentaram estratégias diferentes das que tinham apresentado no pré-teste, e que, segundo a autora haviam sido construídas ou adquiridas durante a sessão de interação. Desta forma, segundo a autora, acredita-se que a oportunidade da interação é bastante válida, levando a um crescimento em termos de construção conjunta de significados.

Passoni e Campos (2003), fundamentando-se nos estudos de Gérard Vergnaud sobre as estruturas aditivas, realizaram uma pesquisa experimental em uma classe de 3ª série do ensino

fundamental com o objetivo de testar a possibilidade de introduzir, com sucesso, a adição de inteiros e elementos da pré-álgebra. Na 1<sup>a</sup> fase da pesquisa, realizaram um pré-teste individual para verificar o nível de conhecimentos dos alunos em relação às estruturas aditivas. Na 2<sup>a</sup> fase realizaram uma seqüência de ensino onde os alunos eram familiarizados com a adição de inteiros e equações do tipo  $a + x = b$  ou  $x + a = b$ , com  $a$  e  $b$  inteiros introduzindo a categoria de 12 problemas propostas por Vergnaud. A hipótese dos autores era que nesse novo “habitat”, os problemas aditivos teriam taxa de desempenho significativamente maiores. Na 3<sup>a</sup> fase, realizaram um pós-teste e na 4<sup>a</sup> fase, realizada seis meses depois, novo teste para a verificação da estabilidade dos conhecimentos adquiridos. Os resultados obtidos mostraram o sucesso esperado, considerando o fato de tratar os problemas aditivos no campo mais amplo dos números inteiros e dos elementos da pré-álgebra como o diferencial do sucesso constatado.

Guimarães (2005), diante da variedade de problemas aditivos elencados por Vergnaud, analisou a solução de problemas de estrutura aditiva por alunos de 3<sup>a</sup> série do Ensino Fundamental com intuito de identificar que tipos de problemas apresentam dificuldades para os alunos e quais são estas dificuldades. O estudo demonstrou que em relação às provas aplicadas, o índice de acertos foi menor nos tipos de problemas pertencentes à relação de transformação de estados, à relação comparação de estados e composição de duas transformações. Quanto ao grau de dificuldade, o mesmo passou a ser maior quando os problemas apresentam incongruência entre a operação a ser realizada e os verbos ou expressões portadoras de informação. A autora analisou também a questão relacionada à interpretação do problema ou o poder de ler e transformar um significado em outro. Dados do estudo evidenciaram, como indicado em outras pesquisas, que a linguagem ou a forma de representação facilita a identificação da relação do problema, podendo ajudar na solução, entretanto não é suficiente. A autora salientou que tal fato foi observado nos estudos de Vergnaud sobre campos conceituais quando este apontou que a linguagem comunica esquemas, mas não os cria e que a linguagem só tem sentido na presença de esquemas e situações.

Em situações lúdicas envolvendo o jogo de argola com alunos de 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> série do Ensino Fundamental, Guimarães (2004), tendo como referencial a teoria piagetiana e os estudos de Vergnaud, analisou as relações existentes entre os níveis de construção da noção de

multiplicação e os níveis de generalização e, como estes intervêm no desempenho dos sujeitos em situações que envolvem a solução de problemas de estrutura multiplicativa. Os alunos foram submetidos a um pré-teste e pós-teste, antes e depois de participarem das sessões lúdicas com o jogo de argola. Os testes contaram com uma prova de solução de problemas de estrutura multiplicativa inspirados nas categorias propostas por Vergnaud. Os resultados apontaram que, em relação ao desempenho dos sujeitos em problemas de estrutura multiplicativa, o percentual de acertos foi maior no pós-teste (após situações lúdicas) para os sujeitos de níveis mais elevados de construção da noção de multiplicação e de generalização.

Tendo como participantes da pesquisa, alunos da 4<sup>a</sup> série com rendimento insatisfatório em matemática, Calsa (2002) investigou as relações entre a variação da posição da incógnita de problemas multiplicativos e o desempenho na solução de problemas multiplicativos e em provas piagetianas. Foram organizados e submetidos a uma intervenção psicopedagógica dois grupos experimentais e, considerando a ordem aleatória ou definida de apresentação da incógnita dos problemas de estrutura multiplicativa simples: multiplicação, divisão (por cota ou partição). Os participantes foram avaliados por testes de solução de problemas e provas piagetianas clássicas (pré-teste, pós-teste e pós-teste postergado). Os resultados apontaram que a variação da posição da incógnita não sofreu influência sobre o desempenho dos alunos nos problemas; os grupos experimentais apresentaram aumento do número de acertos dos problemas e modificação de suas estratégias de solução depois da intervenção psicopedagógica; a variável desempenho em aritmética foi fator que melhor explicou o progresso dos alunos nos problemas, sendo que, a variável desempenho nas provas piagetianas não exerceu influência sobre o desempenho dos alunos no teste de problemas.

Tendo como referencial a teoria piagetiana, Nunes et al. (2002), numa situação de interação social, investigaram a aprendizagem da conservação de comprimentos em crianças por meio do conflito sociocognitivo e a manifestação e evolução dos possíveis, que poderiam ocorrer paralelamente à aprendizagem de uma noção operatória. Os sujeitos da pesquisa foram 52 crianças de uma creche municipal, com idade variando de 5,6 anos e 7,2. Os alunos foram separados em dois grupos: controle e experimental. No grupo experimental houve o pré-teste individual nas provas de conservação do comprimento e de possíveis de uma realidade parcialmente escondida; intervenção, onde ocorreu a interação entre duplas de alunos e

experimentador (de acordo com as respostas dadas, eram introduzidas situações de conflito, pela contraposição da resposta de cada um dos sujeitos e/ou fornecimento de contra-argumentos) e pós-teste. No grupo controle houve pré-teste e pós-teste. Os dados evidenciaram que o procedimento experimental foi eficaz em promover aquisição da resposta de conservação do comprimento.

Oliveira e Tourinho (2001) realizaram um estudo comparativo do desempenho de alunos da 1<sup>a</sup> série em relação aos 2<sup>a</sup> série do Ensino Fundamental na solução de problemas aritméticos. A pesquisa foi realizada com trinta e oito alunos de escolas públicas estaduais de Belém-PA, divididos em quatro grupos, submetidos ao mesmo procedimento: a apresentação oral de problemas matemáticos. Os problemas eram apresentados na forma oral, mas os participantes poderiam solucioná-los da melhor maneira que lhes conviesse, escrita ou oral. As respostas dos alunos eram relacionadas ao modo como haviam ou não resolvido o problema. Os grupos foram analisados quanto à ocorrência de solução oral e escrita e o uso de estratégias algorítmicas e não algorítmicas utilizadas. A pesquisa permitiu verificar que os alunos de 2<sup>a</sup> série tiveram um desempenho superior aos da 1<sup>a</sup>, provavelmente pelo maior período de escolarização. Apesar do melhor desempenho da 2<sup>a</sup> série, isto não condiz com uma utilização maior de estratégias algorítmicas. A análise das estratégias foi realizada a partir das explicações dadas pelos participantes e do material escrito por eles. A solução oral predominou em todos os grupos estudados, entretanto, a pesquisadora assinalou que grupos com maior frequência de uso da escrita, no caso a 2<sup>a</sup> série, apresentaram maior percentual de acertos nas duas formas de solução.

Freitas (2005a) realizou um estudo com 11 alunos de uma 1<sup>a</sup> série, com o objetivo de examinar o processo de solução de problemas de adição e subtração de crianças da 1<sup>a</sup> série e descrever e comparar as estratégias de solução de problemas pelos alunos quando é variada a circunstância da apresentação dos problemas. Na primeira circunstância, os alunos foram expostos a uma tarefa não convencional de simulação de situação cotidiana de compra e venda, com o apoio de materiais como “dinheiro de papel” e embalagens dos produtos e registro não convencional em folha de papel sulfite e canetas hidrográficas. Dois dias após, os alunos realizaram uma tarefa convencional (lápiz e papel) de solução de três problemas. A análise qualitativa dos dados mostrou que, nas diferentes circunstâncias as soluções orais e

notacionais das crianças foram, em sua maioria, semelhantes às canônicas que a escola adota e ensina, destacando que no dia a dia da matemática escolar as crianças não têm oportunidade de criar suas estratégias.

Em um estudo sobre a ansiedade e a matemática, Loos (2004) com base no pressuposto de que elementos afetivos estão interligados aos sociais e cognitivos, realizou uma investigação com o objetivo de observar como oito duplas de estudantes, de sexta e sétima séries, gerenciavam, simultaneamente, a busca de solução para quatro problemas algébricos, a relação interpessoal envolvida e a ansiedade gerada pelas dificuldades eventualmente encontradas. A autora também analisou a qualidade da interação estabelecida entre os integrantes das díades durante a solução dos problemas e o desencadeamento de situações de conflito cognitivo e/ou sócio-afetivo. Os resultados da pesquisa indicaram que uma boa interação entre os componentes da díade facilita o gerenciamento da ansiedade e que uma má interação piora o desempenho, sendo ainda fonte adicional de ansiedade, desencorajando o desencadeamento de conflitos sócio-cognitivos. Contudo, em relação ao desempenho, Loos (2004) observou que uma boa interação e um gerenciamento adequado da ansiedade não puderam garantir um bom desempenho na tarefa, quanto a pelo menos um dos participantes, faltavam os requisitos cognitivos mínimos para dominá-la.

Em síntese, como apontado na introdução deste estudo, há uma vasta literatura na área sobre a interação social no ambiente escolar, bem como, pesquisas sobre a solução de problemas de estrutura aditiva e multiplicativa. O conjunto de pesquisas apresentadas, assim como, as diversas leituras realizadas, permitiram ampliar a visão sobre o objeto de estudo em questão e contribuíram na construção e análise dos dados desta pesquisa.

## **CAPÍTULO IV**

### **PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS**

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, MEC/PCN, 1997), ao final do 1º ciclo do Ensino Fundamental é esperado que os alunos sejam capazes de compreender e trabalhar com as quatro operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como, compreender e solucionar problemas envolvendo as quatro operações.

Com base em estudos apresentados ao longo deste trabalho e em dados obtidos pelo Sistema Nacional de Avaliação - SAEB - (Brasil/MEC, 2004), a escolha da 4ª série se justifica, pois as pesquisas indicaram que muitos alunos, ao finalizarem o 1º Ciclo do Ensino Fundamental, ainda apresentam dificuldade na compreensão e solução de problemas envolvendo as quatro operações aritméticas elementares.

Partindo do pressuposto que, muitas vezes, quando o estudante soluciona individualmente um problema, a reflexão acerca do mesmo não é explicitada e o próprio aluno não toma consciência sobre o que está pensando e que, por outro lado, na interação com seu parceiro, a criança precisa expor suas idéias para que o colega delas tome conhecimento e assim possam compartilhar esse pensamento, trocar idéias, buscar estratégias e chegar à solução do problema, a questão central deste estudo pode ser assim enunciada:

*A interação social em díade, entre alunos da 4ª série do Ensino Fundamental, tem relação com o desempenho dos estudantes na solução de problemas aritméticos rotineiros e não rotineiros?*

## **1. Objetivos**

- I) Verificar se há alteração no desempenho dos participantes, na solução de problemas aritméticos rotineiros e não rotineiros, após serem submetidos às sessões deliberadas de interação social em díade.
- II) Apresentar uma análise qualitativa, a partir do diálogo estabelecido entre os participantes, da dinâmica da interação social em díade durante a solução de problemas aritméticos rotineiros e não rotineiros.
- III) Investigar, a par das verbalizações e dos procedimentos adotados na solução, o conhecimento dos estudantes sobre os conceitos matemáticos envolvidos na solução dos problemas.

De acordo com o plano empírico desta investigação, os participantes deste estudo, foram submetidos a um pré-teste e pós-teste individual para análise de desempenho. Assim sendo, em relação à análise desses instrumentos de avaliação, esta investigação buscou também apresentar os procedimentos de solução e a representação gráfica adotada pelos estudantes.

## **2. Participantes**

Participaram deste estudo vinte e quatro alunos, doze meninas e doze meninos, de uma 4<sup>a</sup> série municipal de Ensino Fundamental da cidade Mogi Guaçu, estado de São Paulo. A escolha da classe foi realizada de forma conveniente com indicação da direção da escola e adesão da professora<sup>18</sup>.

---

<sup>18</sup> A direção da escola apresentou, em horário de HTPC (Horário de Trabalho e Planejamento Conjunto), a proposta da pesquisa às professoras das 4<sup>as</sup> séries para decidir, de forma conjunta, a classe onde se desenvolveria a pesquisa, com a adesão voluntária da professora.

Atualmente esta escola possui seiscentos e vinte estudantes, atendidos em dois períodos, matutino e vespertino, totalizando vinte e duas classes, assim distribuídas: cinco classes de 1<sup>a</sup> série, seis classes de 2<sup>a</sup> série, seis classes de 3<sup>a</sup> série e cinco classes de 4<sup>a</sup> série, com uma média de vinte e oito alunos em cada classe.

O corpo pedagógico da escola conta com uma diretora, uma vice-diretora (apoio pedagógico), uma coordenadora e vinte e oito professores, sendo vinte e dois professores titulares, quatro substitutos e dois professores de Educação Física.

Para atender as necessidades da escola, além do corpo pedagógico, a escola possui 10 funcionários em função administrativa e serviços gerais.

### **3. Procedimentos para coleta de dados**

O presente estudo foi organizado em três momentos distintos para a coleta de dados: um pré-teste, quatro sessões deliberadas de interação social em díade e um pós-teste.

#### **I) Pré-teste**

Tendo como referência os diversos estudos apresentados no corpo deste trabalho o instrumento de avaliação, tipo lápis e papel, na forma de teste múltipla escolha foi elaborado para o presente estudo. O mesmo foi composto por doze problemas aritméticos sendo que, deste total, nove foram caracterizados como rotineiros e três como não-rotineiros buscando abranger as principais categorias de problemas de estrutura aditiva e multiplicativa para a idade/série.

Em relação ao formato dos instrumentos de avaliação de medida de desempenho, pode-se dizer que, em geral, os mesmos são elaborados utilizando-se, basicamente, dois formatos de itens de teste: os itens de resposta construída e os itens de reconhecimento, dentre os quais, neste último, se destaca o item de múltipla escolha. No primeiro caso, o aluno elabora uma resposta e, no segundo, seleciona uma resposta dentre um conjunto de alternativas possíveis.

Adotou-se para a construção do instrumento do pré-teste o item tipo múltipla escolha. Neste caso, como nas pesquisas realizadas pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação



Básica (SAEB), pelo Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), dentre outras, os estudantes precisam ser capazes de lidar com as alternativas (distratores) apresentadas. (Brasil/MEC, 2003)

O pré-teste e pós-teste, seguindo os modelos de avaliação adotados pelo SAEB e pelo SARESP e de acordo com o guia para elaboração de itens de matemática elaborado pelo Ministério da Educação e Cultura (Brasil/MEC, 2003), para cada item de respostas, uma única alternativa era correta para a questão proposta no enunciado do problema. As demais alternativas possuíam respostas incorretas, porém plausíveis, atraindo os alunos com pouco conhecimento do conteúdo ou aqueles que tentavam adivinhar (ou “chutar”) a resposta correta.

Conhecidos como, distratores, as alternativas possíveis possuem aparência de resposta correta. Porém, são incorretas em relação ao enunciado, embora seu conteúdo deva ser correto, se considerado independentemente do problema formulado no enunciado. (Brasil/MEC, 2003)

Ainda, como recomenda o guia elaborado pelo MEC (Brasil, 2003) para a avaliação de estudantes de 4ª série do ensino fundamental, os itens elaborados neste instrumento de avaliação são exclusivamente de múltipla escolha com uma única alternativa correta dentre quatro alternativas de respostas. (Anexo II).

A Figura 11 apresenta, para cada problema do pré-teste e pós-teste, a classificação dos mesmos quanto às estruturas aditiva ou multiplicativa, a operação aritmética esperada na solução e o tipo de problema: rotineiro ou não rotineiro.

<b>Problema</b>	<b>Estrutura</b>	<b>Classificação</b>	<b>Operação esperada</b>	<b>Tipo</b>
1	aditiva	Composição de duas medidas	subtração	rotineiro
2	multiplicativa	Isomorfismo de medida	divisão (por cota)	rotineiro
3	aditiva	Transformação de uma relação	subtração	rotineiro
4	multiplicativa	Isomorfismo de medida	divisão (partitiva)	rotineiro
5	multiplicativa	Isomorfismo de medida	multiplicação	rotineiro
6	aditiva	Transformação ligando duas medidas	subtração	rotineiro
7	multiplicativa	Isomorfismo de medida: comparação	multiplicação	rotineiro
8	aditiva	Relação (quantificada) de comparação entre duas medidas	subtração	rotineiro
9	aditiva	Composição de duas transformações	adição e subtração	rotineiro
10	multiplicativa	Produto de medida	multiplicação	não rotineiro
11	aditiva	Composição de medidas	adição	não rotineiro
12	multiplicativa	Isomorfismo de medida	divisão (por cota)	não rotineiro

Figura 9. Classificação dos problemas do pré-teste e pós-teste.

Os instrumentos de avaliação individual, pré-teste e pós-teste, foram aplicados a todos os alunos, dentro da sala de aula. Para a correção dos mesmos foram consideradas as

características observadas nos protocolos dos participantes de acordo com o quadro abaixo:<sup>19</sup>

<b>Número de pontos</b>	<b>Características observadas na solução dos problemas propostos aos estudantes</b>
0	Devolve o problema “em branco” (sem solução). Números copiados do problema — não entendimento do problema evidenciado. Resposta incorreta, sem evidenciar o desenvolvimento da solução.
1	Iniciou usando estratégia inapropriada — não concluiu a solução do problema. Abordagem sem sucesso — não tentou abordagem diferente. Tentativa falha de alcançar um sub-objetivo.
2	Estratégia apropriada foi usada — não encontrou a solução ou alcançou um sub-objetivo, mas não terminou a solução. Estratégia inadequada, que revela algum entendimento do problema. Resposta correta e procedimento de solução não mostrado.
3	Estratégia apropriada, porém o sujeito: Ignorou a condição do problema. Deu uma resposta incorreta sem razão aparente. Falta de clareza no procedimento empregado.
4	Estratégia (s) apropriada (s). Desenvolvimento da solução reflete entendimento do problema. Resposta incorreta por um erro de cópia ou de cálculo.
5	Estratégia (s) apropriada (s). Desenvolvimento da solução reflete entendimento do problema. Resposta correta.

Figura 10. Sistema de pontuação com cinco valores.

<sup>19</sup> Escala de cinco pontos elaborada por Charles (citado por Lima, 2005a, p. 61, 62).

Por fim, como apresentado a seguir, salienta-se que a pontuação obtida pelos estudantes no pré-teste também foi considerada para a formação das diferentes díades submetidas às sessões de interação social.

## **II) Interação deliberada em díade**

A partir da proposta de solução de problemas em díades, os estudantes participaram de quatro sessões de interação social. As sessões foram realizadas fora da sala de aula, em local indicado pela direção da escola, quando presentes a díade e o pesquisador. Salienta-se que, o pesquisador procurou interferir o mínimo possível nos diálogos estabelecidos entre os componentes da díade. Sua função, além das orientações iniciais, era, quando estritamente necessário, a de reconstruir a seqüência de raciocínio desenvolvida pelos estudantes, pedir aos mesmos que explicassem como “pensaram” em determinada etapa da solução do problema.

Por conta da literatura revisada, para a realização desta investigação, buscou-se propor algumas condições para a criação de um terreno favorável que favorecesse a interação social.

Primeiramente, por intermédio de conversa informal da pesquisadora com a professora da classe obtiveram-se informações sobre o relacionamento sócio-afetivo entre os alunos. Posteriormente, antes de se iniciar as sessões de interação, a pesquisadora enfatizou junto aos estudantes que durante as quatro sessões de trabalho em díade era muito importante para a pesquisa tudo que eles falassem, escrevessem ou desenhassem enquanto estivessem trabalhando.

Na primeira sessão de interação, reiterando o que havia sido falado na ocasião da aplicação do pré-teste, a investigadora se identificou como uma pessoa muito interessada em saber como “pensam” os alunos, o que fazem e dizem quando dois colegas estão trabalhando de forma conjunta em uma tarefa de solução de problema matemático. Outras instruções iniciais foram dadas para guiar o trabalho, tais como: compartilhar as idéias com o companheiro da díade, dizer tudo o que pensaram um ao outro, deixar registrado no papel tudo o que haviam feito para solucionar o problema, verificação da resposta e a apresentação da solução propriamente dita.

#### Duração da tarefa em díade:

Cada díade foi submetida à tarefa planejada uma vez por semana durante quatro semanas consecutivas. Não houve limite de tempo para a solução dos problemas. Desta forma, houve uma grande variação em relação ao tempo gasto pelas díades na solução dos mesmos. Para a solução dos problemas, em média, a duração da tarefa foi de uma hora em cada uma das sessões. O tempo mínimo foi de quarenta minutos e o tempo máximo de uma hora e vinte e cinco minutos.

#### Os problemas:

Tendo por base os estudos desenvolvidos por Gérard Vergnaud e as diversas pesquisas apresentadas no corpo deste trabalho, os problemas propostos nas sessões foram concebidos para o presente estudo. Em cada sessão foram apresentados seis problemas, sendo quatro do tipo rotineiro e dois do tipo não-rotineiro. (Anexo III)

#### Forma de apresentação dos problemas para as díades:

Cada um dos problemas foi digitado separadamente em letra de imprensa maiúscula numa folha de papel contendo espaço em branco para a solução. Visando o trabalho conjunto, as díades receberam apenas uma cópia de cada problema.

Salienta-se que não foi sugerida uma ordem para a solução dos seis problemas que as díades deveriam solucionar em cada uma das sessões. Os estudantes poderiam escolher a ordem para a solução. Contudo, ficou acordado que eles só passariam ao problema seguinte após terem solucionado o problema anterior.

#### Formação das díades:

Após algumas sugestões da professora quanto ao relacionamento sócio-afetivo e tendo sempre o cuidado quanto ao critério pré-estabelecido relacionado ao desempenho dos estudantes no pré-teste, foram formadas doze díades. Ressalta-se que todos os estudantes tiveram a permissão expressa dos pais (Anexo 1) para participação na pesquisa.

As doze díades foram formadas de acordo com o nível de desempenho dos estudantes no

pré-teste e das características sócio-afetivas dos participantes, a saber:

- Assimétricas: três díades alto desempenho com baixo desempenho, três de alto desempenho com médio desempenho, quatro de médio desempenho com baixo desempenho.
- Simétrica: duas díades médio desempenho com médio desempenho.

#### Registro das sessões de interação:

Como ferramenta para a análise qualitativa dos dados, com consentimento prévio dos pais, todas as sessões foram videografadas (Anexo I).

Segundo Meira (1994, p. 61), “a videografia, ou registro em vídeo de atividades humanas, apresenta-se como ferramenta ímpar para a investigação microgenética de processos psicológicos complexos, ao resgatar a densidade de ações comunicativas e gestuais”.

Além do recurso da videografia o pesquisador realizou um registro descritivo das sessões de interação social relacionados às principais verbalizações dos participantes e as ações desenvolvidas por estes na solução dos problemas.

No caso deste estudo, o diálogo estabelecido entre os componentes das díades permitiu ao pesquisador acompanhar as verbalizações dos alunos frente à solução dos problemas, bem como, fazer inferências e analisar o estabelecimento de relações e significações no processo de construção do conhecimento matemático.

Ainda, pertinente a este estudo, fundamentado na perspectiva sócio-histórica da psicologia, as sessões de interação social em díade foram vistas como um processo, mediado por instrumentos (a própria atividade), signos (matemáticos e lingüísticos) e pela interação entre os alunos.

Neste contexto, salienta-se ainda que a linguagem oral empregada pelos participantes — com o objetivo de comunicar sua idéia ao parceiro e como meio de pensamento — permitiu também a realização de inferências acerca da influência da interação social na solução dos problemas, as análises das verbalizações, dos procedimentos de solução e das representação gráficas adotadas.

### **III) Pós-teste**

Para o pós-teste foi elaborado um instrumento de avaliação, tipo lápis e papel, elaborado para o presente estudo. Assim como no pré-teste, o instrumento foi composto por doze problemas aritméticos sendo nove do tipo rotineiro e três não-rotineiros com as mesmas características e estrutura dos problemas do pré-teste.

O pós-teste foi aplicado a todos os alunos dentro da sala de aula. Como já apontado, o objetivo do deste instrumento foi o de verificar, se após as sessões de interação social em díade, houve alteração no desempenho e mudança nos procedimentos adotados pelos estudantes na solução dos problemas.

### **4. Análise de dados**

Por meio do programa estatístico SPSS for *Windows* (2002) foram realizadas análises estatísticas descritivas e inferenciais dos dados obtidos no pré-teste e pós-teste, referentes aos procedimentos e representação gráfica adotados pelos estudantes em cada um dos problemas, a distribuição de estudantes segundo níveis de desempenho, análise comparativa do desempenho dos estudantes, antes e depois de serem submetidos ao processo de interação social em díade, e análise comparativa do desempenho por gênero. Além da análise estatística, no decorrer da apresentação dos dados, foi realizada uma análise, de cunho qualitativo, dos procedimentos adotados pelos estudantes.

Por fim, norteada pelas pesquisas apresentadas no corpo deste trabalho, pelas teses de Vigotski e pela teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud, buscou-se realizar uma análise de cunho qualitativo do processo de interação social entre os estudantes durante a solução dos problemas, das verbalizações dos participantes e dos procedimentos de solução adotados na execução da tarefa.

## **CAPÍTULO V**

### **APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS**

Considerando as questões levantadas no plano metodológico da pesquisa, esta apresentação e análise dos dados da pesquisa buscam: 1) descrever os tipos de procedimentos e formas de representação gráfica adotada pelos participantes na solução dos problemas; 2) apresentar e analisar amostras de verbalizações dos sujeitos na interação social em díade durante a solução das tarefas propostas; 3) averiguar se os estudantes após trabalharem em díade apresentaram progresso na solução de problemas.

Assim sendo, primeiramente, apresenta-se a análise quantitativa dos problemas propostos no pré-teste e pós-teste e algumas considerações sobre os mesmos. Logo após, procede-se à apresentação com a análise qualitativa das sessões de interação social em díade.

#### **1. Análise referente ao desempenho dos estudantes no pré-teste e pós-teste**

Neste estudo, foram considerados três níveis de desempenho dos estudantes no pré-teste e pós-teste assim distribuídos: de 0 a 49% baixo desempenho, de 50 a 80% médio desempenho e de 80 a 100% alto desempenho.

##### **1.1. Pré-teste**

Os escores dos participantes nos problemas do pré-teste apresentaram pontuação



mínima de 7 e máxima de 60 pontos, com média de 37,8 e um desvio padrão de 15,7 pontos. A pontuação obtida pelo grupo apresenta-se acima do ponto médio cujo valor é de 30 pontos. De acordo com esses resultados, pode-se dizer que o grupo de participantes tendeu a apresentar um nível médio de desempenho como mostra a Tabela 1. Ao analisar a frequência de estudantes por nível de desempenho no pré-teste verificou-se que a maior parte dos estudantes possui médio desempenho (51,9%).

Tabela 1. Distribuição de estudantes segundo níveis de desempenho no pré-teste

Nível de desempenho	Número de estudantes	
	N	%
Baixo desempenho (0-29 pontos)	7	29,2
Médio Desempenho (30-47 pontos)	11	45,8
Alto Desempenho (48-60 pontos)	6	25
Total	24	100,0

## 1.2 Pós-teste

Os escores dos participantes nos problemas do pós-teste apresentaram pontuação mínima de 20 e máxima de 60, com média de 46,4 e um desvio padrão de 12,6 pontos. A pontuação obtida pelo grupo apresenta-se acima do ponto médio da escala cujo valor é de 30 pontos. De acordo com esses resultados, pode-se dizer que o grupo de participantes tendeu a apresentar mais níveis médios e altos de desempenho como mostra a Tabela 4. Além disso, ao analisar a frequência de estudantes por nível de desempenho no pós-teste, verificou-se que a maior parte dos estudantes possui alto desempenho (66,7%).

Tabela 2. Distribuição de estudantes segundo níveis de desempenho no pós-teste

Nível de desempenho	Número de estudantes	
	N	%
Baixo desempenho (0-29 pontos)	4	16,7
Médio Desempenho (30-47 pontos)	5	20,8
Alto Desempenho (48-60 pontos)	15	62,5
Total	24	100,0

## 2 . Distribuição quanto ao desempenho conforme os problemas “rotineiros” e “não rotineiros” do pré-teste e pós-teste

### 2.1 Pré-teste

A Tabela 3 apresenta os indicadores referentes à distribuição de acertos e erros nos problemas do pré-teste. Em relação aos problemas classificados como “rotineiros” (problemas de 1 a 9), os escores dos participantes apresentaram nota mínima de 5 e máxima de 45, com média de 31,6 e um desvio padrão de 12,5 pontos. A pontuação obtida pelo grupo apresenta-se acima do ponto médio da escala cujo valor é de 22,5 pontos.

Para os problemas classificados como “não rotineiros” no pré-teste (problemas de 10 a 12), os escores dos participantes apresentaram nota mínima de 1 e máxima de 15, com média de 6,1 e um desvio padrão de 4,4 pontos. A pontuação obtida pelo grupo apresenta-se pouco abaixo do ponto médio da escala cujo valor é de 7,5 pontos.

Tabela 3. Indicadores referentes à distribuição de acertos e erros no pré-teste

Probl	Procedimento esperado	Acertos		Erros	
		N	%	N	%
1	Subtração	18	75,0	6	25,0
2	Divisão	12	50,0	12	50,0
3	Subtração	20	83,3	4	16,7
4	Divisão	16	67,7	8	33,3
5	Multiplicação	16	66,7	8	33,3
6	Subtração	19	79,2	5	20,8
7	Multiplicação	19	79,2	5	20,8
8	Subtração	11	45,8	13	54,2
9	2 operações	13	54,2	11	45,8
10	Multiplicação	3	12,5	21	87,5
11	Adição	3	12,5	21	87,5
12	Divisão	8	33,3	16	66,7

## 2.2 Pós-teste

A Tabela 4 apresenta em frequência e percentuais os acertos e erros nos problemas do pós-teste. Em relação aos problemas classificados como “rotineiros” no pós-teste (problemas de 1 a 9), os escores dos participantes apresentaram nota mínima de 17 e máxima de 45, com média de 36,1 e um desvio padrão de 9,1 pontos. A pontuação obtida pelo grupo apresenta-se acima do ponto médio da escala cujo valor é de 22,5 pontos.

Para os problemas classificados como “não rotineiros” no pós-teste (problemas de 10 a 12), os escores dos participantes apresentaram nota mínima de 2 e máxima de 15, com média de 10,2 e um desvio padrão de 4,2 pontos. A pontuação obtida pelo grupo apresenta-se acima do ponto médio da escala cujo valor é de 7,5 pontos.

Tabela 4. Indicadores referentes à distribuição de acertos e erros no pós-teste

Item	Operação Esperada	Acertos		Erros	
		N	%	N	%
1	Subtração	23	95,8	1	4,2
2	Divisão	13	54,2	11	45,8
3	Subtração	21	87,5	3	12,5
4	Divisão	19	79,2	5	20,8
5	Multiplicação	17	70,8	7	29,2
6	Subtração	19	79,2	5	20,8
7	Multiplicação	16	66,7	8	33,3
8	Subtração	15	62,5	9	37,5
9	2 operações	14	58,3	10	41,7
10	Multiplicação	8	33,3	16	66,7
11	Adição	8	33,3	16	66,7
12	Divisão	18	75,0	6	25,0

Nesta investigação, tanto para os problemas apresentados no pré-teste como no pós-teste, os escores dos estudantes foram menores nos problemas classificados como “não rotineiros”, quando comparados aos escores obtidos nos problemas rotineiros.

Neste sentido, e como salientaram Schroeder e Frank (1990) e Malone et al. (1997), a maior frequência dos problemas tidos como rotineiros na matemática escolar e as instruções e dados contidos no enunciado podem ter facilitado a solução deste tipo de problema. Por outro lado, os problemas matemáticos tidos como “não rotineiros”, por demandarem, via de regra, uma interpretação mais cuidadosa do seu enunciado e também serem menos habituais no ensino da matemática podem justificar um grau maior de dificuldade e, conseqüentemente, menor desempenho dos estudantes neste tipo de tarefa.

### **3. Análise comparativa do desempenho dos estudantes no pré-teste e pós-teste**

Ao analisar o desempenho dos estudantes no pré-teste e no pós-teste observa-se que foram encontradas diferenças expressivas de pontuação média, de forma que os estudantes tenderam a apresentar desempenho mais alto no pós-teste ( $t[23]=-6,457$ ;  $p= 0,000$ ). Esses resultados podem ser mais bem explorados ao verificar o ganho no desempenho médio de cada sujeito após serem submetidos ao processo de interação social em díades (Tabela 5).

A Tabela 5 demonstra que para a maioria dos estudantes (79,2%) houve uma elevação do percentual de desempenho na tarefa de solução de problemas do pós-teste.

Assim, em relação à evolução individual dos participantes deste estudo, podemos inferir que, para a maioria dos estudantes, a interação social teve relação com a evolução do desempenho dos estudantes no pós-teste.

Tabela 5. Distribuição de estudantes de acordo com o desempenho no pré e pós-teste

Sujeito	Pontuação no Pré-Teste	Pontuação no Pós-Teste	Ganho desempenho médio
1	59	59	0
2	37	55	18
3	41	45	4
4	47	50	3
5	25	29	4
6	60	59	-1
7	8	23	15
8	52	51	-1
9	56	56	0
10	40	52	12
11	47	60	13
12	29	38	9
13	12	31	19
14	54	57	3
15	22	40	18
16	7	20	13
17	41	60	19
18	17	23	6
19	41	55	14
20	40	49	9
21	32	51	19
22	47	53	6
23	44	52	8
24	49	45	-4

A Tabela 6 apresenta a distribuição dos estudantes segundo os níveis de desempenho no pré-teste pós-teste e permite também visualizar o percentual de sujeitos em cada um destes níveis.

Tabela 6. Distribuição dos estudantes segundo os níveis de desempenho no pré e pós-teste.

Nível de desempenho	Pré-teste		Pós-teste	
	Número de estudantes	%	Número de estudantes	%
Baixo desempenho (0-29 pontos)	7	29,2	4	16,7
Médio Desempenho (30-47 pontos)	11	45,8	5	20,8
Alto Desempenho (48-60 pontos)	6	25,0	15	62,5
Total	24	100,0	24	100,0

Por intermédio da análise comparativa dos níveis de desempenho dos sujeitos no pré-teste e pós-teste (alto, médio e baixo) verifica-se também uma mudança no nível de desempenho dos participantes no pós-teste após participarem das sessões de interação social em díade. Isto sugere que, a interação em díade pode ter alguma relação com a elevação do percentual de desempenho dos participantes.

#### **4. A evolução dos desempenhos dos alunos em função do tipo de díade**

Uma vez que os sujeitos deste estudo trabalharam em díades, e estas poderiam ser de quatro tipos, torna-se pertinente averiguar se o tipo de formação das díades influenciou o

desempenho dos estudantes no pós-teste.

A Tabela 7 apresenta a evolução do desempenho dos sujeitos, após serem submetidos às sessões de interação, conforme o tipo de formação da díade. Observa-se que as díades assimétricas e simétricas tiveram um comportamento muito semelhante entre si quanto ao número de sujeitos que progrediram conjuntamente e ao número de díades onde só um dos membros progrediu. Salienda-se que informações adicionais quanto às regressões serão analisadas traçando-se uma discussão paralela aos dados encontrados na Tabela 5, referente à distribuição dos sujeitos quanto ao nível de desempenho no pré-teste e pós-teste.

Tabela 7. Evolução do desempenho dos sujeitos para cada um dos diferentes tipos de díades.

Tipo de díade quanto ao nível de desempenho	Número díades	Regridem		Sem progresso		Com progresso	
		Sujeitos	Díades	Sujeitos	Díades	Sujeitos	Díades
Alto desempenho com baixo	3	1	-	1	-	2	1
Médio desempenho com Baixo	4	-	-	-	-	-	4
Médio desempenho com médio	2	-	-	-	-	-	2
Alto desempenho com médio	3	2	-	1	-	3	-
Total	12	3	0	2	0	5	7



Por intermédio da Tabela 7, observa-se que um total de 5 sujeitos e 7 díades (totalizando 19 sujeitos, 79,2%), distribuídos nas diferentes díades, assimétricas e simétricas, tiveram progresso no desempenho; 2 sujeitos (8,3%) não tiveram progresso, ou seja, não houve alteração de desempenho e 3 sujeitos (12,5%) regrediram. Assim sendo, em relação à formação das díades, quando se apresenta o resultado correspondente à análise do desempenho dos participantes, verifica-se que, tanto em díades simétricas, como para assimétricas, a maioria dos alunos evoluiu entre o pré-teste e o pós-teste.

Este resultado sugere que quando os alunos têm oportunidade de trabalhar em díade, simétricas e assimétricas, mesmo num número reduzido de sessões, é possível observar progressos no desempenho matemático.

Nesta mesma direção, os estudos de Carvalho (2001), César (1999), Coll-Salvador (1997) e Pessoa (2002) apontaram que um sujeito pode tirar benefícios de uma interação, quer se trate de díades simétricas, quer assimétricas, quanto ao nível inicial de competência.

De posse dos protocolos e por intermédio das Tabelas 5, 6 e 7, verifica-se ainda que para as díades assimétricas (alto desempenho e baixo desempenho) formadas pelos sujeitos 14 e 16, 8 e 7, 9 e 18, com exceção do aluno número 8 (alto desempenho), que teve uma queda de desempenho na ordem de 1 ponto (de 52 para 51 pontos), atribuída a marcação errada da resposta, em geral, houve aumento na pontuação dos estudantes no pós-teste. Além disso, para este tipo de díade, não houve alteração no nível de desempenho dos participantes, ou seja, os estudantes de número 8, 9 e 14 considerados alto desempenho continuaram alto desempenho e os de números 7, 16 e 18 continuaram baixo desempenho. Contudo, salienta-se que para os alunos de baixo desempenho pertencentes a este tipo de formação de díade, apesar de permanecerem no mesmo nível (baixo desempenho), houve uma alteração expressiva de desempenho, principalmente para os estudantes de número 7 e 16, de 8 pontos no pré-teste para 23 pontos no pós-teste e de 7 pontos no pré-teste para 20 pontos no pós-teste e aumento de 15 e 13 pontos respectivamente.

A análise do protocolo do pré-teste e pós-teste do estudante número 8 apontou que a queda de 1 ponto relacionada à mudança de pontuação no problema número 8 (relação (quantificada) de comparação entre duas medidas) de 5 para 4 pontos. No caso, a estratégia foi apropriada e o desenvolvimento da solução reflete entendimento do problema, contudo por

erro de cópia, houve uma resposta incorreta do mesmo.

Para as díades assimétricas (alto desempenho com médio desempenho) formadas pelos sujeitos 1 e 2, 3 e 6, 23 e 24, com exceção dos estudantes 6 e 24 que, respectivamente, tiveram uma queda na ordem de 1 ponto (60 para 59) e de 4 pontos (49 para 45), a análise comparativa do desempenho dos sujeitos no pré-teste e pós-teste apontou aumento na pontuação do pós-teste.

A análise dos protocolos do pré-teste e pós-teste do aluno 6 mostrou que a queda de 1 ponto foi relativa à finalização e marcação errada da alternativa do problema 9 (composição de duas transformações) do pós-teste. Para o aluno número 24, a queda de 4 pontos relaciona-se, principalmente, a alteração da pontuação nos problemas 7 e 9. O estudante em questão acertou o problema 7 no pré-teste (pontuação de 5 pontos) e errou o problema no pós-teste (pontuação 0 pontos) e para o problema 11 obteve 4 pontos no pré-teste e 5 no pós-teste.

Para as díades assimétricas (médio desempenho com baixo desempenho) formadas pelos participantes 4 e 13, 11 e 15, 10 e 5, 12 e 17, todos os alunos, quando comparados com o pré-teste, tiveram aumento na pontuação do pós-teste. Salienta-se ainda, como mostra a Tabela 5, que os alunos números 13 e 15 obtiveram um ganho médio de desempenho na ordem de 19 e 18 pontos respectivamente, alterando seu nível de desempenho: de baixo desempenho no pré-teste para médio desempenho no pós-teste.

Por fim, as díades simétricas (médio desempenho com médio desempenho) formadas pelos estudantes 19 e 20, 21 e 22, todos os participantes tiveram aumento na pontuação do pós-teste e ainda para os alunos 19, 21 e 22 houve mudança no nível de desempenho, de médio desempenho no pré-teste para alto desempenho no pós-teste.

## **5. Análise quantitativa referente aos procedimentos de solução e representação gráfica adotada pelos estudantes nos problemas do pré-teste e pós-teste**

Na análise que se segue, torna-se importante considerar, como já apontado, que os instrumentos de avaliação, pré-teste e pós-teste, foram do tipo lápis e papel, sem o emprego da linguagem oral, desta forma, permitem poucas inferências a respeito da opção do sujeito por determinado procedimento de solução e representação adotada.

## 5.1 Pré-teste

A Tabela 9 apresenta a distribuição de estudantes de acordo com os procedimentos de solução adotados pelos participantes no pré-teste. A análise dos protocolos mostrou que para solucionar os problemas os estudantes utilizaram os seguintes procedimentos: uma das quatro operações aritméticas fundamentais, uso de esquemas e desenhos (representação pictográfica, icônica <sup>20</sup>), ou ainda, para solucionar o mesmo problema, fizeram uso de uma das operações e do desenho. Apresenta ainda a operação aritmética esperada na solução dos problemas e a utilizada pelos participantes.

---

<sup>20</sup> Representação pictográfica: a criança percebe a quantidade exata desenhando o mais fielmente possível cada um dos objetos envolvidos na situação. Ainda nos casos em que não tem a possibilidade de determinar o cardinal do conjunto, pode representar a quantidade exata, estabelecendo uma correspondência termo a termo entre cada objeto e seu desenho. Representação icônica: diz respeito à quantidade exata de objetos, por meios de marcas que não trazem nenhuma informação sobre sua qualidade. (Hughes, citado por Moreno, 2006, p. 61)

Tabela 8. Distribuição de estudantes conforme os procedimentos de solução adotados pelos participantes em cada problema proposto para o pré-teste

Probl.	Operação Esperada	Procedimento de solução adotado					
		Adição	Subtração	Multiplicação	Divisão	Duas operações	Pictográf./ icônica/ esquemas
1	Subtração	5	18	1	-	-	-
2	Divisão	3	5	-	12	-	4
3	Subtração	-	20	1	2	-	1
4	Divisão	-	4	1	16	1	2
5	Multiplicação	7	-	17	-	-	-
6	Subtração	4	20	-	-	-	-
7	Multiplicação	3	-	21	-	-	-
8	Subtração	11	11	-	1	-	1
9	Adição e Subtração	9	1	-	-	14	-
10	Multiplicação	11	-	3	1	-	9
11	Adição	24	-	-	-	-	-
12	Divisão	7	4	1	10	-	2

Nos problemas 2, 8, 9, 10, 12 observa-se que um número elevado de estudantes realizou operações diferentes das esperadas.

Verifica-se ainda que para o problema 11 todos os participantes utilizaram a operação aritmética esperada, ou seja, a adição. Entretanto, para este problema, como mostra a Tabela 3

(Acertos e erros no pré-teste) houve um número significativo de erro na resposta (87,5%), possivelmente, por se tratar de um problema não-rotineiro com excesso de dados no enunciado. Para este problema, a análise dos protocolos mostrou que, de maneira geral, os estudantes realizam a operação da adição com todos os dados numéricos do problema.

## **5.2 Pós-teste**

A Tabela 10 apresenta a distribuição de estudantes de acordo com os procedimentos de solução adotados pelos participantes no pós-teste. Apresenta ainda a operação aritmética esperada na solução dos problemas e a utilizada pelos participantes.

Tabela 9. Distribuição de estudantes segundo os procedimentos de solução adotados em cada problema proposto para o pós-teste

Probl.	Operação esperada	Procedimentos adotados					Pictográfica /icônica /esquemas
		Adição	Subtração	Multiplificação	Divisão	Duas operações	
1	Subtração	1	22	-	-	1	3
2	Divisão	1	6	2	14	1	3
3	Subtração	1	22	-	-	-	3
4	Divisão	1	-	-	22	-	4
5	Multiplificação	3	-	17	-	2	5
6	Subtração	3	22	-	-	-	2
7	Multiplificação	6	-	18	1	-	2
8	Subtração	7	16	-	1	2	1
9	Adição e Subtração	7	2	-	-	17	-
10	Multiplificação	6	-	6	-	-	15
11	Adição	27	-	-	-	-	-
12	Divisão	2	2	-	20	1	1

Nos problemas 2 e 10 observa-se que elevado número de participantes realizou uma operação diferente da esperada, não solucionando corretamente o problema. Além disso, verifica-se que o problema que obteve o maior número da operação aritmética esperada foi o problema de número 11, entretanto, como também ocorreu no pré-teste, mesmo utilizando a

operação esperada, no caso a adição, muitos estudantes erraram o problema (66,7%), como pôde ser visto na Tabela 4 que apresenta o percentual de acertos e erros pra cada problema do pós-teste.

Ainda, em relação ao problema 11, mesmo considerando que os estudantes tiveram baixo desempenho na solução do problema, uma análise comparativa entre o percentual de acertos no pré-teste e o pós-teste demonstrou que os estudantes tiveram aumento expressivo de desempenho: de 12,5 % de acertos no pré-teste para 33,3 % no pós-teste.<sup>21</sup>

## **6. Análise dos procedimentos de solução e formas de representação gráfica adotada pelos participantes nos problemas de estrutura aditiva**

Os procedimentos e a representação gráfica analisados a seguir foram extraídos dos protocolos dos participantes.

Para o *problema 1*, composição de duas medidas, os resultados evidenciam que, tanto no pré-teste como no pós-teste, a maioria dos participantes não encontrou dificuldade na solução, pois o índice de acertos foi na ordem de 75,0 % no pré-teste avançando para 95,8 % no pós-teste, como demonstraram as tabelas 3 e 4 respectivamente. Resultados estes que estão em consonância como aqueles encontrados por Guimarães (2005), Freitas (2005a) e Magina e Campos (2004).

Segundo Vergnaud (2005b) para os problemas de composição de duas medidas são compreendidos pelas crianças antes dos problemas de transformação e relação estática, que no caso são mais complexos e compreendidos apenas dois anos mais tarde aproximadamente.<sup>22</sup>

Nessa mesma direção, em problemas de estrutura aditiva nas séries iniciais do ensino fundamental, Nunes et al. (2005, p. 80) salientaram que primeiramente as crianças mostram-se capazes de resolver problemas simples entre o todo e suas partes, depois conseguem resolver

---

<sup>21</sup> Considerações adicionais sobre o problema 11 serão apresentadas na análise dos procedimentos de solução e representação gráfica dos problemas do pré-teste e pós-teste.

<sup>22</sup> Magina & Campos (2004) e Nunes e Bryant (1997) pontuaram que em geral, crianças de sete anos compreendem facilmente os problemas do tipo composição de duas medidas.

problemas inversos e, finalmente, resolvem também problemas sobre relações estáticas.

Na solução do problema 1, no pré-teste como no pós-teste a maioria dos estudantes utilizou como procedimento a operação aritmética esperada, a subtração. Contudo, como ilustra a Figura 11, outros procedimentos e formas de representação foram adotados pelos participantes.

Para solucionar o problema 1 do pós-teste (Figura 11) um dos participantes empregou uma estratégia diferenciada dos demais. No caso, o aluno utilizou a contagem dos dedos (representada pelo desenho) e o algoritmo da adição no sentido de “completar” para solucionar o problema.

O estudante em questão usou o esquema de ação “completar” e seu “teorema em ação”, implícito na solução do problema, pode ser descrito da seguinte forma: “se tem 18 meninos na classe, mas sei que no total são 29 alunos, então 18 até completar ou chegar aos 29 dá um total de 11 meninas”, resultado este que responde corretamente a pergunta do problema.

Ainda, possivelmente, para confirmar o resultado e demonstrar a maneira como solucionou o problema, o aluno realizou a “conta” ( $18 + 11 = 29$ ) e o desenho dos onze dedos, representando a “estratégia” adotada e, conseqüentemente, a resposta do problema. No entanto, nota-se que mesmo utilizando os dedos, a aluna sabe que a sua resposta será o número de alunos e não o número de dedos.

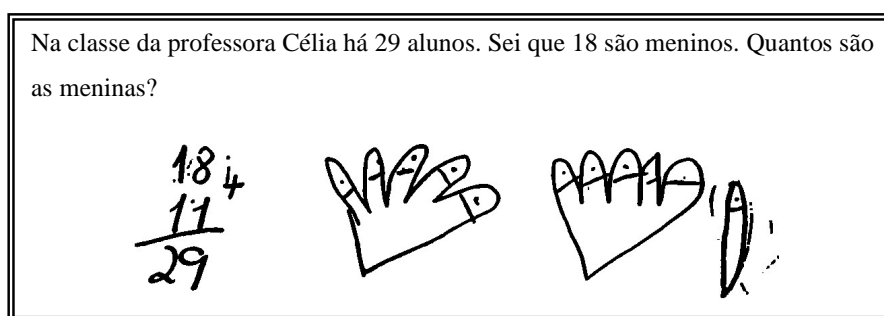


Figura 11. Procedimento de solução e representação gráfica para o problema 1 do pós-teste

Segundo Nunes et al. (2002, p. 43), este tipo de solução, usando os dedos, costuma ser classificado como “*pensamento concreto*”, no entanto, não se deve confundir o significado dessa expressão, pois o pensamento concreto não significa que a criança é incapaz de fazer



*abstrações.*

De fato, o que a criança demonstra claramente é sua capacidade de abstração e generalização: ela sabe que o resultado obtido com um símbolo – porque os tracinhos, bolinhas, dedos são, nesse caso, símbolos representando a quantidade – é o mesmo que seria obtido se ela tivesse realizado a operação matemática, neste caso, a adição.

De acordo com Schliemann (2003a), solucionar um problema representando os dados informalmente por meio de risquinhos ou pelos dedos da mão pode inicialmente facilitar a tarefa da criança possibilitando a ênfase na compreensão que é, enfim, o mais importante ao solucionar um problema. Assim sendo, somente após assegurar a compreensão é que a criança deve ser levada a representar o problema de forma simbólica.

A autora salientou ainda que em, um primeiro momento, é comum a criança utilizar a representação concreta e que esta é necessária inicialmente, no entanto, esta deverá ser seguida por uma passagem gradual à representação mais abstrata: o concreto poderá ser substituído por desenhos, os desenhos por tracinhos, os tracinhos pelo número escrito. Segundo a autora, na solução de problemas matemáticos é preciso ainda considerar que:

Dependendo de como o enunciado é apresentado, o problema poderá exigir um raciocínio mais ou menos complexo. Diferentes versões de um mesmo problema devem ser testadas e as formas mais simples devem ser alternadas com as mais complexas. É lidando com as diferentes formas que a criança poderá progredir (Schliemann, 2003a, p. 79).

Para o problema 3 foi dado o estado inicial e o estado final, sendo perguntada a transformação, ou seja, “o que aconteceu durante o jogo”.

Para o problema 3 do pré-teste, de acordo com a representação em forma de diagrama proposta por Vergnaud, o cálculo relacional pode ser assim representado:

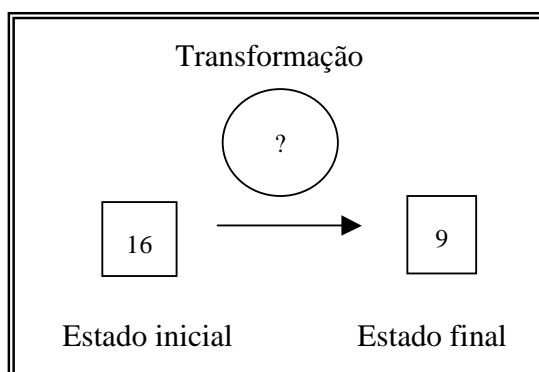


Figura 12. Representação em forma de diagrama para o problema 3 do pré-teste.

Para este tipo de problema, neste estudo a maioria dos participantes não teve dificuldade na solução, visto que os índices de acertos no pré-teste foi na ordem de 83,3 % e 87,5 % no pós-teste.

Salienta-se ainda que a maioria dos alunos utilizou a operação aritmética esperada para solucionar o problema, ou seja, uma subtração.

A Figura 13 ilustra um procedimento diferenciado de solução adotado por um dos participantes. Observa-se que por meio da representação pictográfica o aluno solucionou corretamente o problema.

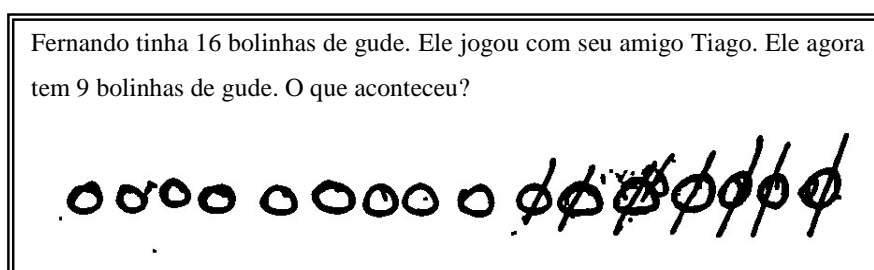


Figura 13. Procedimento de solução e representação gráfica para o problema 3 do pré-teste.

O exemplo exposto sugere que o sujeito utilizou a técnica da *contagem* para solucionar o problema. O aluno representou as 16 unidades por meio de marcas no papel, contou as 9 bolinhas que ele ficou no final do jogo e depois contou e riscou as bolinhas (transformação)

que indicam o que acontece durante o jogo. Neste caso, 7 bolinhas, chegando à resposta correta do problema “Ele perdeu 7 bolinhas”. Ou seja, utilizando marcas no papel, por meio da contagem “subtrativa” do total de bolinhas, chegou à resposta correta do problema.

Procedimento semelhante ao exposto na Figura 13 foi adotado por um dos participantes para solucionar o *problema 6* do pós-teste, uma transformação ligando duas medidas. Como demonstra a Figura 14, por meio da representação pictográfica o estudante solucionou corretamente o problema. Inicialmente o aluno desenhou os 50 litros de leite (total), agrupou os 36 litros utilizados para fazer o chocolate quente e contou os litros de leite que “sobraram” (14 litros), neste caso, a quantidade de litros de leite que a merendeira guardou.

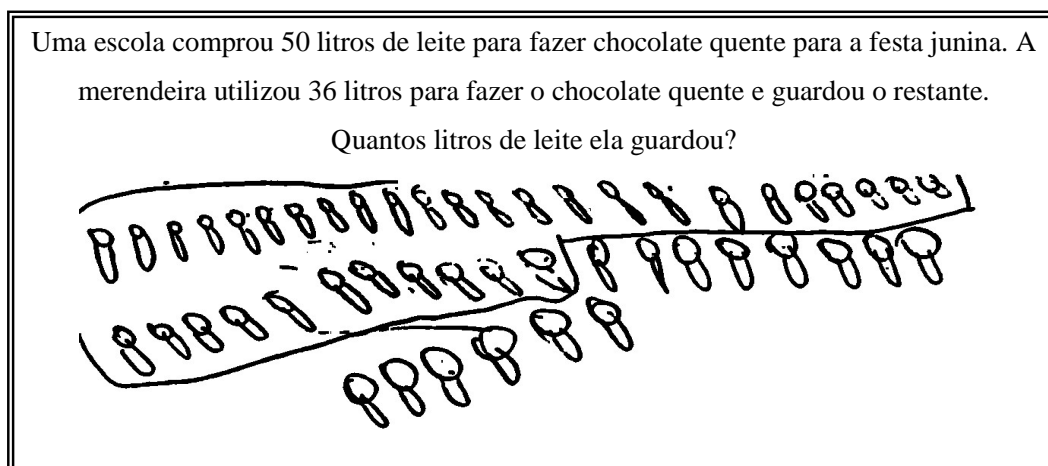


Figura 14. Procedimento de solução e representação gráfica para o problema 6 do pós-teste

A análise estatística referente à porcentagem de acertos e erros neste tipo de problema, tanto no pré-teste como no pós-teste, indicou que a maioria dos estudantes não apresentou dificuldade para solucionar o problema, pois o índice de acertos foi de 79,2 %, tanto no pré-teste como no pós-teste. Ainda, para solucionar o problema os alunos utilizaram a operação esperada, uma subtração.

A análise dos protocolos, referente ao *problema 8*, relação de comparação entre duas medidas, demonstrou que tanto no pré-teste como no pós-teste uma maior dificuldade dos participantes na solução deste tipo de problema e, conseqüentemente um índice percentual de desempenho inferior. Dados estes que encontram respaldo nos estudos desenvolvidos por

Vergnaud (2003, 2005) e corroboram com os dados obtidos em diversas pesquisas envolvendo a solução de problemas de estrutura aditiva, dentre elas as de Magina e Campos (2004), Freitas (2005a), Guimarães (2005), Pessoa e Da Rocha Falcão (2001).

Para o problema 8 do pré-teste, como mostra a Tabela 3, o percentual de acertos foi de 45,8 %. Já, no pós-teste, como indica a Tabela 4, o percentual de acertos foi de 62,5 %. Nota-se que apesar da melhora significativa de desempenho no pós-teste, estes percentuais são comparativamente menores que dos outros problemas rotineiros de estrutura aditiva presentes nos instrumentos de avaliação deste estudo.

A análise dos procedimentos, Tabela 7, indica ainda que um número elevado de alunos (n=11) do total de 27 participantes utilizou uma adição para solucionar o problema e que esta operação conduziu ao erro na solução, como pode ser observado por meio da Figura 15.

Marcelo tem 24 balas. Ele tem 8 a mais que Talita . Quantas balas Talita tem?

$$\begin{array}{r} 1 \\ 24 \\ + 8 \\ \hline 32 \end{array}$$

Figura 15 Procedimento de solução e representação para o problema 8 do pré-teste

Observando este tipo de erro cometido pelos alunos, Vergnaud e Durand (citado por Pessoa e Da Rocha Falcão: 1999) ressaltaram que este tipo de problema, em geral, é mais difícil porque os verbos que dão a informação numérica são semanticamente contrários à operação adequada à solução do problema. Ou seja, como no caso do problema 8, quando se fala “a mais” a operação, ao invés de adição, como a “pista” leva a crer, na verdade é de subtração. O inverso também procede, quando o problema fala “perdeu” ou “a menos”, ao invés da subtração, como o enunciado leva a crer, o problema é solucionado por uma adição.

Neste caso, a discrepância entre os aspectos semânticos do problema e a operação

necessária para a solução do problema (subtração) geram dificuldades que aparentemente mostram-se incompatíveis com a simplicidade da operação aritmética necessária à solução do problema, ou seja,  $24 - 8 = 16$  para o problema 8 do pré-teste e  $32 - 8 = 24$  para o problema 8 do pós-teste.

A Figura 16 ilustra um tipo de procedimento não numérico que levou à solução correta do problema. O aluno em questão utilizou um desenho (representação pictográfica) para representar os dados numéricos contidos no enunciado do problema.

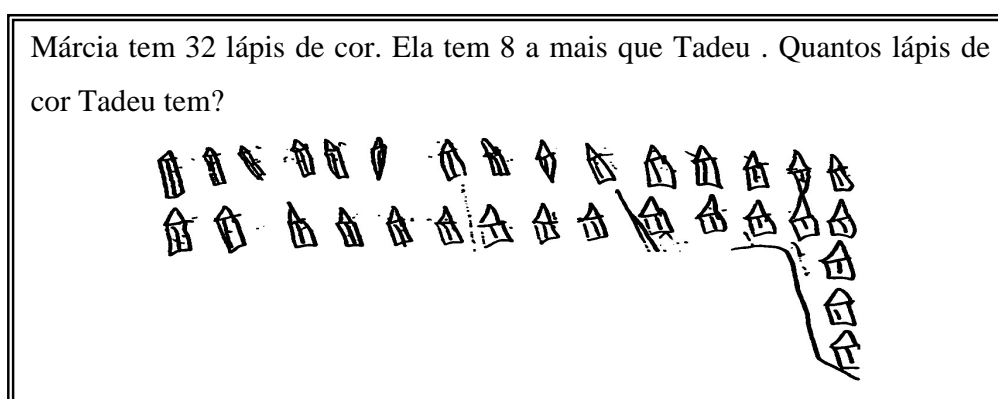


Figura 16. Procedimento de solução e representação gráfica para o problema 8 do pós-teste

Para o problema 9 do pré-teste e pós-teste, composição de duas transformações, envolvendo uma adição e uma subtração, as tabelas referentes à distribuição de acertos e erros em cada um dos problemas (Tabelas 3 e 4) apontaram que os participantes obtiveram o índice percentual de acertos de 54,2 % no pré-teste e 58,3 % no pós-teste, um índice considerado baixo para alunos de 4ª série, segundo os critérios avaliativos do SAEB e SARESP.

Salienta-se que no problema 9, considerado por alguns autores como de “dois passos”, a escolha correta das operações podem ter sido facilitadas pela linguagem empregada no enunciado problema, ou seja, a palavra “ganhou” remete a uma adição e “gastou” a uma subtração.

Para este tipo de problema, os erros mais comuns foram de dois tipos: adição de todos os números presentes no enunciado do problema (Figura 17) ou a realização somente do primeiro passo do problema.

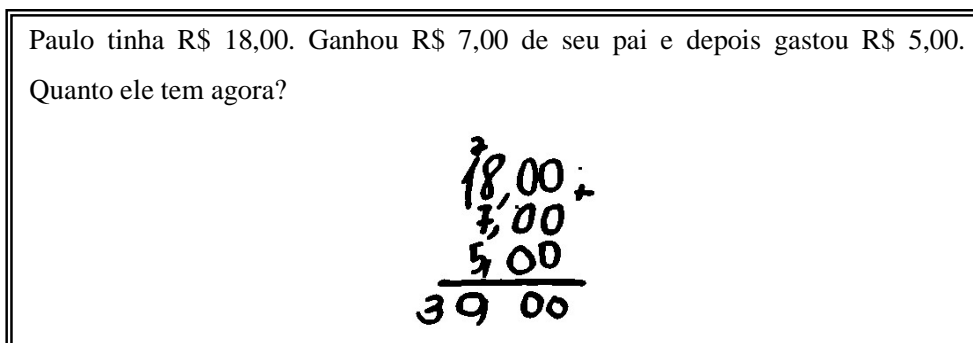


Figura 17. Procedimento de solução e representação gráfica para o problema 9 do pré-teste

Ainda, em relação ao problema 9, por intermédio da análise dos protocolos e das considerações apresentadas, pode-se inferir que além da necessidade do correto cálculo relacional parece que, a maior dificuldade dos participantes estaria relacionada a uma leitura mais atenta do enunciado.

Para o *problema 11*, problema de composição de medidas, do tipo não-rotineiro com excesso de informação, tanto no pré-teste como no pós-teste, como demonstram as Tabelas 3 e 4, houve um percentual significativo de erros na solução. No pré-teste o percentual de erros foi de 87,5 % e no pós-teste, apesar da melhora no desempenho, o percentual ainda é alto, na ordem de 66,7 %.

Apesar do elevado percentual de erros, salienta-se que houve a escolha correta da operação, no caso uma adição, por todos os participantes dessa investigação. Desta forma, pode-se inferir que a escolha da operação de adição pode ter sido influenciada pelo contexto do problema.

Em relação ao desempenho dos alunos no problema 11, a análise dos protocolos demonstrou que a dificuldade dos alunos esteve relacionada à seleção correta das informações (dados contidos no enunciado) e não na escolha e cálculo numérico da operação aritmética que responderia adequadamente a problema, como demonstram as Figuras 18 e 19.

Hemengarda é uma girafa. Ela adora colocar laços. Diz que eles valorizam o seu pescoço. Hemengarda tem 40 laços vermelhos, 56 de bolinhas coloridas, 4 amarelos, 8 de estampados diversos, 28 floridos e 30 cachecóis. Quantos laços Hemengarda tem?

$$\begin{array}{r}
 40 + \\
 56 \\
 4 \\
 8 \\
 28 \\
 30 \\
 \hline
 166
 \end{array}$$

Figura 18. Procedimento de solução, problema 11 do pré-teste: adição de todos os dados contidos no enunciado

Salienta-se que, no caso do problema 11 do pré-teste os participantes podem ter considerado laços e cachecóis como pertencentes à mesma categoria, o que pode ter influenciado na seleção correta das informações presentes no enunciado do problema.

Para a solução do problema 11 do pós-teste, um dos alunos adotou um procedimento diferenciado dos demais participantes. Como ilustra a Figura 19, o estudante realizou várias adições, contendo estas sempre duas parcelas. Primeiramente o aluno adiciona os primeiros dados apresentados no problema ( $54 + 40$ ) obtendo o total parcial de 94. A seguir, a este total, adiciona o próximo dado numérico do problema ( $94 + 6$ ) obtendo outro subtotal (100) e, assim sucessivamente, até adicionar *todos os números contidos no enunciado do problema*. Assim sendo, o aluno admite como resposta, o total de 152 roupinhas.

Observa-se, como no caso anterior, que esta resposta não responde corretamente a pergunta do problema, pois houve a adição de todos os dados contidos no enunciado, ou seja, as *coleiras* também foram adicionadas às *roupas*.

Marisbela é uma cachorrinha linda e vaidosa. Marinalva, sua dona, adora enfeitá-la. Ela diz que Marisbela também adora se sentir bela. Para você ter uma idéia, Marisbela tem 54 roupinhas estampadas, 40 brancas, 6 vermelhas, 18 pretas, 14 de bolinhas e 20 coleiras de diversas cores. Quantas roupinhas Marisbela tem?

$$\begin{array}{r}
 54 \\
 40 \\
 \hline
 94
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 1 \\
 94 \\
 6 \\
 \hline
 100
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 100 \\
 18 \\
 \hline
 118
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{r}
 118 \\
 14 \\
 \hline
 132
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 132 \\
 20 \\
 \hline
 152
 \end{array}$$

Figura 19. Procedimento de solução, problema 11 do pós-teste: adições parciais dos dados contidos no enunciado

Neste caso, o procedimento adotado ilustra também a propriedade associativa da adição, pois na adição de três ou mais parcelas de números naturais quaisquer é possível associar as parcelas de quaisquer modos, ou seja, com três números naturais, somando o primeiro com o segundo e ao resultado obtido somarmos um terceiro, obteremos um resultado que é igual à soma do primeiro com a soma do segundo e o terceiro.

### 7. Análise dos procedimentos de solução e formas de representação gráfica adotada pelos participantes em problemas de estrutura multiplicativa

Para esta análise e exposição dos procedimentos de solução e representação gráfica adotada pelos participantes nos problemas de estrutura multiplicativa, primeiramente, apresentam-se os problemas cuja operação aritmética esperada é uma divisão. Nos instrumentos de avaliação do pré-teste e pós-teste estes problemas são os de número 2, 4 e 12. Nessa apresentação, optou-se por uma análise conjunta desses problemas, fazendo-se as considerações necessárias, principalmente, no que diz respeito ao tipo de divisão: por partição



ou por cotas.

Observa-se que, para os problemas de divisão os estudantes fizeram uso de diferentes procedimentos: numérico (uso de uma das operações aritméticas), pictográfico ou icônico ou a combinação de ambos.

A Figura 20 ilustra como um dos estudantes, por meio do desenho (representação pictográfica) solucionou corretamente *o problema 2* de divisão por cota.

No caso ilustrado pela Figura 20, pode-se inferir, que como procedimento para solução o aluno pode ter realizado a técnica do agrupamento de duas maneiras. O aluno agrupou os ovos de três em três até completar o total de 48 ovos e depois contou o número de agrupamentos, no caso, 16 grupos ou ainda, o aluno primeiramente desenhou o todo (48 ovos), depois o separou em partes, cada uma contendo 3 ovos e finalmente contou o número de agrupamentos (16 grupos) que no caso representam o número de bolos que poderiam ser feitos com o total de 48 ovos.

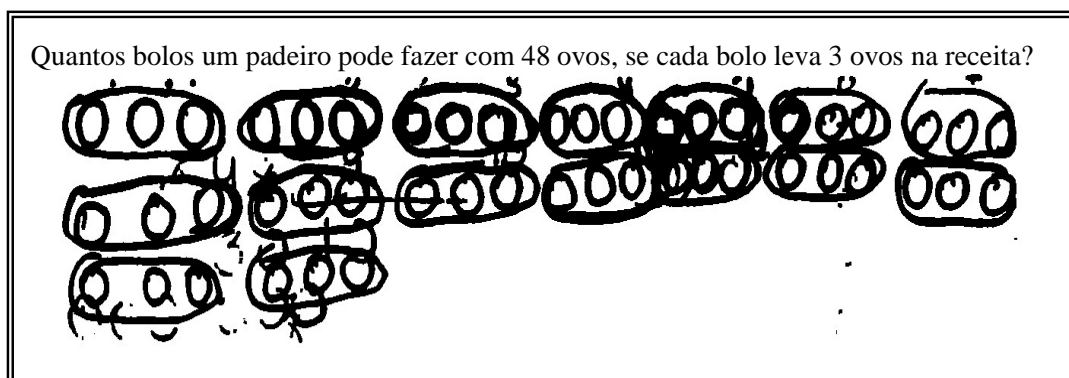


Figura 20. Procedimento de solução e representação gráfica do problema 2 do pré-teste.

Para os problemas de divisão, a literatura revisada apontou que alguns estudantes adotam também como procedimento o uso de reiteradas subtrações. Neste tipo de procedimento, a subtração repetida, o aluno subtrai um valor repetidas vezes do dividendo até esgotá-lo.

Neste estudo, para o problema 2 do pós-teste, como ilustra a Figura 21, apenas dois participantes adotaram este tipo de procedimento de solução e chegaram corretamente à

resposta.

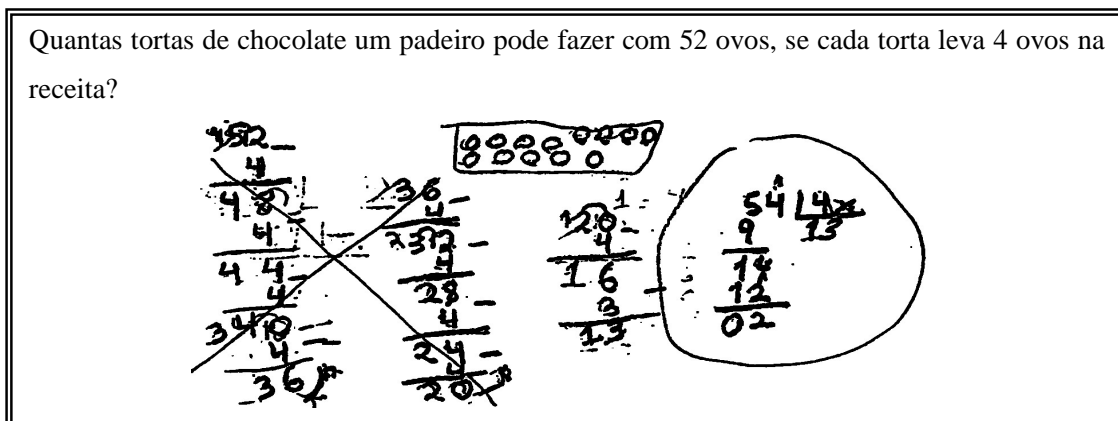


Figura 21. Procedimento de solução e representação gráfica do problema 2 do pós-teste

Por intermédio da Figura 21, observa-se também que o aluno, além do procedimento da subtração repetida, utilizou o algoritmo da divisão. E que, mesmo copiando de forma errada o número (dividendo) do problema (para 52, coloca 54) realizou corretamente o cálculo numérico e desconsiderou o resto (2); provavelmente por encontrar o número 13 na contagem das diversas subtrações repetidas realizadas (desenho das 13 bolinhas), bem como no resultado da divisão.

Por fim, ressalta-se que com exceção destes dois casos, a escolha da operação aritmética da subtração se deu de forma “errada”, não respondendo corretamente a pergunta do problema, uma vez que os estudantes utilizaram uma subtração “simples”, do tipo  $52 - 4 = 48$  e não as reiteradas subtrações. Neste caso, a opção pela subtração, em detrimento da divisão, levou a solução inadequada do problema e conseqüentemente erro na resposta.

Na análise dos protocolos referente ao *problema 4* do pré-teste e pós-teste, estrutura multiplicativa do tipo divisão partitiva, os alunos solucionaram o problema por intermédio de diferentes estratégias. Notou-se que, além da operação aritmética da divisão, alguns estudantes valeram-se de um procedimento de solução conhecido como “cálculo mental” como alternativa aos métodos mais tradicionais.

As Figuras 22 e 23 demonstram a maneira como dois estudantes, apoiados no cálculo mental, na divisão equitativa, em adições e subtrações parciais e nas regras do sistema de

numeração decimal, solucionaram corretamente o problema 4 do pós-teste.

Salienta-se que este problema envolvia uma prática social contextualizada, o uso de “dinheiro” em situações problemas e os valores utilizados não são altos, o que pôde ter contribuído na solução do mesmo.

Por intermédio da representação gráfica adotada, percebe-se que os estudantes, apoiando-se nas propriedades das operações e tendo como base a formação do sistema de numeração decimal (agrupamentos de 10 em 10), fizeram uso do procedimento ou estratégia conhecida como cálculo mental. Em geral, para este tipo de procedimento, os alunos realizam a decomposição do número, sabendo que, qualquer número pode ser representado pela soma das suas unidades, dezenas, centenas e demais casas que o compõem.

Como ilustra a Figura 22, um dos estudantes, por intermédio de subtrações repetidas dos subtotais gerados pelas distribuições chega à resposta correta do problema. Primeiramente, do total de R\$ 80,00 a ser repartido entre os cinco filhos o aluno distribuiu R\$ 10,00 (dezena exata) a cada “filho”. A seguir, realiza o agrupamento repetido das dezenas, totalizando R\$ 50,00. Utilizando uma subtração ( $R\$ 80,00 - 50,00 = 30,00$ ) percebe que o dinheiro pode continuar sendo distribuído, assim sendo, mais R\$ 5,00 (metade da dezena) é dado a cada filho, gerando um novo subtotal de R\$ 25,00. Uma nova subtração é realizada ( $30,00 - 25,00 = 05,00$ ). Para finalizar, o aluno distribuiu mais R\$ 1,00 a cada filho e não havendo mais dinheiro a ser repartido conclui que cada filho receberá R\$ 16,00, ou seja, a adição de cada uma das etapas da distribuição ( $10 + 5 + 1 = 16$ ).

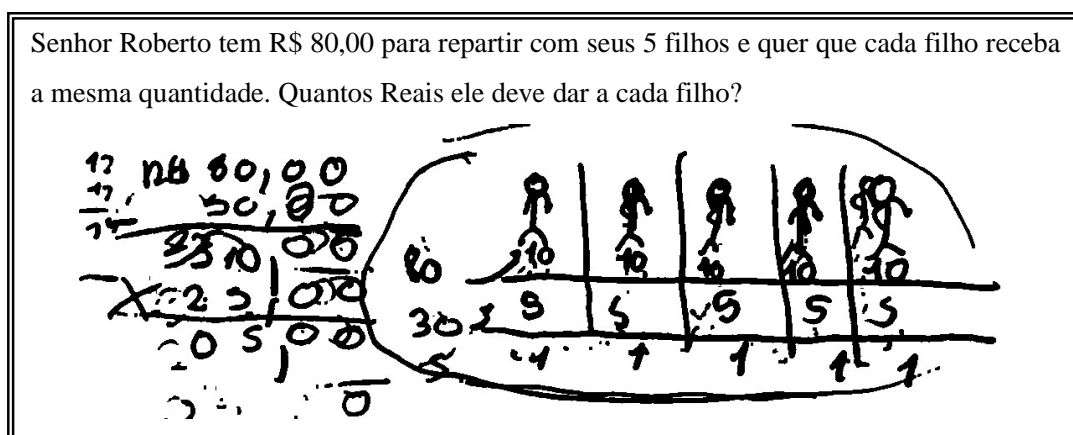


Figura 22. Procedimento de solução e representação gráfica do problema 4 do pós-teste

A Figura 23 ilustra uma situação parecida como o exemplo anterior, entretanto, observa-se que neste caso, o estudante faz uso de diversos procedimentos na tentativa de solucionar o problema. Primeiramente separa os dinheiro em notas de R\$ 10,00, depois realiza uma operação de divisão, porém não conclui a mesma e por fim tentando chegar a solução desenha os cinco filhos e faz a distribuição gradativa do dinheiro entre eles: R\$ 10,00, depois R\$ 5,00 e duas vezes R\$1,00, percebe-se que neste caso, o total é de R\$ 17,00 a cada filho. Por fim, neste caso, pode-se inferir que como as quatro alternativas de respostas eram R\$ 85,00, R\$ 20,00, R\$16,00 e R\$ 75,00 o estudante refez mentalmente o cálculo de distribuição ou optou pela alternativa mais próxima ao resultado encontrado, ou seja, a alternativa que apresenta os R\$ 16,00.

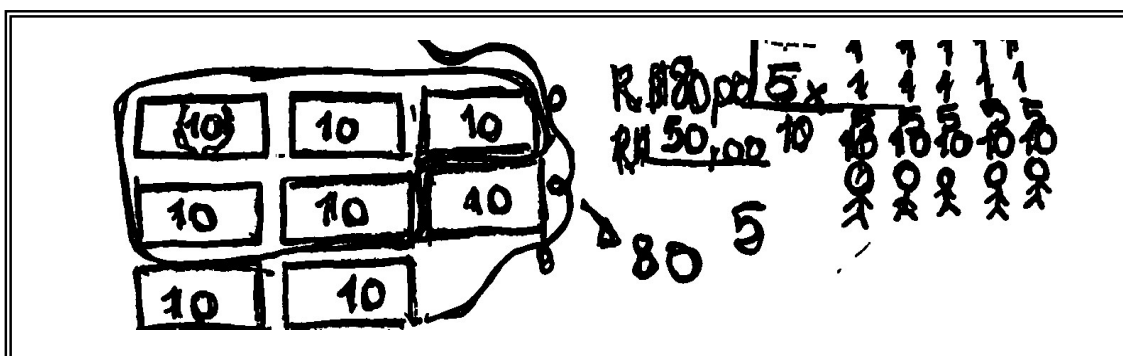


Figura 23. Procedimento de solução e representação gráfica do problema 4 do pós-teste

Como ilustraram as Figura 22 e 23, o agrupamento repetido, embora considerado elementar, mostrou ser um procedimento adequado para solucionar o problema. Observa-se também que, durante o processo de solução, o estudante levou em consideração os diferentes subtotaís obtidos. O objetivo é alcançado quando, a partir dos valores parciais, chega-se à quantidade original que seria totalmente repartida (R\$ 80,00), presente no enunciado do problema.

De acordo com Carraher, Carraher e Schliemann (2006, p. 60), este tipo de procedimento, *o agrupamento repetido*, é uma heurística adequada para resolver situações que requerem a multiplicação (adição repetida) e a divisão (subtração repetida).

A representação gráfica e os procedimentos apresentados nas Figuras 22 e 23 ilustram também a flexibilidade do raciocínio que consiste em compor e decompor a quantidade contida no enunciado do problema.

Para o *problema 12*, divisão por cota, a análise dos protocolos do pré-teste e a Tabela 3 (acertos e erros) demonstraram que os estudantes tiveram um percentual de erros maior neste tipo de problema quando comparados ao problema 4 do tipo divisão partitiva: 66,7% de erros no problema 12 e 33,3 % de erros para o problema 4. Estes resultados corroboram os estudos de Vergnaud (1990b, 1996, 2005b) e Nunes et al (2002, 2005) que apontaram que para as crianças, em geral, *é sempre mais fácil solucionar problemas diretos do que inversos*<sup>23</sup> (Nunes et al., 2005, p. 98).

No entanto, verifica-se por intermédio da Tabela 4, que no problema 12 do pós-teste os alunos tiveram elevação expressiva no nível percentual de desempenho: 25,0 % de erro e 75,0 % de acertos.

A Figura 24 ilustra como um dos participantes solucionou o problema 12 do pré-teste. Nesse caso, utilizando o procedimento conhecido como agrupamento, a representação pictográfica e a adição repetida o aluno chegou à solução correta do problema.

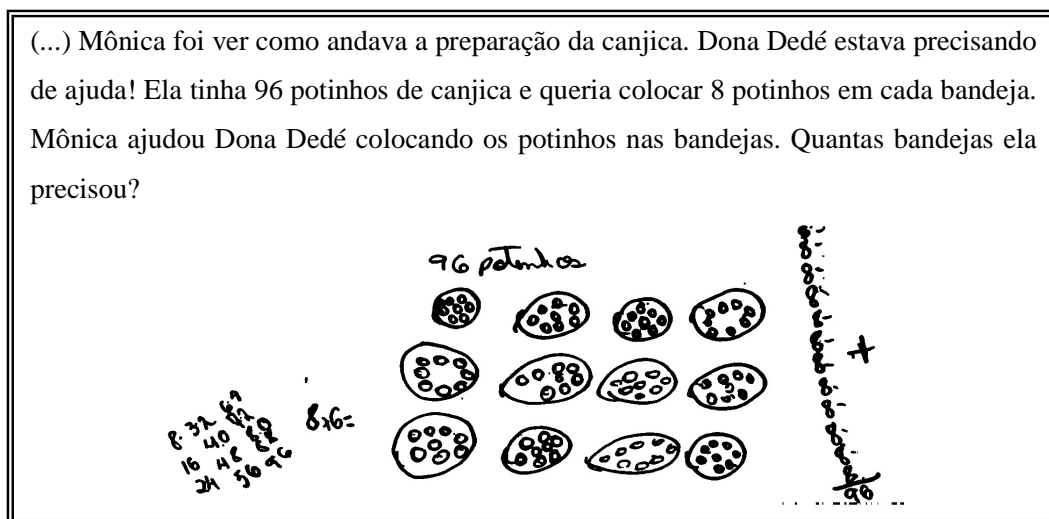


Figura 24 . Procedimento de solução e representação gráfica do problema 12 do pré-teste

<sup>23</sup> Para a divisão, Nunes et al (2005) chamam de problemas inversos o que Vergnaud denomina problemas isomorfismo de medida do tipo divisão por cotas.

A análise do protocolo desse estudante sugere que, inicialmente, o aluno separa os valores contidos em cada bandeja (cotas) até chegar ao valor total de 96 (dividendo) “potinhos” que seriam distribuídos nas bandejas. Logo após, conta o número de bandejas necessárias e chega à resposta do problema. Nesse caso, observa-se que o procedimento e o tipo de representação gráfica podem ter auxiliado o aluno na solução do problema.

Salienta-se que, este tipo de problema (divisão por cota), difere na compreensão das quantidades envolvidas. Enquanto que nos problemas de partição distribuem-se os doces entre as bandejas, buscando-se a quantidade de doces por bandeja, nos problemas de divisão por cotas já se tem a quantidade de doces por bandeja e o total, sendo a incógnita a quantidade de bandejas. Em geral, diz a literatura na área, na escola a diferença entre tais problemas, geralmente, não é considerada, tratando-se os mesmos como problemas iguais.

Ainda, em relação à divisão, tendo como exemplo o problema 12 do pré-teste, na divisão por cota a pergunta que se faz é sobre o número de bandejas, já no problema de divisão partitiva a pergunta que se faz é referente ao número de doces por bandeja. Contudo, nos dois tipos de problemas de divisão (partição e por cotas) as informações oferecidas são as mesmas e a pergunta também é equivalente. O que diferencia os dois tipos de problema é a situação descrita.

De acordo com Nunes et al. (2005) é difícil interpretar o comportamento dos alunos neste tipo de problema<sup>24</sup> existindo basicamente, dois tipos de procedimentos adotados na solução. Algumas, como parece ser o caso exemplificado na Figura 25, formam os “agrupamentos”; outros pegam à quantidade total e distribuem em grupos. Depois, contam o número de grupos e respondem o problema.

Este tipo de problema é descrito por Nunes et al. (2005, p. 97) como um problema inverso de multiplicação porque os alunos resolvem o problema com a mesma estratégia que utilizam para resolver problemas de multiplicação.

Por fim, os exemplos apresentados realçam também que o conceito de divisão não é um conceito fácil de compreensão como se pode pensar; pois, como salientaram Spinillo e

---

<sup>24</sup> Esta dificuldade está associada ao tipo de instrumento de avaliação utilizado (lápiz e papel).

Lautert (2006, p. 53) “lidar com situações de divisão envolve regras operatórias que implicam na utilização da subtração, da multiplicação e de divisões sucessivas”.

Para o *problemas 5* do pré-teste e pós-teste, tipo isomorfismo, tendo como operação aritmética esperada uma multiplicação, o resultado apresentado nas Tabelas 3 e 4 indicam que, de maneira geral, os estudantes não tiveram dificuldade na solução deste tipo de problema quando comparados aos problemas de multiplicação do tipo produto de medidas.

A Figura 25 ilustra um dos procedimentos adotados pelos estudantes na solução do problema 5 do pós-teste. A análise dos protocolos indicou que, além da operação aritmética da multiplicação, alguns estudantes se valeram de procedimentos diferenciadas para solucionar este tipo de problema.

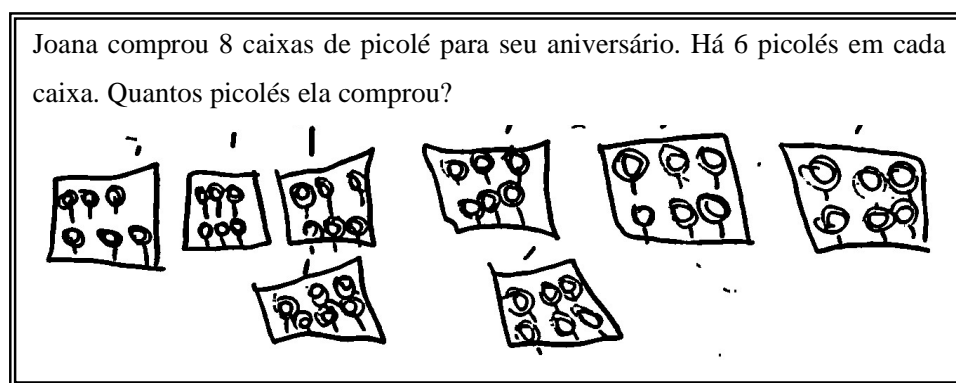


Figura 25. Procedimento de solução e representação (pictográfica) do problema 5 pós-teste

A Figura 26 ilustra outro procedimento que levou à resposta correta do problema: a adição repetida como alternativa para a solução. Neste caso um dos participantes, utiliza o procedimento da adição repetida do número 6 (número de picolés em cada caixa) até totalizar as 8 caixas compradas. Assim, por intermédio dos totais parciais consegue solucionar corretamente o problema.

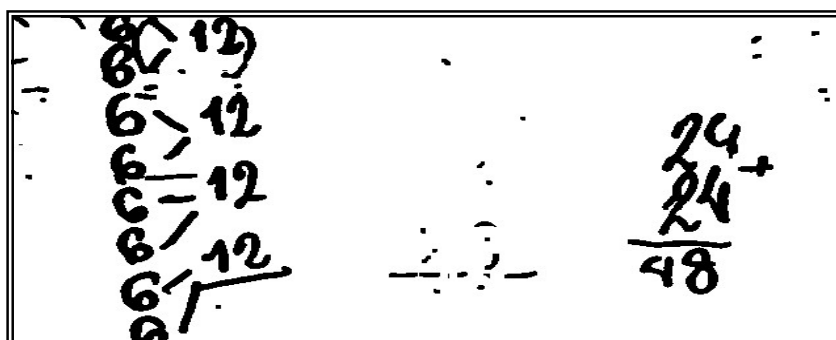


Figura 26. Procedimento de solução para solução do problema 5 do pós-teste

Ainda, em relação aos problemas de estrutura multiplicativa, tipo isomorfismo de medida, na análise comparativa das Tabelas 8 e 10 — referentes à distribuição de acertos e erros no pré-teste e pós-teste — observou-se um maior número de acertos nos problemas do tipo isomorfismo de medida, em detrimento dos problemas do tipo produto de medidas.

Para o *problema 10 do pré-teste e pós-teste*, a estrutura multiplicativa do tipo produto de medida, verificou-se que os estudantes utilizaram diferentes procedimentos e representação gráfica para solucionar o problema, a saber: o uso de esquema (árvore de possibilidades), a correspondência gráfica do tipo um-para-muitos e a operação aritmética da multiplicação.

A análise dos protocolos também permitiu verificar que dentre os diversos tipos de procedimentos e representação gráfica o diagrama de árvore foi o mais utilizado. Importante destacar que na escola onde foi realizada a pesquisa os professores utilizam o esquema “árvore das possibilidades” para introduzir os problemas multiplicativos do tipo produto de medida (ou análise combinatória). Salienta-se ainda que, de acordo com a professora da classe onde foi realizada a pesquisa, este tipo de problema só é introduzido no final da 3ª série do ensino fundamental.

Na análise dos protocolos do pré-teste e pós-teste notou-se que o diagrama de árvore, dentre as alternativas não numéricas, foi o procedimento e tipo de representação mais utilizado para solucionar problemas de estrutura multiplicativa do tipo produto de medidas, como ilustra a Figura 27.



Laura adora brincar de bonecas. Sua mãe é costureira e resolveu fazer várias roupinhas novas para suas bonecas. Ela fez 3 blusinhas, cada uma de um modelo. Para combinar com as blusas, fez também 2 saias, uma florida e uma lisa. Veja abaixo as novas roupinhas das bonecas. Quantos conjuntos diferentes Laura pode formar com as peças de roupas novas que sua mãe fez?

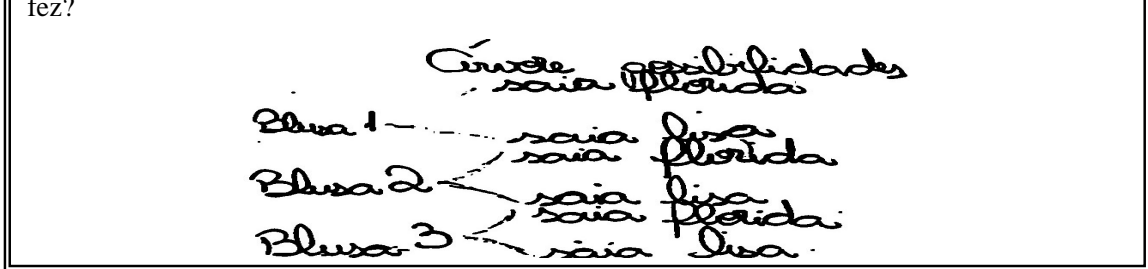


Figura 27. Procedimento de solução e representação gráfica, problema 10 pré-teste: diagrama de árvore

Nunes e Bryant (1997) classificaram este tipo de problema como do tipo produto cartesiano, indicando também este tipo de situação como um exemplo mais complexo da correspondência um-para-muitos, pois envolve dois conjuntos básicos (saias e blusas) e mais um terceiro conjunto (trajes). De acordo com os autores, um dos fatores que dificulta a solução deste tipo de problema consiste em que a correspondência um-para-muitos não está explicitada no enunciado verbal.

Ainda, e por intermédio de diversas pesquisas, os autores assinalaram que as crianças, no caso da correspondência um para muitos, já possuem esquemas quantitativos para solucionar tarefas que envolvem a solução de problemas de operações combinatórias.

A Figura 28 apresenta a maneira como dois estudantes solucionaram o problema 10 do pós-teste. O primeiro estudante realiza a correspondência um-a-muitos, ligando cada uma das camisetas a um tipo de bermuda. O segundo estudante, além da correspondência realiza a operação da adição:  $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$ , sendo que cada número “um” representa uma das combinações possíveis, sempre de uma das camisetas com cada uma das bermudas.

Ainda, em relação ao procedimento multiplicativo tipo correspondência um-a-muitos, Taxa (2001) salientou que este tipo de estratégia pode auxiliar na progressão das condutas dos

sujeitos até que se chegue um sistema combinatório. Contudo, segundo a autora *há que se caminhar e fazer progressos com relação à construção das operações multiplicativas*. (Taxa, 2001, p.198)

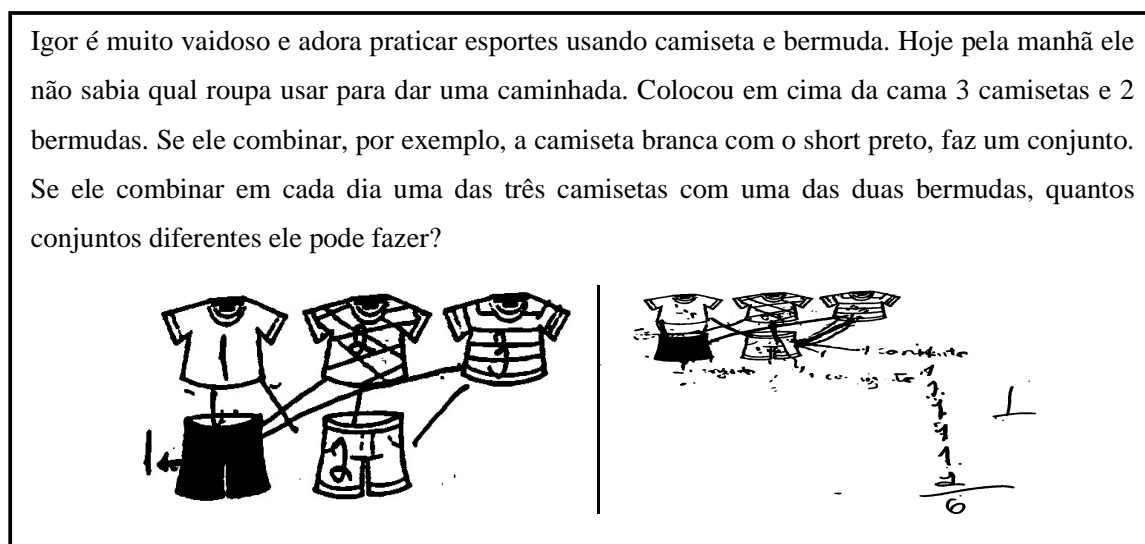


Figura 28. Procedimentos de solução e representação do tipo correspondência um-para-muitos

Em relação à escolha de uma das operações aritméticas na solução (procedimento numérico), a análise dos protocolos demonstrou que grande número de estudantes fez uso do algoritmo da adição para solucionar o problema. O resultado encontrado pelos estudantes refere-se à somatória dos números contidos no enunciado do problema. Neste caso, a adição do tipo “ $2 + 3 = 5$ ” não responde corretamente o problema, ou seja, não se obtém o número total de conjuntos possíveis (6 diferentes tipos de conjuntos).

Pode-se dizer então, que para os problemas do tipo produto de medidas, como no caso do problema 10, a resposta correta à pergunta “de quantas formas diferentes pode se vestir”, — seis possibilidades — vem de uma multiplicação ( $2 \times 3$ ), que está longe de ser um caso simples de adição de parcelas iguais.

A análise dos protocolos também permitiu verificar, que nos problemas de produto de medidas, não se passa facilmente dos procedimentos conhecidos como um-para-muitos e da árvore das possibilidades para o uso da operação aritmética da multiplicação, ou seja, para um procedimento mais econômico do tipo multiplicativo. No caso do problema 10 do Pós-teste,

para uma multiplicação do tipo “ $2 \times 3 = 6$ ”, onde o “2” representa a quantidade de bermudas, o “3” a quantidade de camisetas e o “6”, produto destas duas variáveis (bermudas e camisetas) representa a quantidade total dos diferentes tipos de conjuntos.

Na solução de problemas multiplicativos do tipo produto de medida, diversos pesquisadores, dentre eles Taxa (2001), Nunes e Bryant (1997) salientaram que as crianças podem progredir substancialmente em nível da aquisição multiplicativa se tiverem experiências diversificadas contemplando os aspectos psicológicos e matemáticos da operação de multiplicação em tarefas de solução de problemas.

Por fim, para os problemas de estrutura multiplicativa, os dados desta pesquisa revelaram que os estudantes tiveram maior dificuldade na solução dos problemas inversos de multiplicação e divisão. Neste sentido, como ressaltaram Nunes et al (2005), os problemas inversos, abordados por Vergnaud como produto de medidas e divisão por cotas, são mais complexos, podendo causar dificuldade até mesmo para os alunos da quarta série.

De qualquer forma, pesquisas na área da Educação Matemática, sugerem que os problemas inversos de estrutura multiplicativa, do tipo produto de medidas e divisão por cotas, embora sejam considerados mais difíceis de serem ensinados e compreendidos, devem ser oferecidos a crianças pequenas desde a educação infantil.

## **8. Os problemas de estrutura aditiva e multiplicativa presentes nos instrumentos de avaliação do pré-teste e pós-teste: uma síntese**

Referente aos procedimentos de solução adotados pelos estudantes conforme se pode observar nas Tabelas 9 e 10, os participantes deste estudo, em sua grande maioria, fizeram uso de uma das quatro operações aritméticas como principal estratégia para solucionar os problemas. Entretanto, observa-se também que alguns alunos se valeram de outros procedimentos e representação gráfica (não numérica) na solução dos problemas, tais como, a representação pictográfica, a icônica e o uso de esquemas.

Salienta-se novamente que na aplicação dos instrumentos de avaliação (pré-teste e pós-teste) não houve interferência do pesquisador e o recurso da comunicação (linguagem oral) para que os estudantes pudessem expressar e/ou justificar verbalmente a maneira escolhida

para solucionar o problema, exprimir suas dúvidas, trocar informações e pontos-de-vista. Portanto, as análises aqui adotadas possuem limitações, pois tão importante quanto à análise dos procedimentos de solução e suportes de representação gráfica são as justificativas dos estudantes sobre suas ações.

Como pontuou Vergnaud (1979, p. 264), quando o aluno usa um certo procedimento para solucionar um problema, ela está usando um “teorema-em-ação” o qual ainda não é ainda um teorema. Quando o aluno é capaz de repertir verbalmente um teorema, isto não é necessariamente um teorema em ação. Segundo o autor, “não existe pensamento operacional sem a coordenação desses dois critérios”.

Ainda, para Vergnaud (1990b) o funcionamento cognitivo do sujeito em situação depende do estado de seus conhecimentos, implícitos ou explícitos. Segundo o autor, é necessário portanto conceder uma grande atenção ao desenvolvimento cognitivo, a suas rupturas, a complexidade relativa a classe de problemas, procedimentos, representações simbólicas, a análise dos principais erros e das principais descobertas.

Além disso, em relação ao tipo de procedimentos e formas de representação gráfica adotados pelos participantes, é preciso considerar que os problemas apresentados no pré-teste e pós-teste possuíam números relativamente de valores baixos<sup>25</sup>, o que pôde ter influenciado na escolha de determinado procedimento pelo aluno.

Neste sentido, Moreno (2006) assinalou que, para quantidades de valores baixos, procedimentos icônicos e pictográficos são absolutamente funcionais. Em contrapartida, o autor ressaltou que se aumentasse a quantidade em jogo, o aluno, com os limites de seu conhecimento, poderia buscar outros procedimentos.

Nesta investigação, notou-se que, alguns estudantes além de usar símbolos para representar quantidades utilizaram também, para solucionar o mesmo problema, o uso de um *sistema simbólico*, o sistema de numeração, para quantificar, calcular e por fim definir a

---

<sup>25</sup> Neste estudo, e de acordo com Vergnaud (1979), as análises apresentadas se portam, principalmente, ao cálculo relacional e não a ao cálculo numérico. Entretanto, isto não significa que a “habilidade do cálculo numérico”, ou a “técnica operatória” não sejam importantes na solução correta dos problemas. Ressalta-se que, em relação às dificuldades apresentadas pelos participantes deste estudo, as mesmas estão diretamente relacionadas à compreensão do enunciado dos problemas, a escolha da operação correta e ao cálculo relacional e não necessariamente ao cálculo numérico em questão.

resposta numérica que responderia adequadamente ao problema.

Nesse sentido, Nunes et al. (2002), pontuaram que nos estudos de Vigotski percebe-se claramente a importância atribuída por ele à coordenação entre este tipo de atividade prática desenvolvida pelo aluno (o uso dos símbolos) e os sistemas simbólicos convencionais adotados socialmente em determinada cultura.

Sabe-se que os estudantes fazem uso de diversos tipos de representação, não somente para comunicar para outros a maneira como solucionaram o problema. As representações também ajudam os alunos a pensar, a lembrar, a guardar informação e a calcular. Neste sentido, Panizza (2006, p. 25) salientou que “as representações são um meio para a resolução do problema e desempenham funções diferentes da função de comunicação para outros de algo pensado anteriormente”.

Nesta mesma direção, Vergnaud (1998) afirmou que a representação não é uma coisa estática, mas um processo dinâmico, já que pode demonstrar como o caminho da ação é organizado. Assim sendo, além de expressar a forma de pensar do estudante, a representação pode fazer parte do próprio raciocínio, facilitando também a compreensão do problema.

Como assinalaram Spinillo e Lautert (2006, p. 68) “a representação é, portanto, uma via de mão dupla que pode tanto expressar como constituir as formas de raciocinar das crianças na resolução de uma dada situação”.

Na análise dos protocolos, verificou-se que, para uma mesma tarefa, os alunos fizeram uso de uma variedade de procedimentos de solução. Como salientou Vergnaud (1979), não existe um único caminho para se chegar à resposta, entretanto, os diferentes procedimentos, errados ou certos, não são equivalentes do ponto de vista cognitivo.

Assim, por meio dos diversos exemplos apresentados, evidenciou-se que existem inúmeras maneiras de solucionar problemas matemáticos, os quais nem sempre correspondem a aqueles privilegiados pela escola. Os professores, cientes de tamanha diversidade de “modos de pensar”, poderão propor diferenciadas situações que permitam aos alunos expressar seus conhecimentos, sendo ponto de partida para discussão, retomada e ensino de conceitos complexos inseridos no campo das estruturas aditivas e multiplicativas.

Quanto às operações aritméticas necessárias na solução dos problemas, por meio das análises dos dados dos instrumentos de avaliação do pré-teste e pós-teste, constatou-se que,

em geral, os estudantes não tiveram dificuldade quanto à realização do cálculo numérico. Para os participantes deste estudo, notou-se que, em geral, as dificuldades apresentadas pelos alunos referem-se ao cálculo relacional (relativo à compreensão das relações numéricas envolvidas) e não ao cálculo numérico (relativo ao uso do algoritmo).

Segundo Pessoa (2002) a solução correta dos problemas exige do estudante a competência para a realização do *cálculo relacional* o qual capacita o aluno na escolha da operação adequada ao que o problema propõe para que depois possa haver a realização do *cálculo numérico* correspondente, ou seja, descobrir um caminho eficaz para solucionar os problemas e, quando necessário, no percurso da solução, identificar a operação aritmética a ser utilizada de acordo com o contexto ou situação e realizar a mesma.

Enfim, no que diz respeito ao cálculo e a realização correta dos algoritmos das operações, percebe-se que elas só fazem sentido se associadas à competência para identificar qual, ou quais são as operações necessárias para solucionar um determinado problema. Em última instância, pode-se dizer que é o problema que justifica a escolha ou a necessidade de uma determinada operação, ou seja, uma situação problema que precisa ser solucionada é que gera a necessidade de um procedimento matemático capaz de solucioná-la.

Ainda, na solução dos problemas pelos estudantes, é preciso considerar a necessidade de compreensão do enunciado. Neste sentido, Brito (2006) salientou que este tipo de tarefa exige tanto a habilidade verbal (necessária à leitura e à compreensão do problema) quanto à habilidade matemática (compreender a natureza matemática do mesmo) já que, a primeira etapa da solução é, basicamente, ligada à compreensão verbal do enunciado do problema. Para a autora, somente após a compreensão do enunciado o estudante consegue entender a estrutura matemática subjacente à história, a linguagem, ao revestimento ou envoltório do problema.

Assim, e de acordo com Brito (2006), a habilidade verbal é essencial para a compreensão do envoltório do problema, enquanto que a habilidade matemática é necessária para a percepção do espaço do problema, quais algoritmos são exigidos e quais os resultados são admitidos.

Desta forma, na solução dos problemas, uma leitura compreensiva do enunciado pode favorecer a execução da tarefa de forma eficaz.

## 9. Análise qualitativa descritiva das sessões de interação social em díade

Por meio das transcrições das sessões videografadas, dos registros do pesquisador e dos protocolos de solução de problemas gerados pelas díades realizou-se a análise descritiva das sessões de interação social em díade durante a solução dos problemas aritméticos rotineiros e não-rotineiros.

De forma conjunta, tendo como base a literatura revisada, as teses defendidas por Vigotski e os estudos de Vergnaud, apresenta-se também uma análise e reflexão mais sistemática sobre os procedimentos de solução adotados pelas diversas díades na solução dos problemas.

As representações gráficas adotadas pelas díades, intimamente ligadas às escolhas dos procedimentos, foram assim categorizadas: icônica ou pictográfica; correspondência um-a-um e um-a-muitos, diagrama de árvore e uso exclusivo das operações aritméticas.

Os procedimentos e representações, gráficas ou orais, bem como as diversas etapas da solução dos problemas vivenciadas pelos membros das díades, serão elucidadas por intermédio de alguns fragmentos dos diálogos estabelecidos pelos participantes e pela análise e apresentação dos protocolos gerados pelas díades.

Da análise das sessões videografadas as relações de interação social estabelecidas entre os componentes das díades foram assim categorizados:<sup>26</sup>

(a) cooperativo: os dois componentes da díade trabalham juntos no decorrer da sessão havendo participação de ambos.

(b) cooperativo, porém com certa manutenção da individualidade: os participantes discutem sobre o que é necessário para solucionar o problema; entretanto, às vezes, realizam a tarefa separadamente, comparando e conferindo posteriormente os procedimentos adotados e a resposta ao problema. Um dos participantes procura acompanhar o outro e auxiliar quando necessário, havendo participação de ambos na solução da tarefa.

(c) liderança amigável: a relação é cooperativa, porém um dos membros da díade

---

<sup>26</sup> As categorias apresentadas foram adaptadas dos estudos de Carvalho (2001), César (1999) e Loos (2004), mantendo-se as devidas diferenciações quanto aos tipos de relações de interação social encontradas neste estudo.

exerce a liderança e o outro apóia-se nesta liderança de forma amigável.

(d) liderança: um dos membros da díade quer exercer a liderança enquanto o outro reclama, o relacionamento torna-se mais tenso.

(e) liderança “forçada”: um dos membros da díade exerce a liderança e conduz a solução do problema, porque o outro membro quase não “fala” ou o parceiro mantém-se distraído ou alheio a situação. O participante que lidera reclama a não participação do companheiro da díade.

(f) alternância: o comportamento dos componentes da díade se alterna durante a solução do problema, ou seja, ora há uma relação de liderança forçada, ora a relação é cooperativa.

Além da categorização quanto ao tipo de relação entre os integrantes da díade, perceberam-se diferentes momentos de leitura do enunciado do problema pelos estudantes. Observou-se que estes momentos estavam relacionados a diferentes propósitos e que os atos da fala dos sujeitos tinham diferentes funções. Assim sendo, em relação à leitura, foram identificadas as seguintes ações entre os componentes das díades durante a solução dos problemas<sup>27</sup>.

1. um dos participantes propõe que o problema seja lido novamente, contudo, o companheiro não concorda com a sugestão ou não presta atenção a esta nova leitura.

2. um dos participantes sugere ou inicia uma repetição ou retomada da leitura do problema, logo a seguir, o companheiro dá sinal que concorda com a proposta do colega.

3. há uma repetição da leitura como registro mnemônico: o aluno repete o que foi dito para que o trecho enunciado não seja esquecido.

4. ocorre a repetição como auxílio para o registro: um dos participantes repete vagarosamente o que foi dito para auxiliar a o registro.

5. repetição para retomada da solução: o aluno repete o que foi dito para dar continuidade à solução do problema.

---

<sup>27</sup> Com as devidas peculiaridades da investigação, Leal & Luz (2001), em situação de produção de textos narrativos em pares nas, realizaram uma classificação dos atos da fala de forma similar à apresentada neste estudo.



6. nova leitura para compreensão do problema: um ou os dois participantes fazem novamente a leitura tentando compreender o problema.

7. leitura para retomada das informações do problema: o aluno lê o problema para retomar a seqüência da apresentação e decidir sobre a continuidade da solução.

8. leitura para revisão: um participante lê novamente o problema para verificar se a resposta atende a pergunta do problema.

Para dar prosseguimento à análise qualitativa dos fragmentos é preciso ainda ressaltar que em uma relação de interação social não se pode considerar apenas os argumentos verbais. Entonações, olhares, pausas e conhecimentos anteriores sobre o parceiro também podem levar os sujeitos à aceitação de um argumento e influenciar a interação entre os componentes das díades.

Por fim, a seguir, por intermédio dos fragmentos das verbalizações entre os membros das díades, serão apresentados exemplos das categorizações expostas. Para garantir que os estudantes não sejam identificados os nomes são fictícios, as palavras em negrito são as enfatizadas pelos alunos por meio de entonação de voz diferenciada e os gestos ou expressões, assim como, outras informações são indicadas por meio de parênteses.

### **Fragmentos dos diálogos estabelecidos entre os participantes em situação de interação social durante a solução de problemas aritméticos**

As escolhas dos fragmentos transcritos recaíram, em geral, sobre as interações em díades em que um ou os dois participantes tiveram um ganho expressivo de desempenho, assim como amostras que ilustram diferentes maneiras de solucionar o mesmo problema e verbalizações que justificam os procedimentos e representações gráficas adotados pelos componentes da díade, ou seja, que projetam os conceitos-em-ação e os e teoremas-em-ação presentes na solução dos problemas.

Salienta-se ainda que a apresentação dos mesmos não coincide com a ordem das sessões de interação ou dos problemas apresentados no anexo III deste estudo, pois, para melhor fluidez do texto, e com base na literatura revisada, primeiramente apresentam-se as interações em díade durante a tarefa de solução de problemas de estruturas aditiva e, logo a

seguir, as interações em problemas de estrutura multiplicativa, tipo rotineiros e não-rotineiros. No entanto, no início da apresentação de cada fragmento é indicado em qual sessão se encontra o problema, o tipo de formação de díade e, para facilitar o acompanhamento dos atos da fala dos participantes, apresentam-se os problemas na íntegra.

Ainda, os fragmentos transcritos ilustram também a importância e as diferentes funções da linguagem (oral e escrita) no desenvolvimento da interação social e na solução do problema propostos. Pois, vista como um sistema simbólico, a linguagem na concepção vigotskiana, facilita o contexto de comunicação e auxilia na construção do pensamento matemático. Como assinalado em diversas passagens deste texto, por intermédio da linguagem os estudantes anunciam sua forma de pensar ao companheiro, esquematizam juntos a solução do problema, trocam opinião, argumentam e chegam à resposta propriamente dita.

Neste sentido, como anunciou Vigotski (2005, 2001), a linguagem é uma ferramenta para o pensamento e mediadora no desenvolvimento conceitual aritmético.

Por fim, como pontuou Moreno (2006), o fato de ter de defender o produzido exige que o aluno elabore argumentações para demonstrar a validade de suas afirmações e, ao dar exemplos daquilo que afirmam, os erros — se houver — são debatidos conjuntamente, o que favorece uma maior tomada de consciência dos mesmos.

## **9.1 Apresentação e análise de fragmentos de solução em díade de problemas de estrutura aditiva**

**Fragmento 1:** *Díade assimétrica:* Júlia (médio desempenho) e Natália (baixo desempenho)

*Sessão de interação número 1.*

*Problema:* Leonardo tinha 55 figurinhas no seu álbum de futebol. Pablo deu a ele mais 22. Quantas figurinhas ele tem agora?

Natália: *Se **tinha**, não tem mais e ele ganhou vinte e dois. Então a resposta é vinte e dois.*

Júlia: *É de mais.*

Natália: *Ele **tinha** cinquenta e cinco, mas perdeu então **agora** ele tem vinte e dois.*

Júlia: *Ele não perdeu, ele **tinha**.*

Natália: *Tem alguma coisa errada* (Natália puxa a folha para si, Júlia reclama que ela quer

fazer sozinha. O clima entre as duas torna-se mais tenso).

Natália, de posse da folha, lê em voz alta novamente o problema.

Natália: *É ele **tinha**, não tem mais, você concorda Júlia?*

Júlia: *Concordo, porque ele tinha então ganhou mais vinte e dois, então ele ficou com vinte e dois.*

O fragmento 1, ilustra a relação de interação social, classificada neste estudo como “liderança”. Percebe-se que a liderança é exercida por Natália; entretanto, Júlia reclama e o relacionamento entre elas torna-se mais tenso.

Este problema, tipo composição de duas medidas, de maneira geral foi considerado fácil pelos alunos, como demonstram as falas de Renan: (*Moleza*), Bruno (*fácil, facinho*), Carlos (*é só fazer de mais*), dentre outras. No entanto, por intermédio da transcrição acima, percebe-se a dificuldade da díade Júlia e Natália na solução. As alunas se prenderam no verbo do enunciado, na palavra “tinha”, para elas, se tinha não tem mais. A maneira como foi concebido o enunciado do problema pode ter levado a confusão desta díade.

No problema apresentado há ainda a questão semântica relacionada à ação, ao verbo do enunciado. Para a aluna a palavra tinha indica passado, não tem mais. A operação a ser efetuada era uma adição, correspondendo uma regra de ação do tipo “se ele tinha 55 e ganhou 22 então ficou com 77”. No entanto, a justificativa da díade, teorema-em-ato expresso, era “se ele tinha 55, não tem mais. Depois, ganhou 22, então ele tem 22”.

Nota-se que este teorema-em-ato poderia ser verdadeiro em outras situações onde há uma justificativa subsequente à situação inicial para a palavra “tinha”, como por exemplo, “Leonardo tinha 55 figurinhas (perdeu 10). Pablo deu a ele mais 22. Quantas figurinhas ele tem agora?” Por fim, esta díade não solucionou conseguiu chegar à solução correta do problema.

Ao longo das sessões de interação social observou-se que algumas dificuldades dos estudantes na solução dos problemas estavam na compreensão e interpretação do enunciado, referentes aos elementos constituintes do estudo da Língua Portuguesa. Neste sentido, Machado (2001, p. 126) ressaltou que há uma impregnação mútua entre a Matemática e a Língua Materna. O autor caracterizou tal impregnação “por meio do paralelismo nas funções que os dois temas desempenham, enquanto componentes curriculares, da complementaridade

em suas metas principais e da imbricação nas questões básicas no ensino de ambas.” Destacando ainda a necessidade desta impregnação para a superação das dificuldades com o ensino de Matemática.

**Fragmento 2.** *Díade assimétrica*: Sérgio (médio desempenho) e Priscila (baixo desempenho)  
*Sessão de interação número 2.*

*Problema*: Patrícia coleciona papéis de carta. Ela deu 12 para sua amiga Aline. Agora Patrícia tem 25. Quantos papéis de carta Patrícia tinha antes?

O fragmento 2, ilustra a relação de interação social entre os componentes da díade tida como “liderança amigável”, pois a relação é cooperativa, porém um dos membros da díade exerce a liderança e o outro apóia-se nesta liderança de forma amigável.

Priscila lê o problema em voz alta e Sérgio acompanha a leitura. Sérgio conduz a sessão, pois inicialmente Priscila não compreende o problema.

Priscila: *Vinte e cinco menos doze.*

Sérgio: *Tá perguntando antes!*

Sérgio coloca a conta no papel  $25 + 12 = 37$ . Priscila observa atentamente o que Sérgio está fazendo.

Priscila: *Ah! É antes!* (Priscila lê o problema novamente buscando compreender o problema). *Eu pensei, só que tava errado. Eu pensei que ela tinha depois, mas é quanto ela tinha antes. É doze menos vinte e cinco.*

Sérgio: *A conta é vinte e cinco mais doze, é quanto ela tinha antes.*

Priscila presta atenção, lê o problema silenciosamente mais uma vez, demonstra muito interessada nas explicações de Sérgio, por fim, parece compreender as explicações.

Priscila: *Entendi! É que ela tinha antes e não quanto ela tinha depois.*

Priscila parece ter compreendido que para saber quanto ela tinha antes era necessário fazer uma adição e não uma subtração,  $25 + 12 = 37$ .

Este é um exemplo de problema de estrutura aditiva, classificado por Vergnaud (1990b,1996,1997) como de uma transformação ligando duas medidas. No caso, para a solução, a situação é aditiva, onde não se tem o estado inicial, a transformação é negativa e se tem o estado final. De acordo com Vergnaud (1996, p. 21) já que não se pode querer ensinar

às crianças de 7 anos o caminho algébrico que passa do problema  $\square - 12 = 25$  à solução  $\square = 25 + 12$ , temos que abandonar este tipo de representação simbólica e adotar uma representação acessível a esta idade. Vergnaud (1996,1997) propõe então, o tipo de representação a seguir.

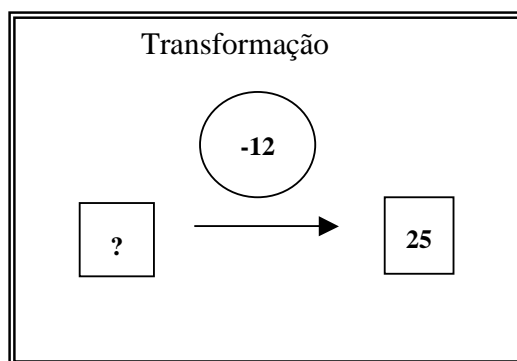


Figura 29. Diagrama proposto por Vergnaud para problema de transformação ligando duas medidas.

No caso, este é um exemplo de uma situação aditiva envolvendo uma transformação. Não se sabe quantos papéis de carta Patrícia tinha antes, mas se conhece a transformação, no caso, negativa (-12), pois ela deu 12 papéis de carta a sua amiga ficando com 25 (estado final). Pergunta-se que quantia ela tinha inicialmente, antes de dar os papéis de carta a sua amiga Aline.

De acordo com Vergnaud (1998) as expressões lingüísticas, sentenças e textos, são parte importante na matemática. No caso, para discriminar entre o estado inicial e o estado final, as crianças usam a oposição passado/presente ou presente/futuro dos verbos, advérbios como “agora”, preposições como “antes” ou “depois”.

Nunes e Bryant (1997) realçaram que há formas diferentes de solucionar problemas com montantes ausentes. Uma destas formas é a contagem, onde a criança, utilizando, por exemplo, os dedos, conta até vinte e cinco ou memoriza este número e segue adiante contando nos dedos até todos os elementos que foram retirados (no caso doze) até alcançar a quantidade inicial, no caso trinta e sete papéis de carta. Segundo os autores (1997) esta solução é uma representação explícita das ações no problema e pode ser eficientemente usada por crianças

que não conseguem dizer que operação aritmética utilizou para solucionar o problema.

Ainda, segundo os autores, outra estratégia que poderia ser adotada seria uma adição, como foi o caso da díade Sérgio e Priscila; um procedimento de solução de problemas que depende da capacidade da criança em perceber a adição e a subtração como operações inversas. No caso desta díade, isso significa elaborar que a resposta pode ser atingida adicionando o estado final (25) à transformação (12) encontrando-se assim o estado inicial.

Para a díade Sérgio e Priscila, notou-se a dificuldade de Priscila em compreender este tipo de situação. Contudo, quando ela percebe, com a ajuda de Sérgio, que para saber quanto se tinha “antes” ela precisa fazer uma adição e não uma subtração sua expressão de contentamento demonstra uma nova “descoberta” e sua fala indica ter ocorrido compreensão do problema: “Entendi! É que ela tinha **antes** e não quanto ela tinha **depois**”.

Nota-se para este problema, que a pergunta “Quantos papéis de carta ela tinha antes?” envolve tanto uma transformação quanto uma comparação, pois se comparam duas quantidades. O estado inicial era desconhecido e, após a leitura do enunciado, a palavra “antes” remete à idéia de comparação.

Magina e cols.(2001, p. 48) ressaltaram que “Vergnaud considera esses problemas como os mais difíceis da classe de transformação, porque a solução deles envolve a operação inversa”. No exemplo acima, a resposta correta é obtida por meio da transformação inversa aplicada ao estado final, ou seja, a transformação é negativa (-12), mas o problema é solucionado por uma adição ( $25 + 12 = 37$ ).

Além disso, como também apontou o caso desta díade, as autoras consideram que neste tipo de problema, o fato de o estado inicial ser desconhecido, faz com que, muitas vezes, o aluno não saiba por onde iniciar a solução do problema, dificultando, assim sua sistematização e, conseqüentemente, a obtenção da resposta.

**Fragmento 3.** *Díade assimétrica:* Pedro (médio desempenho) e Vivian (alto desempenho)

*Sessão de interação número 4.*

*Problema:* Bruno devia 18 figurinhas a Daniel, mas agora Daniel está devendo 7 figurinhas a Bruno. Quantas figurinhas Bruno ainda deve a Daniel?

A relação de interação social entre os membros desta díade, na solução de ste problema

é cooperativa, porém com certa manutenção da individualidade, pois um dos membros da díade (Pedro), em certos momentos realiza a tarefa separadamente.

Os integrantes da díade lêem, juntos, o problema. Vivian comenta com Pedro:

Vivian: *Tá meio confuso porque o problema não tava falando quanto Bruno tinha antes.* (Pedro não presta atenção ao que Vivian está dizendo, ele faz no papel a conta  $18 + 7 = 25$ . Os alunos resolvem ler novamente o problema).

Vivian: *sete.* (Parece não ter certeza, pois ri da sua resposta, mas continua explicando a Pedro a forma como fez para obter sete).

Vivian: *Acho que é dezoito tira sete. Ele **devia** dezoito, mas agora Daniel **está** devendo sete para ele. **Entendeu?** A gente faz a conta de menos e deu onze.* (Vivian monta a conta no papel  $18 - 7 = 11$ . De repente, para, pensa e diz:) *O problema tá perguntando quantas figurinhas ele ainda deve a Daniel. Nossa! Tá tudo errado.*

Pedro não presta atenção no que Vivian diz, resolve fazer outra conta  $18 \times 7$ . Ele está montando a tabuada quando Vivian pergunta o porquê da conta.

Pedro: *É para ver se dá para pegar o resultado e ver o tanto de figurinhas que Daniel tinha.*

Pedro resolve desenhar o número de figurinhas, desenha dezoito. Vivian confere e escreve na frente das bolinhas (representando as figurinhas) “Bruno”. Deste total, retira as sete que Daniel deve e conta as “bolinhas” que sobraram, onze figurinhas).

Pedro: *Eu acho que Bruno dá as dezoito figurinhas para ele e depois Daniel volta sete para ele.*

Vivian: *Eu acho então que é dezoito menos sete. Mas lê **devia** ou **deve**?*

Os alunos ficam em dúvida, não mostram confiança no que fizeram, no entanto concluem a solução do problema e escrevem a resposta: “Bruno ainda deve 11 figurinhas”.

De acordo com Nunes e Bryant (1997), como no caso anterior, para este problema, uma das soluções possíveis seria: fazer a contagem utilizando os dedos. Uma criança poderia contar do sete até chegar ao número dezoito, ou seja, contar apenas os elementos que foram acrescentados ao sete para chegar a dezoito e perceber que o montante de figurinhas que Bruno ainda deve a Daniel seria onze.

Uma outra forma de solucionar o problema, como no caso desta díade, seria a realização imediata de uma subtração, pois o sentido da palavra “devia” evoca uma subtração

( $18 - 7 = 11$ ). Contudo, apesar da solução correta, no Fragmento 3, observa-se uma “confusão” com o tempo verbal no passado (devia, significa não deve mais) ou presente (deve, ainda necessita pagar) presentes no enunciado do problema.

Ainda, para este problema a congruência semântica entre a palavra “devia” do enunciado e o sentido da operação subtração a ser efetuada correspondeu a uma regra de ação do tipo “se... então...”. O teorema-em-ação expresso para esta regra pode ser assim descrito: “se” Bruno devia dezoito figurinhas a Daniel e agora Daniel deve sete a Bruno, “então” agora Bruno só deve (ou ainda deve) onze figurinhas a Daniel.

Visando compreender o enunciado do problema, as díades se valeram de diferentes estratégias para chegar à idéia subtrativa do problema: algumas dramatizaram a situação (um dos membros era Daniel e o outro Bruno); outras utilizaram o desenho para compreensão e representação da tarefa e ainda, algumas díades se valeram da linguagem oral (forma de representação e assim expressaram seus teoremas-em-ato: 1º exemplo) “Se Bruno devia dezoito a agora Daniel deve sete, ele vai descontar. Então vai dar onze”.

2º Exemplo: “Ah! Agora já entendi. (após ler o problema novamente). *Ele devia dezoito mas agora deve sete. Então descontou as sete figurinhas. Ele (Daniel) agora só tá devendo onze.*”

Magina e cols. (2001, p. 19) salientaram que “para dominar as estruturas aditivas, o aluno precisa ser capaz de resolver diversos tipos de situações-problema. Não basta saber operar um cálculo numérico”.

Como se sabe, a maneira como é concebido o enunciado influencia a solução do problema, ou seja, torna-o mais fácil ou mais difícil. Para este problema, o enunciado parece ter dificultado a solução; contudo, todas as díades chegaram à resposta correta do problema, ou seja, onze figurinhas.

No caso do fragmento transcrito, pode-se então perceber que por trás de uma operação tão simples ( $18 - 7$ ) alguns alunos deste estudo ainda encontraram dificuldade para resolver a situação, possivelmente pela dificuldade na compreensão do enunciado e da situação. Com isso, o que se deseja mostrar é que a interpretação e a esquematização de um problema dependem também da forma como o problema é proposto. Assim sendo, é tarefa do professor oferecer uma ampla variedade de problemas e situações para que os estudantes realmente



adquiram a competência para solucionar problemas deste tipo.

A seguir, os fragmentos 4, 5 e 6 ilustram a solução de problemas realizadas pela díade Vítor e Sandra. Estes fragmentos expressam um tipo especial de interação onde um dos companheiros da díade quase não verbaliza suas ações. Neste caso, o tipo de relação de interação social entre os membros da díade foi categorizada como liderança “forçada”, pois um dos membros da díade exerce a liderança e conduz a solução do problema porque seu companheiro não demonstra “forçada” assume o papel de tutor.

O aluno Vítor, alto desempenho, manifestou, por diversas vezes, sua insatisfação com essa situação, contudo, em todas as sessões procurou explicar a Sandra a sua maneira de resolver os problemas, e quando necessário, por intermédio de algum tipo de manifestação de Sandra (gestos, olhares, escrita) buscou “discutir” os erros e acertos demonstrados por Sandra.

**Fragmento 4.** *Díade assimétrica:* Vitor (alto desempenho) e Sandra (baixo desempenho)

*Sessão de interação número 2.*

*Problema:* Patrícia coleciona papéis de carta. Ela deu 12 para sua amiga Aline. Agora Patrícia tem 25. Quantos papéis de carta ela tinha antes?

Vítor lê o problema em voz alta. Sandra não se manifesta acompanha a leitura.

Vítor: *Que conta é para fazer? De mais?*

Sandra: *É.*

Vítor: *Por que tem que fazer de mais?*

Sandra fica quieta, para, não responde. Balança os pés, olha para cima, sua fisionomia expressa insegurança. Vítor mostra-se impaciente, bate a ponta do lápis na carteira. Longa pausa. Vítor parece cansado de esperar. Volta-se para Sandra e pergunta.

Vítor: *Você não sabe Sandra?*

Sandra não se manifesta pela fala, balança a cabeça negativamente. Vítor então começa a explicar o problema a ela.

Vítor: *Ela **deu** doze e **ainda** tem vinte e cinco. Tem que fazer de mais para saber quanto ela tinha **antes**. (Vítor coloca a “conta” no papel  $25 + 12$ ). Agora faz Sandra.*

Sandra efetua o cálculo corretamente e sem dizer uma palavra coloca a resposta do problema no papel.

**Fragmento 5:** Díade assimétrica: Vítor (alto desempenho) e Sandra (baixo desempenho)

Sessão de interação número 2.

Problema: Vinícius tinha R\$ 28,00. Gastou R\$ 7,00 em um lanche, mas depois ganhou R\$12,00 de seu avô. Quanto ele tem agora?

Vítor: *Lê o problema Sandra. Agora é sua vez.* (Sandra lê o problema. Sua leitura é fluente, porém seu tom de voz é baixo, parece acompanhada).

Vítor: Que conta tem que fazer Sandra?

Sandra: *Mais.*

Vítor: *Mais! Tá certo, mas antes tem de fazer de menos.* (Sandra insiste e faz a “conta de mais”  $28 + 7$ ).

Vítor: *Tá errado Sandra. É de menos. **Gastou sete.*** (Vítor para e espera Sandra fazer a nova conta. Ela faz a conta corretamente  $28 - 7 = 21$ ).

Vítor: *Ganhou mais doze. Faz agora Sandra, vinte e um mais doze.* (Sandra faz a conta corretamente  $21 + 12 = 33$ .)

Vítor: *Põe a resposta.* (Vítor vai ditando a resposta para Sandra) “*Ele ficou com trinta e três reais, coloca reais Sandra.* (Vítor percebe que Sandra não estava entendendo, continua a insistir).

Vítor: *Por que você fez duas contas?* (Sandra não responde, não se manifesta, Vítor insiste).  
*Responde Sandra* (seu tom de voz mostra impaciência).

Vítor: Você entendeu o que eu fiz?

Sandra: *Mais ou menos.*

Vítor: *Lê até aqui onde está escrito que ele gastou sete.* (Sandra lê o trecho e para). Entendeu? Agora lê até aqui, ganhou mais doze e agora lê aqui, a pergunta do problema.

Sandra: *Tá.*

A seguir, diferentemente dos demais problemas, para realçar alguns aspectos da forma de interação social entre Vítor e Sandra, será apresentado um fragmento de solução de problema de estrutura multiplicativa do tipo isomorfismo de medida.

**Fragmento 6.** Díade assimétrica: Vítor (alto desempenho) e Sandra (baixo desempenho)

Sessão de interação número 2.

Problema: Dona Célia gastou 5 ovos para fazer um bolo. Ela precisa fazer 6 bolos. Quantos ovos irá usar?

Vítor e Sandra lêem o problema silenciosamente. Como Sandra não se manifesta, Vítor começa as verbalizações:

Vítor: *Eu já entendi. Cinco vezes seis.* (Sandra continua parada, de repente coloca no papel 6 x 5)

Vítor: *Sandra, por que você colocou isso aí?* (Sandra não fala. Vítor insiste mudando a pergunta para a forma direta, ou seja, a conta que ela havia colocado no papel).

Vítor: *Por que você colocou 6 x 5? São seis o quê?* (Sandra não responde, passa um tempo, Vítor então diz: bolos).

Vítor: *O cinco é o que Sandra.* (Neste momento Sandra, pela primeira vez nesta sessão, resolve falar).

Sandra: Ovos.

Vítor: *Então você fez o quê?* (Como Sandra não responde, Vítor desiste de explicar pede que ela coloque a resposta do problema).

Os fragmentos 4, 5 e 6 ilustraram um tipo de relação caracterizada neste estudo como uma liderança “forçada”, onde um dos membros da díade (Vítor) exerce a liderança e necessita conduzir a relação porque sua colega mantém-se calada quase todo o tempo. Quando Sandra responde, suas falas são curtas e se remetem apenas àquilo que lhe foi perguntado ou sugerido falar. Este comportamento de Sandra se manteve ao longo das quatro sessões.

As análises dos fragmentos demonstram que Vítor não apresenta dificuldade na solução dos problemas propostos. Sua dificuldade está relacionada ao tipo de situação, ou seja, como lidar com o silêncio de Sandra.

As análises das sessões videografadas revelaram que o clima de interação entre a díade é amigável, mas o nível de interatividade é baixo. Vítor, às vezes, reclama que Sandra não participa, não fala, por vezes fica cansado de esperar uma manifestação e acaba por conduzir a solução do problema, bem como, as ações de Sandra, como expressam suas falas: “*leia Sandra, lê até aqui, escreve, faça a conta*”.

No entanto, apesar do silêncio de Sandra, nota-se que Vítor quer ajudá-la, pois sempre

pergunta se ela entendeu e reforça seu tom de voz nas passagens que julga mais importante para a compreensão do problema.

O silêncio de Sandra chamou a atenção da pesquisadora, pois este de interação onde prevalece o silêncio é um tipo de relação social e afetiva diferenciada das demais. Ainda, em relação a esta díade, apesar do silêncio de Sandra a aluna de baixo desempenho (número 7) apresentou um ganho expressivo de desempenho: de 8 pontos no pré-teste para 23 no pós-teste, ganho médio de 15 pontos. Desta forma, pode-se inferir, que as intervenções frequentes e as insistências de Vítor podem ser um dos fatores que contribuíram para o avanço de desempenho de Sandra.

Para o aluno Vítor (alto desempenho, número 8) houve queda de 1 ponto no desempenho: de 52 pontos no pré-teste para 51 no pós-teste. Como já apontado, a queda de desempenho refere-se à mudança de pontuação no problema 8, de 5 no pré-teste para 4 pontos no pós-teste. No caso, a estratégia apresentada foi correta, mas por erro de cópia dos dados do problema, a resposta foi incorreta. Neste caso, os dados sugerem que para o aluno Vítor, a interação social em díade não teve relação direta com seu desempenho.

No caso deste tipo de interação, em que o silêncio de um dos membros da díade prevalece, a relação de interação social estabelecida suscita novas investigações e olhares. De acordo com Laplane (2000, p. 64), “são poucos os trabalhos que enfocam o silêncio como tema e poucos, também, os que teorizam sobre ele.”

Destacando os estudos desenvolvidos por Laplane, Morato (2001) destacou ainda que o “silêncio” é veiculador de sentido e a interação reside não apenas no fato de colocar juntos dois sujeitos ou mais, pois, há em seu interior uma dimensão discursiva tipicamente humana, social, histórica e afetiva. A autora pontuou que neste tipo de interação onde o silêncio prevalece, “nos leva a admitir que entre suas propriedades constitutivas, isto é, de reciprocidade, influência e troca, somam-se a do silêncio, da contrariedade, da assimetria, da "ineficácia" e da iniquidade interpessoal.” (Morato, 2001, p. 292).

#### *Fragmentos de diálogos em situação de solução de problemas não rotineiros:*

A seguir serão transcritos fragmentos de interação social em díade na solução de problemas não-rotineiros. Como já informado, todas as sessões de interação continham a

tarefa de solução de problemas rotineiros e não-rotineiros e ainda que, um dos objetivos das tarefas deste tipo era desencadear um contexto de interação mais rico, que fosse elucidativo das regulamentações cognitivas e sociais envolvidas na tarefa de solução de problemas aritméticos num contexto de interação social em díade.

Ainda, para os problemas não-rotineiros com mais de uma resposta os alunos não encontraram orientações claras acerca de como realizar a tarefa, uma vez que a própria formulação da pergunta estava concebida de forma a deixar diversas possibilidades de solução em aberto.

Neste sentido, Carvalho (2001) ressaltou que em problemas não-rotineiros, num primeiro momento, a díade tem de identificar as características essenciais do que é pedido e depois, citando o pensamento de Vigotski, conseguir mobilizar as ferramentas mentais mais adequadas àquela situação e, por fim, definir uma seqüência do que deverá realizar, optando por uma linha geral de raciocínio a seguir; “o que importa ser capaz de atribuir um significado à tarefa para conseguir resolver.” (p. 244)

Assim sendo, ressalta-se ainda, assim como o fez Polya (1978), que na solução de problemas, rotineiros e não-rotineiros, para solucionar problemas os alunos seguem passos, desde a obtenção da informação até a solução propriamente dita e que é possível chegar à solução por caminhos diferentes.

**Fragmento 7.** *Díade simétrica:* Bruno (médio desempenho) e Carlos (médio desempenho).

*Sessão de interação número 2.*

*Problema:* Três sitiantes, Sr. Manoel, Sr. Joaquim e Sr. Oliveira moram na mesma estrada.

Veja as distâncias que eles moram uns dos outros:

O Sr. Manoel mora a 10 km do Sr. Joaquim;

O Sr. Oliveira mora a 2 km do Sr. Joaquim.

A que distância do Sr. Manoel mora o Sr. Oliveira?

A relação entre os membros da díade é cooperativa. Os alunos trabalham juntos, há participação de ambos, o clima é amigável; no entanto, os dois estão sempre contestando a sugestão do outro, a notar que frequentemente a “conversa” entre eles se desencadeia a partir da necessidade de identificar a “conta” a fazer.

Bruno e Carlos começam a leitura do problema. A fisionomia dos dois expressa que ambos não sabem por onde começar a solução. Então, os dois sugerem uma nova leitura do problema.

Bruno inicialmente acha que a resposta será dada por uma subtração e Carlos por uma adição dos números presentes no enunciado do problema, ou seja,  $10 - 2 = 8$  e  $10 + 2 = 12$ , respectivamente. Esta discordância inicial é de grande valia na ampliação do pensamento dos alunos, visto que há justificativas plausíveis para cada argumento. Entretanto, como ilustra o fragmento a seguir, mesmo com a justificativa inicial de Bruno que seriam oito quilômetros, Carlos e Bruno, depois de representar o problema por meio de um desenho, concluem que a resposta só poderiam ser doze quilômetros.

Nota-se que, como não havia informação precisa sobre a posição da casa do Sr. Oliveira (antes ou depois do Sr. Joaquim) este problema permitia duas diferentes respostas: doze ou oito quilômetros.

Bruno: *Tô vendo aqui que ele mora a dez quilômetros. Então é só fazer assim.*

Para Bruno a casa do Sr. Oliveira é antes do Joaquim então coloca no papel  $10 - 2 = 8$ . Carlos puxa o papel para si, olha o que Bruno fez, não concorda e faz  $10 + 2 = 12$ . Como sua resposta é diferente da de Bruno resolve esclarecer a situação.

Carlos: *Mas como você chegou a essa conclusão?*

Bruno: *Eu fiz assim. O Sr. Manoel mora a dez quilômetros e o Oliveira a dois quilômetros. Dez tira dois fica oito.*

Carlos: *Mas você tá fazendo essa conta?* (Bruno, apesar de ter dado a sua explicação a Carlos utilizando uma subtração para solucionar o problema, havia colocado no papel a conta  $10 + 2 = 12$ ).

Bruno: *Que tal se a gente!?*

Carlos: *Que tal o quê? Mas como você sabe que ele mora a oito quilômetros? Por que oito? Me fala por que oito?* (Sua fala demonstra insistência, pois ele parece ter certeza que eram doze quilômetros).

Bruno: *Eu fiz assim. Dez **tira** dois do Oliveira dá oito?* (Carlos não concorda, volta a sua solução de 12 Km)

Carlos: *Eu raciocinei com a cabecinha encaixada.*

Bruno: *É Carlos, sei não!* (Neste momento fica um impasse, resolvem então fazer um desenho)

Bruno: A gente faz a estrada e coloca as casas. Um quilômetro, dois quilômetros, três quilômetros...até contar dez quilômetros. (Resolvem parar de desenhar e decidem ler o problema novamente)

Carlos: *Ah Bruno, dez mais dois, já deu, doze quilômetros. Ele vai andar doze quilômetros.*

A partir deste instante, Bruno olha o desenho, desiste de sua proposta inicial e concorda com Carlos que são 12 Km. A seguir, passam a conversar não mais sobre a situação em si, mas sobre como a pesquisadora entenderia a solução dada por eles.

Bruno: *“A Marta não vai entender nada.”* (Para eles, como ilustra a Figura 32, a maneira como haviam registrado a solução na folha dificultaria o entendimento pela pesquisadora: “desenho e dois tipos de contas”).

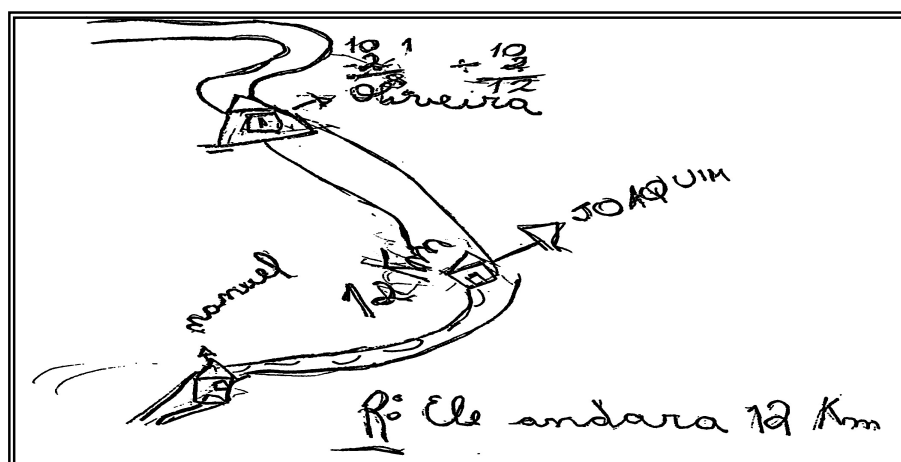


Figura 30. Procedimento de solução, representação e resposta (12 km) para o problema “Os sitiantes”.

**Fragmento 8.** *Díade assimétrica:* Sérgio (médio desempenho) e Priscila (baixo desempenho).

*Sessão de interação número 2.*

Problema: Os três sitiantes (problema anterior)

Priscila e Sérgio realizam a atividade de forma cooperativa e há a participação de ambos na solução da tarefa. Para iniciar, os dois lêem conjuntamente o problema, de imediato

Sérgio diz:

Sérgio; *Dez menos dois porque Manoel mora a dez quilômetros do Joaquim.* (Priscila pára, parece não estar muito confiante na resposta dada por Sérgio)

Priscila sugere ler o problema novamente. A leitura é realizada por ambos. Logo após, Sérgio resolve fazer um desenho. Priscila olha o desenho feito por Sérgio, às posições da casa e diz:

Priscila: *Oito quilômetros.* (Neste mesmo instante, Sérgio pensa, olha bem o desenho e faz outra conta  $10 + 2 = 12$ ).

Como já haviam feito uma adição e uma subtração e percebendo a indecisão de Sérgio, demonstrando que ainda não havia compreendido o problema, Priscila propõe outras operações não testadas.

Priscila: De vezes ou de dividir.

Sérgio: *Não, é oito mesmo.* (Volta a fazer a  $10 - 2 = 8$ . Ao mesmo tempo vai explicando para Priscila).

Sérgio: *O senhor Oliveira mora aqui, antes do Joaquim então é dez menos dois mesmo é que dá oito.*

Priscila presta muita atenção na explicação dada por Sérgio, concordando com o resultado.

A Figura 31 ilustra como a díade Priscila e Sérgio solucionou o problema. Para esta díade, O Senhor Manoel mora a oito quilômetros do Sr. Oliveira.

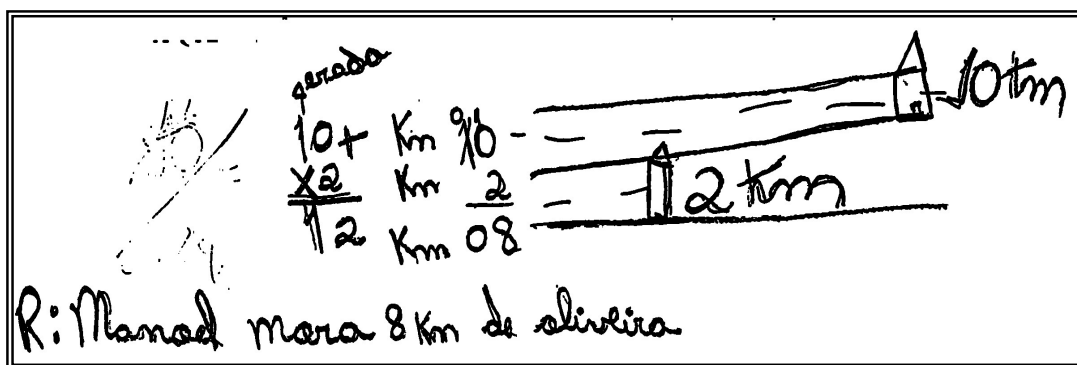


Figura 31. Procedimento de solução, representação e resposta (8km) para o problema “Os sitiantes”.



Para solucionar este problema todas as díades, além da utilização do algoritmo da adição e/ou subtração, utilizaram também o recurso do desenho para entender e solucionar o problema, bem como, explicar ao companheiro a maneira que pensou para solucionar o problema.

A Figura 32 ilustra conjuntamente os dois tipos de respostas possíveis para este problema. A esquerda da figura tem-se a resposta 12 km encontrada por 8 díades e a direita a outra resposta possível, 8 km, dada por 4 díades.

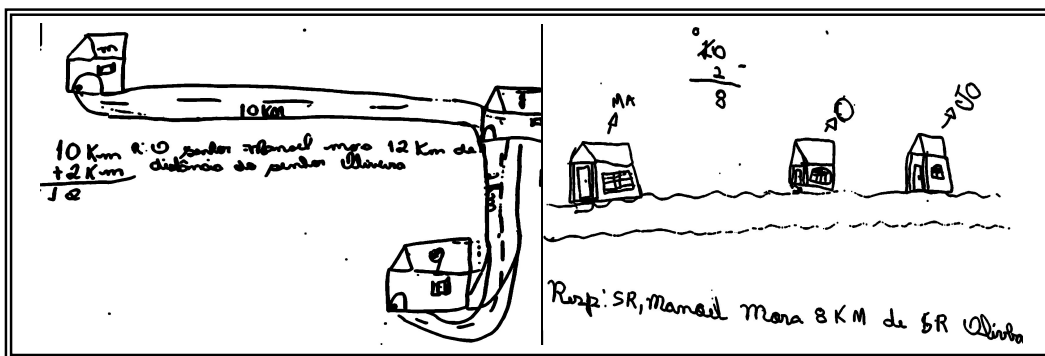


Figura 32. Procedimento de solução e representação do problema “Os sitiantes”

Este episódio permite também visualizar que uma das dificuldades dos alunos quando trabalham com problemas não-rotineiros é libertarem-se da concepção de que a única forma que têm para justificar uma solução é por meio de um algoritmo.

De acordo com Davis e Mckillip (1997), a resposta típica dos alunos a este problema seria oito ou doze exclusivamente e que é possível que eles tenham em mente uma idéia da relação das três casas na estrada, mas é provável que tenham decidido a operação supondo que pudesse se tratar de um problema de adição ou subtração. “Uma ilustração para o problema ajuda-o a ver que há realmente duas respostas possíveis. As ilustrações podem ajudar as crianças a decidir quanto às operações e a rejeição de respostas impossíveis” (p. 20).

**Fragmento 9.** *Díade simétrica:* Marcelo (médio desempenho) x Ruan (médio desempenho)  
*Sessão de interação social número 1.*

Problema: “Paula foi ao supermercado e comprou 5 kg de arroz, 3 kg de feijão, 2 kg de açúcar e 6 pacotes de bolacha. Cada pacote custou R\$2,00. Quanto ela pagou pelas bolachas?”

Ruan toma a iniciativa e começa a ler o problema. Após a leitura os estudantes começam a fazer suposições sobre o que deve ser feito para solucionar o mesmo.

Ruan: *Seis pacotes* (referindo-se as bolachas). *Então é seis dividido por dois* (Preço de cada pacote. Marcelo parece não concordar com a solução proposta por Ruan e resolve ler novamente o problema.)

Marcelo: *Pera aí, deixa eu ler de novo.* (Depois da leitura). *Eu não concordo porque é quanto ele pagou pelas **bolachas** e não por tudo que ele comprou. Pensa, é doze Reais.*

Ruan: *Não vai dar certo* (Referindo-se a sua proposta anterior de dividir. Os dois, conjuntamente, lêem o problema mais uma vez. Agora, Ruan parece compreender o problema).

Ruan: *Pode ter duas possibilidades.*

Marcelo: (complementando o raciocínio de Ruan). *De mais. Dois mais dois mais dois... (conta de dois em dois até totalizar os seis pacotes de bolacha e o valor de R\$ 12,00) ou de vezes, seis vezes dois. Qual é a possibilidade mais fácil?*

Ruan: *A de vezes porque você multiplica.* (coloca a conta no papel  $6 \times 2 = 12$  e escreve a resposta do problema: “Ela pagou R\$12,00 pelas bolachas.”)

No fragmento transcrito, inicialmente, nota-se uma discordância de um dos participantes em relação à proposta inicial de solucionar o problema utilizando uma divisão. Marcelo faz uma nova leitura do problema e enfatiza a palavra “bolacha” para que Ruan perceba que a pergunta é: Quanto ela pagou pelas bolachas? Assim, resolvem fazer uma leitura conjunta do problema para a retomada das informações e decisão sobre qual caminho tomar.

Ainda, em todo o percurso da solução, notou-se que os dois participantes se relacionam de forma cooperativa, os dois trabalham juntos e há participação de ambos, um complementando o raciocínio do outro. Nota-se também uma discordância inicial de Marcelo, iniciando este uma nova leitura para compreensão, seleção e retomada das informações relevantes do problema.

Para este problema, de estrutura aditiva, considerado não rotineiro (devido ao excesso de informações), a análise dos protocolos revelou que todas as dúades solucionaram

corretamente o problema. Talvez porque o problema tenha uma única resposta. E, apesar de conter excesso de dados, a situação de compra faz parte do cotidiano dos alunos.

**Fragmento 10.** *Díade simétrica*: Marcelo (médio desempenho) e Ruan (médio desempenho).

*Sessão de interação número 4.*

*Problema:* Na sala de brinquedos de uma escola de Educação Infantil há 12 bonecas, 18 carrinhos, 7 jogos de panelinha, 21 cordas e 4 mesas redondas com 6 cadeiras em cada para as crianças se sentarem. Quantas bolas há na sala? Quantos brinquedos há nessa sala? Quantos destes brinquedos servem para brincar de casinha? Quantas cadeiras têm nesta sala?

Os alunos lêem, juntos, o problema e comentam que têm muitas perguntas para responder.

Marcelo: *Nossa!*

Ruan: *Quantos brinquedos é fácil de fazer.* (coloca no papel  $12 + 18 + 7 + 21 + 4 + 6$ ).

Marcelo: *Tá perguntando quantos **brinquedos**.* (Ruan expressa dúvida, lê o problema, depois ri e apaga da “conta” os números 4 e 6 que expressam o número de mesas e cadeiras, que neste caso, não são brinquedos. Resolvem ler novamente o problema).

Ruan: *Quantas bolas há nesta sala?* (percebendo que não há uma resposta contínua). *Vamos fazer a outra pergunta. Quantos brinquedos servem para brincar de casinha?* (Coloca no papel  $12 + 7 + 4 + 6$ , Marcelo completa explicando).

Marcelo: *As bonequinhas, as panelinhas para fazer comidinha, as mesas para colocar as comidinhas e as cadeiras para as crianças sentar.* (Depois da resposta a uma das perguntas do problema s dois voltam à primeira pergunta: quantas bolas há na sala?)

Ruan: *Se tem cinqüenta e oito brinquedos. Mas aqui tá difícil. Não traz o número de quantas bolas tem. Ah, não tem bola na escola.* (Passam para outra pergunta).

Marcelo: *Pera aí, tem seis cadeiras em cada mesa?*

Ruan: *Tem.* (Começa a contar seis, doze, dezoito, vinte e quatro) *Vinte e quatro cadeiras. Você tem de ler de novo senão você passou por ela na primeira vez e nem percebeu.* (Ruan está explicando a Marcelo que no problema estava escrito “4 mesas redondas com 6 cadeiras em cada”. Marcelo havia colocado só seis cadeiras).

Nota-se que o aluno Ruan não tem muita confiança nos seus pressupostos sugeridos

para a solução, então decide ler novamente o problema e depois seguir a orientação do seu par, mesas e cadeiras não são brinquedos. No entanto, não deixa de ser curioso reparar, que ao mesmo tempo em que a díade concorda que as mesas e cadeiras não são brinquedos, na outra pergunta eles afirmam que as mesas e cadeiras servem para brincar de casinha. Ainda, observa-se que o sucesso na solução desta pergunta depende das explicações dadas pelos alunos como brinquedos adequados para brincar de casinha. De acordo com esta escolha, o problema poderá ter diferentes respostas.

Salienta-se também que, na solução deste tipo de problema, as vivências sociais dos alunos interferem na escolha, pois para responder as perguntas do problema, as crianças analisam a tarefa em função das suas vivências e dos seus conhecimentos relacionados ao contexto social em que vivem.

Ainda, para este problema, das doze díades da pesquisa, apenas duas consideraram como brinquedos adequados para brincar de casinha somente as doze bonecas e as sete panelinhas, os demais participantes justificaram suas escolhas da seguinte maneira:

- “as panelinhas, as bonecas, as cordas mais as mesas e cadeiras para elas colocarem a comidinha e sentar.”

- “então eu vou fazer as bonecas, os carrinhos, o jogo de panelinha, a mesa, as cadeiras e as cordas” (para cercar o jardim da casinha).

- “oitenta e seis para brincar de casinha porque as bonecas dá, o carrinho dá, as mesas e as cadeiras dá e a corda que você disse que dá”(explicando ao companheiro de onde tirou o número oitenta e seis).

Em relação ao número de bolas, somente uma díade respondeu por escrito que não tinha o número de bolas no problema. As outras díades “pulavam” a pergunta, diziam que não tinha resposta, não tinha bola na escola e não responderam, por escrito, esta pergunta do problema.

Ainda, em relação ao mesmo problema, este continha uma pergunta de estrutura multiplicativa: “Quantas cadeiras tem nesta sala?”. Em geral, as diferentes díades não tiveram dificuldade em encontrar o número de cadeiras na sala e todos chegaram à resposta correta (24 cadeiras), mesmo utilizando as mesmas mesas e cadeiras para brincar de casinha, sentar as crianças e as bonecas, como disseram algumas díades, “*para as bonequinhas se sentar*”. Para

se chegar à resposta desta pergunta, os procedimentos utilizados foram de dois tipos: aditivo ( $6 + 6 + 6 + 6 = 24$ ) e multiplicativo ( $4 \times 6 = 24$ ).

Em relação à estrutura multiplicativa do problema, tipo isomorfismo de medidas, um dos alunos deu a seguinte explicação ao seu companheiro da díade: “se uma mesa tem 6 cadeiras então em 4 mesas tem 24 cadeiras.” Este argumento, traz embutido o raciocínio multiplicativo já construído pelo aluno para este tipo de situação, em elaboração a relação quaternária que, segundo Vergnaud (1997) caracteriza esse tipo de problema.

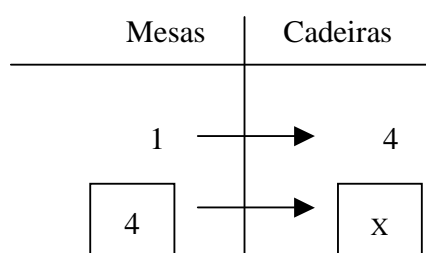


Figura 33. Esquema de um problema do tipo isomorfismo de medida

**Fragmento 11.** *Díade assimétrica:* Aline (médio desempenho) e Carla (baixo desempenho)  
*Sessão de interação número 3.*

*Problema:* Três amigos entraram numa lanchonete. Lucas gastou R\$ 5,00. Ana Carolina gastou menos que Lucas. Sérgio gastou o mesmo que Ana Carolina. Quanto os três gastaram no total? Você acha que R\$ 15,00 serão suficientes para pagar tudo?

As alunas lêem conjuntamente o problema, logo após há um silêncio. O diálogo começa quando Aline expressa que não entendeu o problema.

Aline: *Eu não entendi. Não tá dando dica.* (Carla puxa a folha para si, lê novamente e dá uma sugestão)

Carla: *Ah! Já sei, vamos fazer assim. Ainda não entendi, pode ser dois, três um.* (Carla sugere os números menores que cinco, pois os amigos do problema gastaram menos que Lucas).

Aline: *Então a gente faz para dois, três, quatro e um.*

Carla: *Então vai ter mais de uma resposta.*

Aline: *Tá vendo, igual aquele dia. Pode ter mais de uma resposta.* (Na sessão anterior eles

discutiram, após a sessão que alguns problemas poderiam ter mais de uma resposta).

Aline: *Tá perguntando se serão suficiente para todos*

Carla: *É* (Faz a conta  $5 - 4 = 1$ ). *Gastou menos, então a gente faz a conta para ver todas a conclusão.* (Coloca no papel  $5 + 2 + 2 = 8$ , estão considerando o gasto de R\$2,00 para Sérgio e Ana Carolina).

Aline: *É nove. Agora vamos tentar o quatro.*

Carla: *Agora é só somar esse aqui com esse aqui.* (Estão se referindo à conta  $4 + 4 = 8$ , pois Sérgio gastou o mesmo que Ana Carolina).

Aline: *Então vamos fazer a resposta. Elas gastaram....*

Carla: *Gastaram? Ou vão gastar ainda? Eles gastarão ou gastaram.* (Notou-se que esta díade, em todas as sessões, sempre se prende à ação, ao tempo verbal e acabam entrando em conflito, ou seja, acabam arrumando uma “confusão” com as palavras (tempo verbal) o que dificulta a solução).

Aline: *Como eu vou escrever no futuro se aqui está no presente! Aula de Português filha!*

Por fim, mesmo com a discussão inicial, quando a díade concordou que poderia haver mais de uma resposta, as alunas decidem colocar apenas uma resposta para o problema.

A Figura 34 ilustra como esta díade solucionou o problema. As alunas decidem circular na folha a conta correta ( $5 + 4 + 4 = 13$ ), cuja soma de R\$13,00 responde satisfatoriamente a pergunta do problema.

Durante o transcorrer da sessão, houve uma discussão entre as componentes da díade e justificativa para as outras possíveis respostas. No entanto, como demonstra a Figura 37, a díade descartou as outras possibilidades (contas) por que os outros números eram muito pequenos para serem considerados como soluções corretas ou possíveis. Assim sendo, decidem que só haveria uma resposta certa (R\$ 13,00) e que os R\$ 15,00 seriam suficientes para pagar a conta.

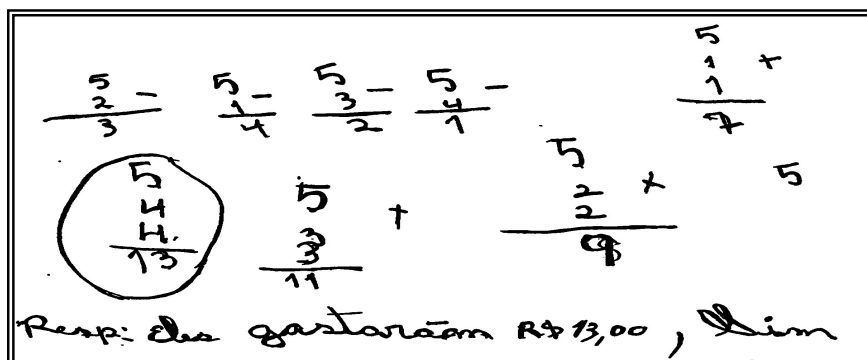


Figura 34. Solução do problema “Os amigos”.

Verificou-se ainda que na solução deste problema, não-rotineiro com mais de uma resposta, dez das doze díades se prenderam a uma única resposta, as outras duas vislumbram a possibilidade de mais de uma resposta. Em geral, os procedimentos de solução, representação (oral e escrita) e a resposta ao problema se apoiaram em diversos momentos de leitura do enunciado, com diferentes propósitos.

Para a solução deste problema, as demais díades apresentaram diferentes justificativas e respostas para o problema, como ilustra a Figura 35.

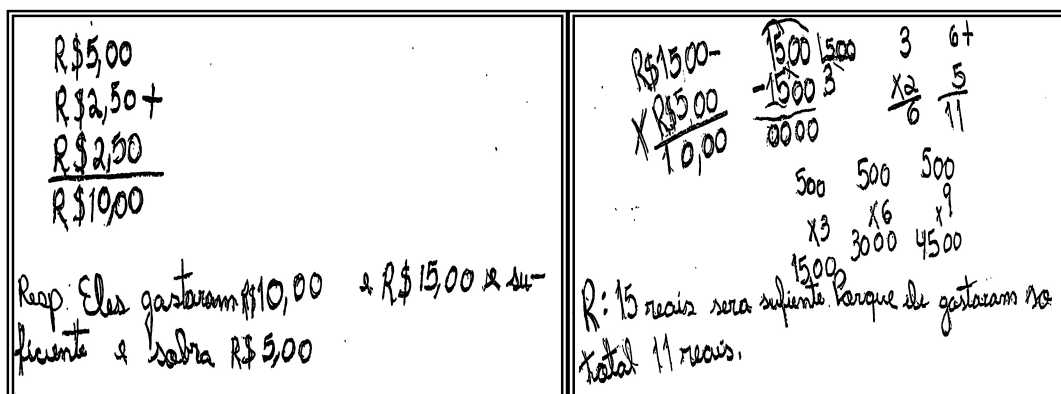


Figura 35. Soluções de duas díades para o problema “Os amigos”.

Em suma, no decorrer das sessões de interação social, para os problemas não rotineiros, notou-se uma maior dificuldade dos alunos de expor ao companheiro da díade a sua estratégia ou explicar o *porquê* das suas escolhas, principalmente, quando problemas deste

tipo têm a possibilidade de mais de uma resposta. A literatura revisada apontou que este tipo de problema vai além do mero aspecto tradicional da solução e, em geral, são menos frequentes na sala de aula, o que pode justificar uma maior dificuldade dos alunos neste tipo de problema.

A análise da solução dos problemas não-rotineiros em díade permitiu também verificar os diferentes caminhos seguidos pelos participantes na solução dos problemas propostos e as dificuldades mais frequentes relacionadas ao contexto da interação e solução propriamente dita. No entanto, os dados gerados pelas sessões videografadas e os protocolos das diferentes díades permitiram também constatar que algumas dificuldades na solução dos problemas são comuns tanto nos problemas considerados rotineiros como nos não-rotineiros.

## **9.2 Apresentação e análise de fragmentos de solução em díade de problemas de estrutura multiplicativa**

**Fragmento 12:** *Díade assimétrica*: Danilo (alto desempenho) e Beatriz (médio desempenho). Sessão de interação número 2.

*Problema:* “Marieta comprou um fogão por R\$ 320,00. Ela resolveu pagar o fogão em 8 prestações iguais. Qual será o valor de cada prestação?”.

A análise do fragmento a seguir, revela que a relação de interação social entre os membros desta díade é amigável com a liderança de um dos parceiros. No caso Danilo, aluno de alto desempenho assume a função de tutor e Beatriz, aluna de médio desempenho apóia-se nesta liderança de forma amistosa.

Inicialmente, cada um dos integrantes faz a leitura silenciosa do problema. Beatriz em silêncio dá início à solução fazendo uma multiplicação ( $320 \times 8 = 2\ 560$ ). Nota-se correto cálculo numérico. Danilo inicia a conversa:

Danilo: *Não é de vezes, é de **dividir**.* (Beatriz lê o problema novamente. Fica parada, em dúvida.)

Danilo: *Se for de multiplicar o fogão vai ficar dois mil quinhentos e sessenta reais. Nossa vida! Fica meio caro né?* (Neste instante, pega o papel, faz a divisão e apontando na folha o erro de Beatriz diz:)



Danilo: *Você errou aqui. Ele vai fazer as prestações em tantas vezes, mas nem por isso você tem que multiplicar. Basicamente, você entendeu onde você errou?*

Beatriz presta muita atenção no que Danilo diz e balança a cabeça afirmativamente, pois parece ter compreendido o problema. Para finalizar, pega a folha e coloca a resposta: “Cada prestação custará R\$ 40,00”.

A Figura 36 mostra como Danilo e Beatriz solucionaram o problema. À esquerda aparece a multiplicação inicialmente realizada por Beatriz (nota-se que a aluna coloca um X indicando que esta tentativa de solução está errada) e, à direita, aparece a divisão realizada por Danilo, procedimento este que indica a solução correta do problema.

The image shows two handwritten mathematical calculations side-by-side, separated by a vertical line. On the left, there is a multiplication problem: 
$$\begin{array}{r} 320 \\ \times 8 \\ \hline 2560 \end{array}$$
 The number 320 has a circled 3 above it. There are 'X' marks on either side of the multiplication sign. On the right, there is a division problem: 
$$\begin{array}{r} \text{R\$ } 320,00 \\ - 32 \\ \hline 00000 \end{array}$$
 The number 320,00 has a circled 3 above it. To the right of the division line, the result "R\$ 40,00" is written.

Figura 36. Procedimento de solução para problema de divisão

Na solução deste problema, nota-se claramente a liderança de Danilo, o qual assume a posição de tutor. Quando ele diz: “Ele vai fazer as prestação em tantas vezes, mas nem por isso tem que multiplicar” percebe-se também seu esforço para compreender o que Beatriz estaria pensando. Ao frisar a palavra vezes Danilo parece se lembrar de um problema correlato em que a pergunta para este tipo de problema de divisão seria: “Ela vai pagar o fogão em quantas vezes?”.

A análise do fragmento aponta que Danilo baseou sua explicação na resposta que Beatriz deu. Tenta explicar que a resposta proposta por Beatriz levava a uma contradição e estava inconsistente com a interpretação e resposta ao problema. Para fazer isto, ele teve que inferir como Beatriz poderia ter compreendido o problema. Esta inferência originou-se quando ele, cuidadosamente, estruturou seus comentários para criar um contexto comunicativo com Beatriz.

A seguir, o Fragmento 13 ilustra igualmente as dificuldades dos estudantes neste mesmo problema de divisão.

**Fragmento 13.** *Díade assimétrica*: Carolina (alto desempenho) e Pedro (baixo desempenho)  
*Sessão de interação número 2.*

*Problema:* o mesmo do fragmento 12.

A análise deste fragmento demonstra que um dos componentes da díade exerce a liderança e o outro se apóia nesta liderança de forma amigável. Neste fragmento, a liderança é exercida pela a aluna Carolina, no caso alto desempenho e assume a função de tutora..

Pedro: *Essa foi que foi fundo.*

Carolina: *Como assim?*

Pedro: *Pensei que ia ser como as outras.*

Carolina: *Que conta eu tenho que fazer? Mais, menos, multiplicar ou dividir?* (Carolina quer fazer com que Pedro resolva o problema, parece que ela já compreendeu o mesmo).

Pedro: *Vezes.*

Caroline: *Assim eu vou **aumentar** o valor do fogão.*

Pedro: *Menos.*

Carolina: *Aí ela vai **diminuir** o valor do fogão.*

Neste instante, Pedro pára, olha, parece não entender o que está acontecendo. Carolina, então, percebendo que Pedro ainda não compreendeu o problema resolve fazer a divisão mostrando a Pedro todos os passo da mesma.

Carolina: *Eu vou **dividir** em oito prestações.*

Pedro: *É de dividir!!!* (Pedro mostra-se eufórico quando enfim descobre que para solucionar o problema era preciso utilizar uma divisão).

A análise do fragmento demonstra que Carolina lidera a sessão e que Pedro, apesar da dificuldade na solução está engajado na tarefa. Nota-se a preocupação de Carolina em fazer com que Pedro compreenda o problema. Como ela já sabe a resposta e acredita estar ajudando Pedro, dá uma “dica” (*Que conta eu tenho que fazer? Mais, menos, multiplicar ou dividir*), no caso, explicita um procedimento numérico, o uso de uma das operações aritméticas.

Por sua vez, Pedro como não tem certeza sobre qual operação utilizar, por intermédio do procedimento conhecido como “tentativa e erro”, vai mostrando como faria. Até que, com auxílio de Carolina, chega a divisão e a resposta correta do problema.

Salienta-se que, em relação ao cálculo numérico, por intermédio da observação da sessão e do protocolo da díade, percebeu-se que Pedro (aluno de baixo desempenho) conseguia realizar corretamente as operações sugeridas; entretanto, não consegue decidir qual delas aplicar pra solucionar o problema.

Como apontaram Abrantes, Serrafina e Oliveira (1999) aprender procedimentos de cálculo isolados, só por si, não promove o contato dos alunos com as idéias e modos de pensar fundamentais da matemática e não garante que eles sejam capazes de mobilizar os conhecimentos relevantes quando tiverem que enfrentar as situações problemáticas simples surgidas em diferentes contextos.

**Fragmento 14.** *Díade assimétrica:* Aline (médio desempenho) e Carla (baixo desempenho).

*Sessão de interação número 4.*

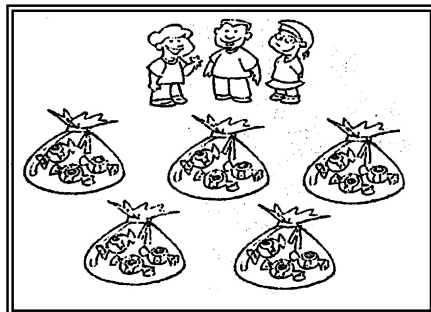


Figura 37. Figura ilustrativa de um problema de divisão

*Problema:* Dona Eulália tinha feito alguns saquinhos de bombons para dar aos seus 5 sobrinhos que iriam passear em sua casa. Entretanto, Tatiana a e Bruno ficaram muito resfriados e não foram ver a tia Rosália. Quando os outros sobrinhos chegaram à casa da Dona Rosália viram os pacotes de bombons em cima da mesa da cozinha. Resolveram então fazer um acordo: “como a Tatiana e o Bruno não vieram podemos repartir os bombons entre nós três”. Com quantos bombons cada um dos sobrinhos da dona Eulália irá ficar?

O fragmento a seguir exemplifica o tipo de relação de interação social entre os componentes da díade tido como cooperativo; porém, com certa manutenção da individualidade. No caso desta díade, as duas integrantes participam na solução do problema. Contudo, ora discutem conjuntamente o problema, ora realizam a tarefa separadamente.

Aline e Carla lêem, juntas, o problema. Após a leitura, Aline faz um comentário imediato,

Aline: *É fácil!*

Carla: *Como assim?*

Aline: *Faz um pacote para cada um. Mais dois “pra” esse, dois “pra” esse e dois “pra” esse. Dá cinco. E agora, como a gente vai fazer?* (referindo-se à “conta”)

Carla: *cinco dividido por três* [Aline faz a conta  $5 \div 3$ , percebe que o resultado dá (1). Neste caso, dividem o número de saquinhos (5) pelo número de crianças (3)].

Aline: *Cada um vai comer “um” bombom?* (Sua fala mostra surpresa. Como daria um se ela tinha feito a distribuição, pelo desenho, e dado 5 bombons para cada criança)

Carla: *Não, tá errado. Tá estranho.* (Neste momento as duas falam juntas):

Aline e Carla: *três vezes o cinco.* (Colocam no papel  $3 \times 5 = 15$ )

Aline: *Vão comer quinze bombons.* (apesar de fazer a conta corretamente, não concorda com o resultado, pois ela sabe que são 5 bombons para cada criança. O instante seguinte é de silêncio. Aline para um pouco, depois diz:)

Aline: *Também tá estranho. Se não é de dividir e não é de vezes?*

Carla: *É de mais. Aqui oh!* (Aponta para os saquinhos e diz) *Três, três, três. Cada um tem três mais um, mais um, mais um e depois mais um, mais um e mais um. Cada um fica com três, quatro, cinco.* (Mostra três dedos e depois conta quatro; se referindo a mais um, e depois cinco, mais o outro um). Carla continua:

Carla: *Então é de mais. Eu disse, eu disse.* (Quando Carla diz mais um, mais um... ela retira um bombom de cada saquinho que sobrou e dá para cada uma das crianças).

Enquanto Carla tenta solucionar o problema usando uma adição, Aline não dá muita atenção, pois está tentando solucionar o problema da sua maneira, contando de três em três. De repente diz:

Aline: *Oh, é essa! Três, seis, nove, doze, quinze. É de vezes.*

Carla: *É quinze no total e não quanto cada um vai ficar. É um saquinho para esse, um pra esse e um pra esse. Sobram três, mais três que é seis. Então é dois pra esse, dois pra esse, dois pra esse. Três mais dois que dá cinco. O três são os bombons do saquinho, mais dois bombons.*

Neste momento, concordando com Carla e encontrando afinal um jeito de dar 5 bombons para cada sobrinho Aline se dá por satisfeita e então escreve a resposta do problema.

As alunas chegaram inicialmente à solução por intermédio de uma distribuição equitativa dos bombons, ou seja, 1 saquinho para cada criança (elas sabem que são 3 bombons em cada saquinho), mais 2 bombons é igual a 5 bombons para cada criança.

Notou-se também que, para a solução do problema, como ilustra a Figura 38, a díade se apoiou no desenho ilustrativo do mesmo. Assim sendo, a ilustração presente no problema, além de complementar a informação, facilitou o contexto da solução. Como salientaram Brandão e Selva (1999), na apresentação dos problemas, as ilustrações ora aparecem apenas como acessórios para enfeitar os mesmos, ora são elementos essenciais na solução, ou ainda, como no caso exemplificado, facilita o contexto da solução.

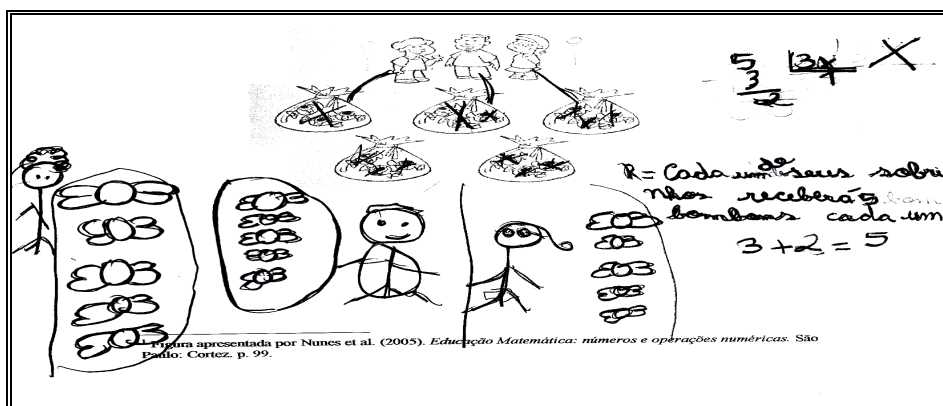


Figura 38. Procedimento de solução e representação de um problema de divisão partitiva

Ainda, para compreender o processo de divisão desenvolvido por Aline e Carla é importante considerar a natureza do objeto que está sendo dividido. No caso deste problema, os bombons, quantidade discreta e descontínua serão divididos igualmente entre os sobrinhos da Dona Eulália, sendo que cada sobrinho irá receber igualmente 5 bombons (inteiros) e não

sobraria nenhum bombom dos 15 que seriam repartidos.

Em síntese, primeiramente, para tentar resolver o problema, as alunas distribuíram os saquinhos e depois os bombons entre as crianças. Entretanto, nota-se também nesta díade a preocupação com a “conta”, percebe-se pela fala de Aline (*Dá cinco. E agora, como a gente vai fazer?*) que para elas, problema de matemática tem que ter uma conta (adição, subtração, multiplicação ou divisão). A díade, depois várias tentativas de resolver o problema utilizando uma “conta” ( $5 \div 3$  e  $5 \times 3$ ) chega, enfim, a solução do problema por uma adição, ou seja, um saquinho para cada criança (colocam o número 3 no papel referente a 3 bombons) e a seguir distribuem os bombons restantes, acrescentando mais 2 bombons para cada criança. Por fim finalizam a adição  $3 + 2 = 5$ .

Salienta-se que, este tipo de procedimento, embora tenha levado a solução correta do problema, indica a dificuldade das participantes da díade em coordenar os esquemas de ação ao lidar com problemas de divisão. De acordo com Correa e Spinillo (2004):

Dividir como operação matemática é diferente do ato social de partilhar, bem como não se confunde com a ação de distribuir. A criança ao realizar a distribuição, pode fazê-lo simplesmente recorrendo a um raciocínio aditivo, em que vai acrescentando mais um elemento a cada rodada até que não haja mais elementos para uma nova distribuição. No entanto, dividir, como uma operação multiplicativa, implica que a criança possa também prestar atenção às relações entre as quantidades em jogo. Implica, em outras palavras, poder estabelecer relações de co-variação entre os termos envolvidos na operação (p. 109, 110).

**Fragmento 15.** *Díade simétrica:* Carlos (médio desempenho) e Bruno (médio desempenho)

*Sessão de interação número 2.*

*Problema:* “Marina tinha 24 lápis e resolveu distribuir igualmente entre as amigas. Cada amiga recebeu 3 lápis. Para quantas amigas Mariana deu os lápis?”

Este problema, divisão por cotas, descreve a relação entre o número de lápis e o número de amigas: três lápis para cada amiga. O fator ausente é o número de amigas. Por meio das análises da interação entre as díades, percebeu-se que uma das maiores dificuldades dos alunos neste tipo de divisão. Dados semelhantes foram encontrados em outras pesquisas,

como, por exemplo, as de Correa (2004), Nunes e Bryant (1997), Nunes et. al. (2005) e Spinillo e Lautert (2006).

O fragmento a seguir descreve a dificuldade de uma das díades em encontrar uma maneira de explicar e solucionar o problema, mesmo quando um dos integrantes sabe a resposta correta do mesmo.

Carlos e Bruno lêem, juntos, o problema. Silêncio! Carlos olha para Bruno, olha para a pesquisadora, de repente diz:

Carlos: *Eu sei o resultado, mas eu não sei fazer a conta.*

Bruno: *Ah, faz de mais. Três, mais três, mais três... A gente conta de três em três.*

Carlos não concorda com a sugestão de Bruno. Primeiramente faz uma multiplicação (24 x 8). Como o resultado é muito alto ele resolve tentar a divisão.

Carlos: *Acho que é de dividir.* (Carlos então escreve no papel  $24 \div 8$ . Neste momento Bruno parece não concordar).

Bruno: *Nós temos que saber quantas **amigas**.*

Carlos: *Por isso mesmo nós temos que **dividir**. 3 vezes 24 vai dar mais lápis né Bruno.*

Carlos para, lê o problema novamente e procura outra maneira de fazer, pois anteriormente ele tinha dito que sabia o resultado só que não sabia como fazer a “conta”. (Ele sabe que cada amiga irá receber 3 lápis, então resolve fazer uma adição repetida do número 3 até chegar ao número total de lápis a serem distribuídos, 24).

Carlos: *Só se fizer três, mais três, mais três... (Vai colocando a conta no papel  $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ .)*

Bruno: *Então é oito vezes três, oito vezes três, deixa eu ver...vinte e quatro.*

Carlos: *Dá sim 24!*

Bruno: *Essa aí deu certo.*

Carlos: *Não tô concordando com isso não. Você **acha** né, eu não tenho certeza.*

Bruno: *Se fosse você, como você ia fazer?*

Carlos: *Ia dividir.*

Bruno: *Então faz vinte e quatro dividido por três e coloca setenta e dois.*

Carlos: *Você fez de vezes.* (Faz a conta novamente). *Agora deu certo vinte e quatro dividido por três que dá oito* (Carlos vai falando e colocando a conta no papel  $24 \div 3 = 8$ ).

Bruno: *É, oito pessoas.*

Depois de chegarem a conclusão que seriam 8 amigas Carlos, ao mesmo tempo em que escreve a resposta, olha para a investigadora, como tentando explicar sua dificuldade de explicar como faria para solucionar o problema, apesar de saber a resposta. Comenta com Bruno:

Carlos: *É, mas a professora só passa assim para saber o total. (Carlos se refere ao total de lápis). Ela fala 24 lápis para 8 amigas. Quantos lápis para cada amiga?*

O início deste fragmento retrata a dificuldade de um dos integrantes da díade em expressar como faria para solucionar o problema, mesmo já sabendo a resposta.

Neste sentido, Vergnaud (1990a, p. 20) salientou que uma grande parte de nosso conhecimento é implícito: nós aprendemos a informação com a ajuda dos invariantes (categorias, relações e entidades de níveis mais avançadas), sem expressar ou sermos capazes de expressar esses invariantes. Segundo o autor, “isso fica especialmente visível no comportamento matemático dos estudantes, já que eles muitas vezes fazem a coisa certa, sem, contudo, saberem mencionar a razão para isso.”

Ainda, segundo o autor, este conhecimento implícito, são conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, pois não são conceitos propriamente, já que o conhecimento é necessariamente explícito.

Em relação aos procedimentos de solução, por intermédio das verbalizações dos componentes da díade e da análise do protocolo (Figura 39), nota-se que a díade experimenta diversas operações aritméticas na tentativa de solucionar o problema. E, por fim, pelo procedimento conhecido como “tentativa e erro” a díade chega à conclusão que deveria fazer uma divisão para chegar à resposta.



R: Ela vai distribuir entre 8 amigas

Figura 39. Procedimento aritmético adotado em problema de divisão por cota

O diálogo estabelecido entre os componentes da díade aponta também indícios da influência da fala e das ações do professor relacionada à importância que ocupa na relação professor-aluno e na formação dos estudantes. Quando Carlos tenta explicar a sua dificuldade na solução do problema, se expressa da seguinte forma: “É, mas a professora só passa assim para saber o total”. O aluno tenta dizer que a professora sempre coloca o problema como uma divisão por partição, cuja situação difere do problema de divisão por cotas. No caso da divisão por partição, se tem o número de lápis, o número de amigas e a pergunta que se faz é sobre o número de lápis para cada amiga. Como disse Carlos: “Ela (no caso a professora) fala 24 lápis para 8 amigas. Quantos lápis para cada amiga?”

A Figura 40 mostra como outra díade solucionou o problema. Além da estratégia de tentativa e erro, a díade utilizou a técnica do agrupamento e o esquema de correspondência. Neste caso, formaram grupos de três lápis (até totalizar 24), contam os grupos, e chegam a conclusão que Mariana poderia dar os lápis para oito amigas. Nunes et al. (2002) salientaram que, como no caso de multiplicação do tipo isomorfismo de medida, elas utilizam a informação sobre a relação fixa de lápis por amigas.

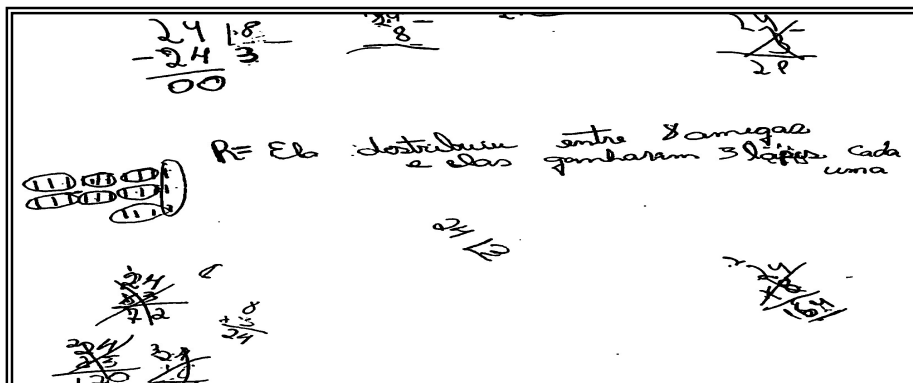


Figura 40. Procedimento de solução e representação gráfica de problema de divisão por cotas

As Figuras 40 e 41 revelam também que apesar da dificuldade encontrada na solução deste problema de divisão por cotas, as duas díades chegaram à solução correta do problema.

Desta forma, pode-se inferir que a interação social entre os componentes das díades, os diferentes tipos de procedimentos de solução e a troca entre os participantes, por intermédio da linguagem, tem relação com a solução adequada da tarefa.

**Fragmento 16.** Díade simétrica: Bruno (médio desempenho) e Carlos (médio desempenho).  
Sessão de interação número 3.

Problema: Dona Célia gastou 5 ovos para fazer um bolo. Ela precisa fazer 6 bolos. Quantos ovos irá usar?

Os dois integrantes lêem, juntos, o problema. A seguir Bruno “dispara”.

Bruno: *De vezes.*

Carlos: *É. cinco vezes seis ou seis vezes ou cinco.* (coloca no papel  $5 \times 6 = 30$  e  $6 \times 5 = 30$ ).

Bruno: *Trinta, certinho.* (Bruno começa a escrever a resposta do problema, de repente resolve ler o problema novamente. Para, pensa e diz:)

Bruno: *Ela fez. Não ela usou trinta ovos. Quantos ovos ela irá usar!*

Carlos: *Ela não usou ainda.*

Bruno concorda com Carlos, ela não usou ainda. Escreve então a resposta para o problema: “Ela vai usar 30 ovos.”

A análise da sessão videografada revelou que a relação de interação entre os membros desta díade é cooperativa e que os alunos resolvem o problema de forma conjunta.

A leitura inicial do problema é realizada pelos dois integrantes da díade. Ao final da solução, há uma nova leitura, classificada neste estudo como uma leitura de revisão: Bruno lê novamente o problema para verificar como colocará a resposta ou para ver se a mesma atende a pergunta do problema. No caso desta díade, a necessidade de verificação está relacionada à correta resposta numérica e a construção adequada da frase, dando especial atenção ao tempo verbal, que responderia adequadamente a pergunta do problema.

A fala de Carlos (“*é cinco vezes seis ou seis vezes ou cinco*”) denota que o mesmo compreende a comutatividade da multiplicação, pois a propriedade foi utilizada como forma de explicar ao companheiro da díade as duas maneiras de solucionar o problema.

No entanto, para crianças pequenas, conforme advertiu Vergnaud (1998), a propriedade comutativa da multiplicação não é tão óbvia. Segundo o autor, quando é colocado um problema onde se precisa calcular quando se deve pagar por 4 carrinhos de plástico que se quer comprar, custando 5 “dólares” cada, as crianças mais novas não aceitam solucionar a situação simplesmente multiplicando 4 vezes 5 ou 5 vezes 4 indiferentemente. Ainda, segundo o autor, é necessário considerar que esses procedimentos não são conceitualmente o mesmo, embora por causa da comutatividade da multiplicação, eles possam ser matematicamente equivalentes.

Além disso, em relação à propriedade comutativa, quer da multiplicação ou da adição, as sessões de interação transcorreram com várias citações sobre esta propriedade. Como exemplificado abaixo, as explicações dos alunos vieram acompanhadas de declarações e generalizações dos resultados no problema. Desta forma, pode-se inferir que houve o estudo explícito dos princípios gerais das operações aritméticas de adição e multiplicação na sala de aula, seja por forma de debates, explicações ou de enunciados verbais ou escritos. As verbalizações a seguir, são referentes ao problema de estrutura aditiva (canetas coloridas) da terceira sessão de interação social.

Henrique: *É de mais.*

Márcia: *A ordem dos fatores não altera o produto.* (Nota-se que Márcia enuncia o princípio da comutatividade relacionado à multiplicação).

Henrique: *A ordem dos fatores não altera a soma ou total. Pode fazer  $27 + 12$  ou  $12 + 27$*  (Explicando que se trata de uma adição e não de uma multiplicação).

A seguir, os fragmentos 17 e 18 ilustram como duas díades solucionaram corretamente o mesmo problema de produto de medidas, proposto na segunda sessão de interação social.

**Fragmento 17.** *Díade assimétrica:* Caio (alto desempenho) e Renan (baixo desempenho)

*Sessão de interação número 2.*

*Problema:* A padaria “Esquina do Pão” faz diferentes tipos de pães, bolachas, doces e bolos. Todos os dias os funcionários, responsáveis pelo preparo das delícias da padaria, fazem bolos deliciosos. Os bolos podem ser de três tamanhos (pequeno, médio e grande) e os recheios podem ser de seis tipos diferentes: morango, chocolate, brigadeiro, coco, doce de leite e banana. Quantos tipos diferentes de bolo a padaria Esquina do Pão pode fazer combinando sempre um dos tamanhos dos bolos com um dos diferentes tipos de recheios?

Caio lê o problema, Renan parece não prestar muita atenção, pois olha para os lados. Percebendo a distração do Renan, Caio inicia o diálogo.

Caio: *Vai Renan, o que você acha de ajudar “hem”?*

Renan: *“Ahn?”*

Caio: *Vamos ler de novo.*

Caio: *Árvore das possibilidades.* (depois da leitura começa a montar o esquema da árvore).

Renan: *Quê?*

Caio: *O que eu tinha falado pra você?*

Renan: *Não sei.*

Caio: *Falei que eu ia fazer a árvores das possibilidades. Agora faz a mesma coisa que eu fiz.*

Renan, a partir desta etapa começa a participar. Lê o problema e vai ditando os tipos de recheios para Caio colocar na árvore.

Caio: *Agora tem que ler a pergunta.* (Renan conta os diferentes tipos de bolo, seis mais seis, mais seis.)

Caio: *Tem que fazer três vezes seis* (coloca a conta no papel 3 x 6). *Vai dar dezoito 18.* (Começa a explicar para Renan)

Caio: *Aqui os tipos de recheio com os bolos grande, médio e pequeno. Aí você faz a conta.*

*Você entendeu?* (Renan balança a cabeça negativamente. Caio insiste).

Caio: *Tem que colocar o bolo grande com os recheios, os bolos médio com os recheios e os bolos pequenos com os recheios. Aí dá dezoito. Entendeu?*

Renan: *Agora sim!* (coloca a resposta).

Em relação à relação de interação entre os membros desta díade, como exemplifica o fragmento, notou-se que a relação entre eles alternava, ou seja, ora era do tipo liderança forçada, ora era cooperativo havendo participação de ambos. Nota-se que a liderança é exercida por Carlos. No início o clima é tenso, pois Renan se mantém distraído, alheio ao problema e Caio reclama. A partir do momento em que Renan começa a participar a relação muda e passa a ser cooperativa.

Este tipo de problema envolve três variáveis, sendo uma delas o número de recheios, a outra os tamanhos de bolo e a terceira, tipo de bolo, o produto das duas primeiras. No caso exposto, os bolos são um produto da combinação de um dos recheios com um dos tamanhos de bolo.

De acordo com Nunes et al. (2002), esses problemas envolvem uma correspondência um-a-muitos, lembrando que essa correspondência está implícita, e deve ser construída pelos próprios alunos. No caso desta díade, Caio explicita a maneira como solucionou o problema para que Renan possa compreender a situação. A explicação dada por Caio mostra que as correspondências podem ser realizadas de duas maneiras: combinando sempre um dos recheios (total de seis) com um dos tipos de bolo (três tipos), ou como o fez Caio para que Renan compreendesse o problema, um dos tamanhos de bolo (três) com cada um dos tipos de recheio.

Nota-se que no caso, mesmo resultando dezoito tipos de bolos, a maneira de raciocinar, solucionar e representar o problema são diferentes.

Neste sentido, como apontou a literatura revisada, para expandir o raciocínio multiplicativo, à escola deveria promover a análise de problemas do tipo produto de medidas e as trocas argumentativas entre os sujeitos. “As pesquisas indicam que a escola tem um papel crucial na expansão do raciocínio multiplicativo no que diz respeito a sua aplicação nesse tipo de problema” (Nunes et al., 2002, p. 187).

A seguir serão transcritos dois fragmentos de interação social entre os componentes de

uma mesma díade: Danilo (alto desempenho) e Beatriz (médio desempenho). Optou-se por apresentar de forma conjunta dois fragmentos, relacionados ao mesmo tipo de problema (produto de medidas), para acompanhar as explicações dadas pelos sujeitos sobre suas formas de pensar para solucionar a mesma categoria de problema, ajudar o amigo a avançar em relação a uma escolha mais econômica e a indecisão de Beatriz relacionada a abandonar um procedimento em que ela sentia segurança e que, ao mesmo tempo, ela sabia que solucionaria corretamente o problema, mas é longo e demorado (a árvore das possibilidades) para um procedimento mais simples e econômico, o uso de uma multiplicação.

Em relação à qualidade da interação entre os membros desta díade, a mesma era de liderança, exercida por Danilo. No entanto, Beatriz se apóia nesta liderança de forma amigável.

**Fragmento 18.** *Díade assimétrica:* Danilo (alto desempenho) e Beatriz (médio desempenho)

*Sessão de interação social número 1.*

*Problema:* (...) <sup>28</sup>. De quantas maneiras diferentes o cliente de André pode se vestir combinando sempre uma das camisas com uma das calças?

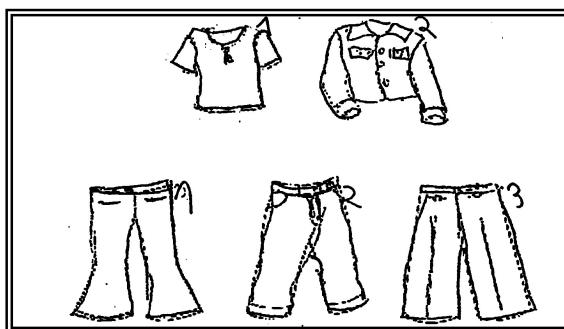


Figura 41. Ilustração de um problema do tipo produto de medidas

Beatriz: *Eu tava pensando em a gente fazer a árvore das possibilidades para a gente ver.* (Começa a fazer as combinações por meio da árvore das possibilidades)

Danilo: *E sem fazer a árvore de possibilidades você consegue?* (Beatriz fica quieta, Danilo

---

<sup>28</sup> Problema completo no anexo III.

explica).

Danilo: *Duas camisas e três calças. Então é só fazer duas vezes três que dá seis. Eu vou fazer aqui do meu jeito, depois você faz do seu.* (Coloca no papel  $2 \times 3 = 6$ ). *Quando eu comecei na terceira série eu fazia assim: uma camisa com uma calça, a mesma camisa com outra calça e assim sucessivamente. Aí depois eu percebi que multiplicando dava o mesmo resultado de somando as possibilidades de camisas e calças.* (Beatriz parece compreender as explicações de Danilo, porém continua a fazer a árvore das possibilidades).

**Fragmento 19.** *Díade assimétrica:* Danilo (alto desempenho) e Beatriz (médio desempenho)  
*Sessão de interação social número 2.*

*Problema:* exposto no Fragmento 17, (Padaria “Esquina do Pão”).

Os dois integrantes da díade lêem alto e de forma conjunta o problema, logo após começa o diálogo.

Danilo: *Você lembra? Já fizemos uma situação parecida.* (Danilo se refere ao problema da sessão anterior). *Combinação quer dizer? Lembra?*

Beatriz: *Possibilidades.*

Danilo: *O que você acha que tem que fazer? Você pode fazer a árvore, eu não gosto.* (Danilo coloca no papel  $3 \times 6 = 18$ ) *Você concorda?*

Beatriz: *Eu acho mais fácil deixar com a árvore de possibilidade, é mais complicado.* (Logo abaixo Beatriz explica porque é mais complicado).

Danilo: *Dá mais trabalho.*

Beatriz: *É mais complicado. É três tipos de bolo e seis tipos de recheio, daí no total vai dar dezoito.* (Beatriz quer fazer a árvore de possibilidade, mas sabe que é mais complicado por que serão dezoito possibilidades. Percebe-se também que Beatriz confia na forma de fazer e no resultado apresentado por Danilo).

Danilo: *Vai ocupar  **muito espaço**, são **dezoito possibilidades**.* (A ênfase dada por Danilo em suas falas demonstra que ele está tentando convencer Beatriz a fazer uma multiplicação):

Beatriz: *Isso vai.*

Danilo: *É, demora.*

Beatriz: *É.*

Por fim, nesta sessão, Beatriz desiste de fazer a árvore de possibilidades e acaba aceitando a sugestão de Danilo. Faz a multiplicação ( $3 \times 6 = 18$ ) e escreve a resposta do problema: “Há 18 combinações possíveis”.

O fragmento acima permite observar que a estratégia utilizada por Danilo permitiria solucionar o problema para qualquer número de bolos e recheios e se trata de uma forma mais elaborada de pensamento e também uma maneira mais econômica de solucionar o problema. Este fato, a aparente simplicidade da multiplicação utilizada por Danilo, influenciou a aceitação por sua companheira da díade.

Salienta-se que, a idéia de Danilo ser válida para qualquer número de bolos e recheio traz embutido o pensamento multiplicativo para este tipo de problema, como se pôde perceber na sua fala: “Quando eu comecei na terceira série eu fazia assim: uma camisa com uma calça, a mesma camisa com outra calça e assim sucessivamente. Aí depois eu percebi que multiplicando dava o mesmo resultado de somando as possibilidades de camisas e calças”.

Na compreensão dos problemas, neste caso de estrutura multiplicativa, classificado como produto de medidas, é evidente então, que a busca de estratégias mais econômicas para solucionar o problema funcionou como um “incentivo” para descobrir novas generalizações e relações, na conquista gradativa da construção conceitual das estruturas multiplicativas do tipo produto de medidas.

No fragmento apresentado, como se pôde observar, se cada um dos elementos da díade estivesse trabalhando individualmente teria conseguido solucionar o problema, entretanto, perder-se-ia o enriquecimento pessoal que resultou da interação estabelecida.

No caso desta díade, a análise dos protocolos do pré-teste e pós-teste permitiu verificar que a aluna Beatriz passou da representação da árvore das possibilidades para o procedimento multiplicativo.

Assim sendo, pode-se inferir as justificativas que Danilo apresenta a favor da solução do problema utilizando uma multiplicação pode ter uma relação com a mudança de procedimento de solução utilizado por Beatriz no pós-teste.

Este é um bom exemplo de como se podem construir conhecimentos partindo de procedimentos diferentes, mas arranjan-do formas de intersubjetividade comuns, ou seja, conseguindo conceber explicações para que o companheiro entenda um determinado



procedimento e que seja capaz de dar um significado pessoal as suas construções.

## **10. Recomendações e discussão final dos resultados relativos à interação social em díade durante a solução de problemas**

A apresentação e análise dos diversos fragmentos das verbalizações estabelecidas entre os componentes das diferentes díades durante as sessões de interação social indicaram que a interação em díade pode favorecer a compreensão e aquisição de novas competências matemáticas, pois, os sujeitos quando confrontados com outras estratégias de solução são estimulados a rever sua forma de pensar, assim como, compreender outras, diferentes das suas.

Nos limites dessa investigação, verificou-se que para a maioria dos participantes deste estudo (79,2%) a interação social em díade teve relação com o avanço no percentual de desempenho dos alunos. No entanto, é preciso considerar que além da interação social em díade, outros fatores podem ter influenciado o desempenho, a saber: o desenvolvimento cognitivo individual, o trabalho desenvolvido em sala de aula pelo professor durante os dois meses de coleta de dados, os problemas desenvolvidos nas sessões de interação, neste caso, além da interação social houve maior contato dos participantes com as diversas categorias de problemas de estrutura aditiva e multiplicativa, rotineiros e não-rotineiros.

Os fragmentos e análises apresentadas permitiram também perceber que no processo interativo nem tudo é cognitivo. Pressupõe também que os participantes sejam capazes de gerenciar a solução conjunta de uma tarefa, de decidir quem lidera em cada momento, de chegar a consensos, de dar tempo e espaço ao outro para que ele possa expor sua forma de pensar. Assim sendo, muito do que acontece durante a interação permite que os participantes desenvolvam também competências lingüísticas e sócio-afetivas. Como bem salientaram César, Torres, Caçador e Candeias (1999):

Ninguém é um sujeito epistêmico, onde o afetivo está separado do cognitivo. Interagir significa também saber administrar os conflitos afetivos, aprender a respeitar os sentimentos dos pares, lidar com a frustração, controlar a ansiedade, pois nem sempre temos razão no que dizemos, fazemos e nem sempre se encontra rapidamente a solução que se procura. (César, Torres, Caçador & Candeias, 1999, p. 87)

Em relação à interação estabelecida entre os membros das diferentes díades, as análises das sessões videografadas apontaram que, em geral, o domínio do conhecimento pelo aluno mais “forte” da díade não necessariamente levou o aluno a dominar a situação em todos os momentos, assim sendo, outros fatores podem ter influenciado na qualidade da interação, como, por exemplo, uma personalidade mais dominadora, uma maior organização de um dos alunos ou mesmo uma determinação de um dos componentes da díade em cumprir a tarefa proposta.

Observou-se também, que nem sempre o aluno alto desempenho (forte) consegue ajudar o de baixo desempenho, pois o aluno mais “fraco” pode não ter compreendido a lógica do mais forte, ou o mais fraco justificou suas respostas com maior segurança. As forças dos argumentos e da qualidade da interação dependem também do orador, do seu espírito, humor, talento, liderança e poder de sugestão.

As análises quantitativas e qualitativas deste estudo sugerem também que a interação social em díade pode contribuir tanto para um alcance de melhores índices de desempenho dos estudantes quanto para o desenvolvimento sócio-afetivo dos mesmos, pois as sessões de interação se constituíram em momentos agradáveis de troca entre os participantes.

O plano empírico desta investigação previa somente a interação social entre os membros da díade, entretanto, para os problemas não rotineiros com mais de uma resposta, em alguns casos, no encontro dos estudantes com a pesquisadora para a realização da sessão posterior houve comentários dos alunos quanto à (s) resposta (s) obtida (s) na solução. Algumas díades explicaram o porquê da sua resposta ter sido diferente de outra díade.

Neste momento, antes do início da sessão, a investigadora conversava com as crianças sobre o que havia ocorrido. Os alunos falaram que depois da sessão comentaram a resposta do problema com a professora e os colegas. Esses comentários geraram discussão entre as próprias crianças. Assim sendo, explicaram para a investigadora que haveria a possibilidade de outras repostas para o mesmo problema.

Salienta-se que talvez, este novo olhar para os problemas não-rotineiros, pode ter influenciado nas decisões das díades sobre as possíveis respostas para os problemas das sessões posteriores, ou seja, passaram a admitir a possibilidade de mais de uma resposta para alguns dos problemas apresentados.

O fato de a discussão ter sido desencadeada pelos próprios alunos, fora do contexto desta investigação, evidencia que, em geral, os problemas não rotineiros, motivam os alunos e permitem explorar diversos conceitos matemáticos de forma significativa. Entretanto, ressalta-se que, tanto para os problemas rotineiros como para os não-rotineiros, os diferentes procedimentos e respostas, podem gerar ricos momentos de discussão e construção dos conceitos matemáticos.

Assim, na perspectiva da construção dos conceitos matemáticos, por intermédio da solução de problemas, há ainda que se considerar a necessidade e o confronto dos estudantes com diferentes tipos de problemas, rotineiros e não-rotineiros.

Por fim, o objetivo subjacente da interação social em díade ou da interação interpares ou ainda a atividade do debate conjunto dos diferentes caminhos percorridos na solução de problemas, rotineiros e não rotineiros, entre todos os alunos é gerar momentos de discussão mais ricos e proporcionar ocasiões oportunas onde os estudantes possam explicar, partilhar e confrontar as suas estratégias de solução e, eventualmente, compararem pontos de vista diferentes dos que possuíam. Sabe-se que, os alunos quando confrontados sentem necessidade de clarificar ou reformular os argumentos que tinham utilizado.

Como salientou Poloni (2006), no trabalho cooperativo, quando os membros se envolvem na interação, os mesmos sintetizam conhecimentos, comunicam descobertas, e falam das suas dificuldades. As justificativas apresentadas são interpretadas pelo parceiro e transformadas em outras elaborações. Para o autor:

Com o surgimento de uma posição cooperativa, a ampliação da resolução de problemas matemáticos liga-se à ampliação da produção de significado. Junto com a coordenação das ações, a ampliação torna-se, para os engajados no trabalho, parte integrante do processo de análise e transforma-se em uma atividade de aprendizagem/ensino. (Poloni: 2006, p. 164)

Em relação à interação social entre os alunos, sabe-se que esta não é uma prática que se adquire em um único momento, mas, que precisa ser construída no dia-a-dia e que, muitas vezes este tipo de trabalho não ocorre na sala de aula. Assim, para que a interação social realmente se efetive, este tipo de trabalho deve ser constante e não somente um trabalho diferenciado que ocorre de forma esporádica.

Ainda, no cotidiano da sala de aula a interação entre alunos, e destes com o professor, deve ser estimulada e momentos de trabalho individual devem ser permeados por momentos de trabalho conjunto. Assim, atividades em pequenos grupos (díades, tríades ou quartetos), bem como, atividades coletivas devem ser contempladas, com vistas a construção da prática argumentativa, a troca de informações, pontos-de-vista e a tomada de consciência das ações individuais.

Como pontuou Brito (2006), é preciso considerar que a solução de problemas é uma atividade cognitiva individual, entretanto é uma prática que pode ser enriquecida por meio da interação, pois a mesma, ao proporcionar momentos de trocas de pontos-de-vista e momentos para desenvolvimento da prática argumentativa, levam a reflexão e, conseqüentemente, a aquisição e ampliação de conceitos.

Na construção dos conceitos da aritmética elementar, como propôs Vergnaud (1996, 1997, 2003, 2005a), estão presentes um conjunto de situações, cuja análise e apropriação requer o domínio de um conjunto de invariantes (propriedades, relações, objetos) e um conjunto de representações simbólicas (icônicas, pictográficas, numéricas, diagrama, linguagem natural), ou seja, há uma grande variedade de situações envolvidas na formação de um conceito e uma ampla gama de conceitos envolvidos na compreensão de uma situação de solução de problemas.

Neste processo de significação, pode-se dizer que a linguagem está crucialmente envolvida; na representação, porque o significante é ela própria. Na construção do significado porque ao construí-lo, ao negociá-lo ou compartilhá-lo, a linguagem é essencial. No conjunto de situações porque, principalmente em sala de aula, as situações precisam ser descritas e essa descrição envolve a linguagem. (Moreira, 2003)

Este estudo, a luz da teoria de Vigotski, percebe a interação social como potencializadora das construções individuais dos sujeitos. Neste sentido, Leite (2000, p. 35) pontuou que “é no plano intersubjetivo, ou seja, nas trocas entre o sujeito-outro/objeto social, que têm origem às funções mentais superiores.” Entretanto, como bem salientou a autora, ainda “permanece lacunar um estudo aprofundado do papel tanto do sujeito quanto dos mecanismos e processos que atuam nos níveis interpsicológicos, intrapsicológico e na passagem entre esses dois planos”(p. 36).

Vigotski enfatiza que a aprendizagem é um processo que se origina nas interações sociais que a criança vivencia. Reconhecendo o papel da interação social, esta se torna central no processo de elaboração e construção do conhecimento, confirmando o aspecto social da aprendizagem.

Ainda, em relação à interação social no ambiente escolar e os preceitos de Vigotski, momentos de interação entre os alunos, mediados pela ação do professor, no caso da aritmética, bem como noutros tópicos do currículo de Matemática, podem ampliar e favorecer a formação dos conceitos científicos, ou seja, na visão vigotskiana o ambiente escolar é considerado o espaço ideal para a aquisição desse tipo de conceito.

Segundo Moysés (2004, p.38) a maneira intencional como os conceitos científicos são, ou deveriam ser, trabalhados na escola abre caminho para a revisão e a melhor compreensão dos conceitos espontâneos. A aprendizagem desenvolvida na escola possibilita a expansão conceitual. Afinal, a escola é um ambiente, ou deveria ser, que fornece suporte para as interações com o conhecimento socialmente elaborado.

Assim, no curso da interação social, da reconstrução interna de uma operação externa típica do funcionamento psicológico superior é que os conceitos vão sendo construídos.

Nesta investigação, a análise qualitativa dos dados apontou que os esforços para a solução dos problemas tanto surgiram na interação entre os estudantes como dos esforços individuais para a solução. Acrescenta-se ainda que a solução dos problemas, no fluxo da interação social, passou pelo gerenciamento dos conflitos de ordem pessoal e cognitiva, pois os membros das díades, por um lado tinham que solucionar os problemas e, por outro, tinham que resolver e gerenciar a questão do trabalho em parceria.

Por intermédio destas observações, o que se deseja ressaltar é a importância de se oferecer momentos na sala de aula que contemplem a interação social em díade e a solução de problemas de forma conjunta, bem como, ocasiões onde o trabalho individual deve ser considerado, de acordo sempre, com os objetivos da tarefa e do planejamento da situação pelo professor. A diversidade enriquece e evidencia as potencialidades dos alunos.

Os episódios de interação social, a linguagem oral, permitiram também acompanhar mais de perto as justificativas dos estudantes relacionadas aos procedimentos de solução, os diferentes tipos de representação simbólica, bem como, a presença ou não de dificuldade na

execução da tarefa.

Como apontou Panizza (2006), a linguagem enquanto representação simbólica desempenha diferentes e complementares papéis na atividade matemática, como por exemplo, para comunicar aos outros ou a si mesmo as formas de solução, como ajuda para o pensamento, como apoio para o cálculo, para o planejamento e o controle da situação. É justamente quando as ações ainda não foram automatizadas e, assim, interiorizadas, que a linguagem como acompanhamento da ação favorece o cumprimento da tarefa e a solução do problema.

Para Vergnaud (1990a), a função mais importante da linguagem é contribuir para a identificação das características relevantes de um objeto ou situação. Para o autor, “palavras e símbolos, as sentenças e expressões simbólicas são instrumentos cognitivos indispensáveis para a transformação dos invariantes operacionais implícitos para conceitos e teoremas. Segundo o autor, provavelmente era isso que Vygotsky tinha em mente, mesmo que ele não tenha se expressado desse modo.” (Vergnaud, 1990a, p. 20).

Essas considerações trazem alguns argumentos a favor da necessidade de criar espaços para as interações entre os alunos e as trocas argumentativas na sala de aula. Sugerem também a necessidade de rever algumas tradições escolares, pois em virtude de estarem ancoradas em visões mais restritas sobre as funções da linguagem e da interação social, muitas vezes não ampliam a formação dos conceitos matemáticos e não favorecem a ocorrência da aprendizagem de forma significativa.

Como também ressaltou Golbert (2002, p. 25) “o discurso, a atividade conjunta e a reflexão coletiva, por um lado, fundamentam e, por outro lado, são constituídos pela atividade construtiva individual.”

Além disso, é importante lembrar que os estudos de Vigotski abrem um caminho de análise e fornecem importantes elementos a favor da prática de interação social no ambiente escolar. Contudo é importante lembrar que nem sempre, mesmo com a ajuda do colega, o aluno consegue compreender os conceitos envolvidos na tarefa de solução de problemas. Como salientou Vigotski:

Dissemos que, em colaboração, a criança pode fazer mais do que pode independentemente. No entanto, é preciso acrescentar: não infinitamente mais. A

contribuição da colaboração para a performance da criança restringe-se aos limites determinados pelo estado de seu desenvolvimento e por suas potencialidades intelectuais.

(citado por Daniels, 2003, p. 85)

Salienta-se assim, que as práticas de sala de aula, em especial nas aulas de matemática, deveriam encorajar a prática da interação social e a solução de problemas como uma das formas possíveis de trabalho na formação, ampliação e aplicação do conhecimento matemático.

Em suma, a interação social durante a solução de problemas matemáticos ao proporcionar momentos de discussão torna favorável à troca de informação e permite que os alunos estabeleçam relações entre os diferentes tipos de procedimentos de solução, tornando possível conseguir, não só uma aproximação entre eles, mas também, como no caso da aritmética elementar, uma maior compreensão das estruturas aditivas e multiplicativas - seja para aquele que explicita um procedimento mais elaborado (ou mais econômico), como para aquele que começa a vislumbrar a possibilidade de modificar o procedimento que utiliza para adotar o que o colega propõe.

Por fim, apesar das limitações deste estudo, os resultados desta investigação apontaram um caminho, pois, os resultados obtidos são animadores. As interações em díade e a solução de problemas não são as únicas formas de favorecer a aprendizagem de conceitos matemáticos; entretanto, constituem uma das soluções possíveis para o desenvolvimento dos sentidos e significados da Matemática.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Chega-se, por fim, a última etapa deste estudo: concluir esta investigação. No entanto, entre idas e vindas, no tecer da teoria e da prática, na construção metodológica da investigação, nas limitações do estudo e por fim a análise dos resultados, conclui-se que não é possível tirar um fechamento geral para todas as situações apresentadas. Pode-se dizer que as diversas leituras, as experiências vividas com os participantes deste estudo, os dados apresentados e as conclusões parciais geradas em cada etapa da análise contribuíram na decisão de não concluir totalmente ou oficialmente esta investigação.

Deste modo, apesar de pesquisas anteriores, bem como, esta investigação mostrarem os efeitos positivos da interação social no desenvolvimento não só cognitivo, mas também social e afetivo dos alunos, novas pesquisas sobre a influência da interação social na solução de problemas aritméticos necessitam ser realizadas, pois se tem sempre um novo olhar e um novo contexto: escolar, cultural, social e moral, suscitando novas análises e contribuições.

Assim, neste percurso de busca de aprimoramento constante e da experiência vivenciada enquanto pesquisadora e professora, encontramos na interação social uma das formas possíveis de “dialogar” com o conhecimento e de desenvolver significativamente a matemática escolar.

Na tarefa do professor, torna-se importante também considerar os diversos fatores que influenciam a qualidade da interação entre os alunos: a complexidade que permeia este tipo de trabalho, as relações afetivas, sociais e cognitivas, as características da situação e do problema proposto, as instruções que são dadas para a sua realização, o envolvimento de cada um dos participantes na execução da tarefa, e por fim, além da potencialidade e importância atribuída à interação social, há necessidade do domínio por parte do professor da sua área de ensino.



Sobre as situações didáticas no contexto de sala de aula, como salientou Vergnaud (1990a), é preciso que o professor crie e provoque diferentes situações. Além disso, é função primordial do professor intervir e mediar o conhecimento, bem como, oferecer oportunidades para que os estudantes possam enfrentar e solucionar os problemas de diversas formas, com seus próprios recursos. No entanto e, ao mesmo tempo, como ressaltou Parra (2001), a educação matemática tem um duplo desafio:

(...) é necessário que os alunos avancem em seus procedimentos e que todos cheguem a dominar os procedimentos “eficazes”, aqueles que o professor (e a comunidade) reconhece como os que permitem dominar a situação, qualquer que seja o âmbito numérico ou a dimensão com que esteja formulada (Parra, 2001, p.208).

Em relação aos procedimentos de solução de problemas matemáticos, orais ou escritos, corretos ou incorretos, considera-se importante que os mesmos se tornem objeto de reflexão não só pelos professores, mas também por parte dos alunos.

Ainda, o professor deve agir como mediador no processo de construção do conhecimento e, deve proporcionar o contato dos alunos com diferentes tipos problemas, bem como, promover a interação social e criar momentos de discussão e troca entre os estudantes. Salientando ainda que, como o fez Vergnaud (1996, 1988), os conceitos implicados na solução de problemas aritméticos não são construídos em um curto espaço de tempo, como se poderia pensar, ou seja, exclusivamente construídos nas séries iniciais do ensino fundamental.

Como também lembrou Vigotski (2005), quando a criança aprende alguma operação aritmética ou algum conceito científico, o desenvolvimento dessa operação ou conceito apenas começou.

A idéia aqui defendida é que, a partir das produções dos alunos ou de situações desencadeadas pelo professor, os estudantes compartilhem, oralmente e por escrito, as diversas formas de “pensar” sobre uma situação problema e que assim possam estabelecer relações, discutir estratégias, optar por aquelas mais apropriadas ou “econômicas” e gradativamente avançar em relação à formação e desenvolvimento conceitual matemático.

Ao finalizar este estudo, em relação ao desenvolvimento dos conceitos, em conformidade com os PCN e em consonância com o princípio vigotskiano de que o processo de aprendizagem precede e impulsiona o desenvolvimento ressalta-se o papel da escola

enquanto promotora do conhecimento e da aquisição dos conceitos científicos.

A lembrar que para Vigotski (2005, p. 126), “a criança adquire certos hábitos e habilidades numa área específica antes de aprender a aplicá-los consciente e deliberadamente. Nunca há um paralelismo completo entre o curso do aprendizado e o desenvolvimento”.

Como assinalou Trindade (2006), Vigotski resgata a importância das interações sociais, a importância do outro na nossa vida, uma vez que segundo o autor, “o desenvolvimento de qualquer pessoa não é individual, ele é pessoal. Isso quer dizer que eu me desenvolvo de uma forma singular, única, mas desenvolvo uma relação com os outros” (Trindade, 2006, p. 9).

Ainda, em relação à educação, pode-se dizer que a escola desempenha importante papel ao propiciar o acesso aos conhecimentos sistematizados e acumulados que colaboram na ampliação do significado dos conceitos cotidianos. Embora, cada um deles, conceitos científicos e cotidianos, percorra caminhos diferentes, eles estão intimamente relacionados e articulados.

Assim sendo, no processo de ensino e aprendizagem da matemática, deve-se levar em conta, como reiteradamente assinalado, os esquemas de conhecimento prévio dos alunos relacionados aos conteúdos de aprendizagem já adquiridos, mas ao mesmo tempo provocar desafios que o levem a questionar, a ir além do que já é conhecido. Contudo, como salientou Onhubia (2006, p. 125), esses desafios e exigências devem vir acompanhados dos apoios e suportes, dos instrumentos de todos os tipos para que os alunos superem essas exigências e desafios.

Por fim, para promover o pleno desenvolvimento dos alunos e gerar atitudes mais positivas face à matemática, é importante compreender os procedimentos e representações de solução que eles utilizam, levando em conta que algumas delas são anteriores às aprendizagens escolares. Se um dos objetivos a atingir com o ensino nas séries iniciais é o desenvolvimento de capacidades e competências, como afirmaram Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), então a exploração dos diferentes procedimentos de solução dos alunos, o fato de lhes propor tarefas que permitem formular hipóteses e argumentar, são aspectos essenciais para se considerar.

Agora, concluindo esta pesquisa, vislumbrando todos os caminhos percorridos por esta investigação, desde a construção do corpo teórico, a apresentação da literatura revisada, a

coleta de dados e a análise quantitativa e qualitativa pode-se dizer que muitas das inquietações iniciais se abrandaram, muitas questões foram respondidas totalmente ou parcialmente. Contudo novos olhares e pesquisas investigativas se lançam sobre a interação social no contexto de solução de problemas, novas investigações sobre a construção da aritmética, assim como, novos estudos sobre outros campos da Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Espera-se que esta investigação possa proporcionar aos professores das séries iniciais momentos de reflexão sobre a prática educativa do ensino da Matemática, além de oferecer recursos teóricos e práticos para analisar as produções de seus alunos, fornecendo também elementos para que os mesmos possam perceber a riqueza da interação social no processo de construção do conhecimento e como ferramenta de ensino e aprendizagem. Enfim, que os professores possam ser promotores de situações que permitam que novas “aprendizagens” se construam e concretizem.

Finalmente, as discussões realizadas ao longo desta investigação, mais que tudo visaram instigar, especialmente os educadores, a terem um novo olhar frente às potencialidades da interação social na construção dos conhecimentos matemáticos.

## REFERÊNCIAS

Abrantes, Paulo, Serrafina, Lurdes & Oliveira, Isolina. (1999). *A matemática na educação básica*. Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica. Portugal, Lisboa: Colibri Artes Gráficas.

Alves, E., & Brito, M. R. F. (2003). *Algumas considerações sobre a solução de problemas*. Anais do VII EBRAPEM [on line], Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática. Disponível em: <<http://sites.unisanta.br/teiadodosaber/apostila/matematica>>. Acesso em: 09 set. 2005.

Arias, José Carlos, Sardina Maria Antigua, & Sardina, Mercedes. (2005). Estudio sobre Las Dificultades de Aprendizaje em las Matemáticas: habilidades numéricas y simbólicas. Disponível em: <<http://platea.pntic.mec.es/~jcarias/uam2005/metodos/bodyfinal.htm>> Acesso em: 3 jun. 2006.

Baquero, R. (2001). *Vygotsky e a Aprendizagem Escolar*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Bezerra, H., & Meira, L. (2006). Zona de desenvolvimento proximal: interfaces com os processos de intersubjetivação. Em: L. Meira & A. G. Spinillo (Orgs.), *Psicologia Cognitiva: cultura, desenvolvimento e aprendizagem*, (pp. 191-221). Pernambuco: Universitária da UFPE.

Brandão, Ana Carolina & Selva, Ana Coelho. (1999). O livro didático na educação infantil: reflexão versus repetição na resolução de problemas matemáticos. *Educação e Pesquisa* [on

line], v. 25, n.1. Disponível em: <<http://www.scielo.br>>. Acesso em: 18 ago. 2005.

Brasil. MEC/PCN (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais/Secretaria de Educação Fundamental*. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. MEC/INEP (2003). Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Diretoria de Avaliação da Educação Básica. *Guia para elaboração de itens de matemática*.

Brasil. MEC/INEP (2004). Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Resultado SAEB 2003*. Disponível em: <<http://www.inep.gov.br>>. Acesso em: 10 mar. 2006.

Brito, Márcia Regina F. (2000). Este problema é difícil porque não é da escola! A compreensão e a solução de problemas aritméticos verbais por crianças da escola fundamental. Em: *Temas em Psicologia*, 8(1), 93-109.

Brito, Márcia Regina F. (2006). Alguns Aspectos Teóricos e Conceituais na Solução de Problemas Matemáticos. Em: M. R. F. Brito (Org.), *Solução de Problemas e a Matemática Escolar* (pp. 13-53). Campinas: Alínea.

Brolezzi, Antonio Carlos. (1996). *A tensão entre o discreto e o contínuo na história da Matemática e no ensino da Matemática*. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Brumfiel, Charles F., Eicholz, Robert E., & Shanks, Merrill. E. (1972). *Conceitos fundamentais da matemática elementar*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A. cap. 6, p. 55- 68.

Calsa, G. C. (2002). *Intervenção psicopedagógica e problemas aritméticos no Ensino Fundamental*. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Canôas, S. S. (1997). *O Campo Conceitual Multiplicativo na Perspectiva do Professor das Séries Iniciais (1ª. a 4ª. série)*. PUC – SP (Dissertação de Mestrado em Educação

Matemática).[on line]. Disponível em:<<http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao>> . Acesso em: 05 mar. 2006.

Caraça, B. J. (1989). *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora. Cap. I, p. 3-28.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. Em: LESH & LANDAU (edit). *Acquisition of mathematics concepts and processes*, (pp. 07-44). Orlando: Academic Press.

Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2006). Matemática escrita versus matemática oral. Em: T. N. Carraher, D. W. Cahhaer & A. D. Schliemann (Orgs.) *Na vida dez, na escola zero*, (pp. 45-67). São Paulo: Cortez.

Carvalho, C. (2005a). Comunicações e Interações Sociais nas Aulas de Matemática. Em: C. E. Lopes & A. M. Nacarato (Org.), *Escritas e Leituras na Educação matemática*, (pp. 15-34). Belo Horizonte: Autêntica.

Carvalho, C. (2001). *Interação entre pares: contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7º. Ano de escolaridade*. Lisboa, Universidade de Lisboa (Tese de doutorado). Disponível em: <<http://cie.fc.ul.pt/membros/ccarvalho/tesescc.pdf>> Acesso em: 12/junho/2006.

Carvalho, M. (2005b). *Problemas? Mas que problemas?! Estratégias de resolução de problemas matemáticos em sala de aula*. Rio de Janeiro, Petrópolis: Vozes.

Cecchini, Marco. (2003). Introdução. Em: Luria, Leontiev, Vygotsky et al. *Psicologia e Pedagogia: bases psicológicas da aprendizagem e desenvolvimento*. São Paulo, SP: Centauro editora.

Centurión, Marília. (2002). *Conteúdo e metodologia da matemática: números e operações*. São Paulo: Scipione.

César, Margarida, Torres, Madalena, Caçador, Fátima., & Candeias, Nunes. (2006). *E se eu*

*aprender contigo? A interação entre pares e a apreensão de conhecimentos matemáticos.* Em: M. V. Pires, e cols. (Eds), Caminhos para a investigação em Educação Matemática em Portugal. Lisboa: SPCE, Secção de Educação Matemática/APM, 73-89. Disponível em: <<http://www.spce.org.pt/sem/Mce.pdf>>. Acesso em: 10 nov. 2006.

César, M. (1999). Interações sociais e apreensão de conhecimentos matemáticos: a investigação contextualizada. Em: J. P. Ponte & L. Serrazina (Eds.), *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Itália* - Lisboa: SPCE - Secção de Educação Matemática, 5-46. Disponível em: <<http://www.spce.org.pt/sem/9900Margarida.pdf>> Acesso em: 10 nov. 2006.

Cole, M. (1997). La psicología social-cultural-histórica: algunos comentarios generales y una propuesta para una nueva metodología genético-cultural. Em: J. V. Wertsch, P. Del Rio & A. Álvarez (Eds.). *La mente sociocultural: aproximaciones teóricas y aplicadas* (pp. 35-47). Fundación Infancia y Aprendizaje. Madrid: España.

Coll-Salvador, César (1997). *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento*. Barcelona: Paidós Educador.

Coll-Salvador, César, Alemany, Isabel Gomes, Martí, Eduard, Majós, Teresa Mauri, Mestres, Marina Miras, Goñi, Javier Onrubia et al. (2000). *Psicología do Ensino*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Correa, J. (2004). A resolução oral de problemas de divisão por crianças. *Estudos de Psicologia*, 9(1), 145-155.

Correa, J., & Spinillo, A. G. (2004). O desenvolvimento do raciocínio multiplicativo em crianças. Em: R. M. Pavanello (Org). *Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: a pesquisa e a sala de aula* (pp. 103-127). São Paulo: Editora da SBEM.

Cruz, Maria Nazaré. (2005) Desenvolvimento cognitivo em Vygotsky: entre os ideais da matemática e a harmonia da imaginação. *Anais da 28ª. Reunião Anual da ANPED*. [on line]. Disponível em: < <http://www.anped.org.br>>. Acesso em: 10 março 2006.

Daniels, H. (2003). *Vygotsky e a pedagogia*. São Paulo: Loyola.

Davis, C. (2005). Piaget ou Vygotsky: uma falsa questão. Em: *Revista Viver Mente & Cérebro*, Coleção Memorial da Pedagogia: Lev Semenovich Vygotsky. São Paulo: Ediouro, (v. 2), p. 08-41.

Davis, E. J., & Mckillip, W. D. (1997). Aperfeiçoando a resolução de problemas-história na matemática da elementary school. Em: S. Krulik & R. S. Reys (Orgs.), *A resolução de problemas na matemática escolar* (pp. 114-130). (H. H. Domingues & O. Corbo, trad.). São Paulo: Atual.

Diniz, M. A. (2001a). Resolução de problemas e comunicação. Em: K. S. Smole & M. A. Diniz (Orgs.). *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 87-97). Porto Alegre: Artmed.

Diniz, M. A. (2001b). Os problemas convencionais nos livros didáticos. Em: K. S. Smole & M. A. Diniz (Orgs.). *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 99-102). Porto Alegre: Artmed.

Domingues, Higino H. (1997). Apresentação. A resolução de problemas na matemática escolar. Em: S. Krulik & R. E. Reys. *A resolução de problemas na matemática escolar*. São Paulo: Atual.

Duarte, N. (1996). *Educação escolar: teoria do cotidiano e a escola de Vigotski*. Campinas: Autores Associados.

Echeverría, M. D. P. P. (1998). A solução de problemas em Matemática. Em: J. I. Pozo (Org), *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender* (pp. 43-65). Porto Alegre: ArtMed.

Echeverría, M. D. P. P., & Pozo, J. I. (1998). Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. Em: J. I. Pozo (Org.), *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender* (pp. 13-42). Porto Alegre: ArtMed.

Fontana, Roseli A. C. & Cruz, Maria Nazaré. (1997). *Psicologia e trabalho pedagógico*. São Paulo: Atual.



Fayol, M. (1996). *A criança e o número: da contagem a resolução de problemas*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Filho, J. A. C. (coord). (2002). Identificação de dificuldades de aprendizagem de conceitos matemáticos nas séries iniciais do Ensino Fundamental. *Relatório final SPAECE*. [on line]. Disponível em: < <http://www.cin.ufpe.br>>. Acesso em: 25 março 2006.

Freitas, M. T. A. (2002). A abordagem sócio-histórica como orientadora da pesquisa qualitativa. *Cadernos de Pesquisa* [on line], (116), 21-39. Disponível em: <<http://www.scielo.br>>. Acesso em: 18 ago. 2005.

Freitas, M. B. A. (2005a). *Problemas de adição e subtração; soluções em diferentes circunstâncias*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

Freitas, N. K. (2005b). Representações mentais, imagens visuais e conhecimento no pensamento de Vygotsky. *Ciência & Cognição*; ano 02, v. 6. Disponível em: <<http://www.cienciascognicao.org/artigos/v06/m24566.htm>>. Acesso em: 18 março 2006.

Gaspar, A., & Monteiro, I. C. C. (2005). Atividades experimentais de demonstração em sala de aula: uma análise segundo o referencial da teoria de Vigotski. *Revista Investigações em Ensino de Ciências*. [on line], v. 10, n. 2. Disponível em:< <http://www.if.ufrgrs.br>>. Acesso em: 21 fev. 2006.

GAVE/Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação. (2004). *PISA 2003 – Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de resolução de problemas*. Brasília, DF: Editorial do Ministério da Educação. Disponível em: <<http://www.eme.pt>> . Acesso em: 22 maio 2006.

Golbert, C. S. (2002). *Novos rumos da aprendizagem matemática: conflito, reflexão e Situação problema*. Porto Alegre: Mediação.

Goodman, Y. M., & Goodman, K. S. (2002). Vygotsky em uma perspectiva da “linguagem integral”. Em: L. C. Mool (Org.), *Vygotsky e a educação: implicações pedagógicas da psicologia sócio-histórica* (pp. 219-244). Porto Alegre: Artes Médicas.

Grando, N. I., Marasini, S. M., & Muhl, V. J. (2002). Princípios pedagógicos para medidas espaciais no Ensino Fundamental. *Anais da 25ª. Reunião Anual da ANPED*. [on line]. Disponível em: <<http://www.anped.org.br>>. Acesso em: 13 nov. 2006.

Griz, M. G. S. (2003). *A relação entre desenvolvimento cognitivo e aprendizagem: uma abordagem vygotskiana*. [on line]. Disponível em. <<http://www.psicopedagogia.com.br/>>. Acesso em: 24 ago. 2005.

Guimarães, S. D. (2005). A resolução de problemas de estrutura aditiva de alunos de 3.a. série do Ensino Fundamental. *Anais 28º Reunião Anual Anped*. Disponível em: <<http://www.anped.org.br>>. Acesso em: 15 março 2006.

Guimarães, K. P. (2004). *Processos cognitivos envolvidos na construção das estruturas multiplicativas*. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Hough, D. (2003). Exploring gender differences of U.S. and Chinese students in their solution processes of solving routine and nonroutine mathematical problems. *Research in Middle Level Education, RMLE*. [on line], v. 26, n 1.

Huete, J. C., & Bravo, J. A. F. (2006). *O ensino da matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artmed.

Kamii, C. (2002). *Crianças pequenas reinventam a aritmética: implicações da teoria de Piaget*. Porto Alegre: Artmed.

Laborde, C. (2003). Duas utilizações complementares da divisão social nas situações de aprendizado da matemática. Em: C. Garnier (Org.) *Após Vygotsky e Piaget* (pp. 29-46). Porto Alegre: Artes Médicas.

Laplane, Adriana Lia Friszan (1997). *Interação e silêncio na sala de aula*. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Laplane, Adriana Lia Friszman (2000). *Interação e silêncio na sala de aula*. *Caderno CEDES*

[on line], 20(50), 55-60. Disponível em: <<http://www.scielo.br>> Acesso em: 10 dez. 2006.

Leblanc, John F., Proudfit, Linda & Putt, Ian J. (1997). Ensinando a resolução de problemas na elementary school. Em: S. Krulik, Stephen & Reys, Robert E. (Orgs.). *A resolução de problemas na matemática escolar*. São Paulo: Atual, p. 148-187.

Leal, Telma F., & Luz, Patrícia S. (2001). Produção de textos narrativos em pares: reflexões sobre o processo de interação. *Educação e Pesquisa* [on-line], 27(1), 27-45. Disponível em: <<http://www.scielo.br>> Acesso em: 14 out. 2006.

Leite, Luci Banks. (2000). As dimensões interacionista e construtivista em Vygotsky e Piaget. Em: *Cadernos Cedes. Pensamento e Linguagem, estudos na perspectiva da Psicologia Soviética*. Campinas, SP: Centro de Estudos Educação e Sociedade, n.24, p. 30-37.

Lima, Valéria S. (2005a). Criatividade e solução de problemas. Em: Lima, Valéria S. & Pontes, Aldo (Orgs.), *Construindo saberes em educação* (pp. 57-82). Porto Alegre: Zouk.

Lima, Glaucione S. (2005b). *O papel das interações sociais no desenvolvimento e nos processos ensino-aprendizagem*. [on line]. Disponível: <<http://www.psicopedagogia.com.br>> Acesso em: 15 set. 2006.

Loos, Helga (2004). Ansiedade e aprendizagem: um estudo com díades resolvendo problemas algébricos. *Estudos de Psicologia* [on line], 9(3), 563-573. Disponível em: <<http://www.scielo.br>> Acesso em: 10 ago.2005.

Lopes, J. A. (2005). O livro didático, o autor e as tendências em Educação matemática. Comunicações e interações sociais nas aulas de matemática. Em: C. E. Lopes & A. M. Nacarato (Org.), *Escritas e leituras na educação matemática* (pp. 35-62). Belo Horizonte: Autêntica.

Magalhães, Vânia (n/d). A adição: conhecimentos prévios e resolução de problemas. *Vivência Pedagógica* [on line]. Disponível em <<http://www.vivenciapedagogica.com.br>>. Acesso em: 4 set. 2006.

Magina, Sandra Maria P. (2005). A teoria dos campos conceituais: contribuições da psicologia para a prática docente. *Anais do XVIII ERPM* [on line], *Encontro Regional de Professores de Matemática*. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais>>. Acesso em: 20 março 2006.

Magina, Sandra Maria P., & Campos, Tânia Maria M. (2004). As estratégias dos alunos na resolução de problemas aditivos: um estudo diagnóstico. *Educação Matemática e Pesquisa*. Educ., v. 6, n. 1, p. 53-71.

Maldaner, Anastácia., & Isaia, Silvia de A. (2001). A problematização dos conceitos numéricos como um caminho para a resolução de problemas: desafio para os professores de séries iniciais. *Revista do PPGE*, 2(1), 105-116.

Malone, John A., Douglas, Graham A., Kissane, Barry V. & Mortlock, Roland S. (1997). Medindo a habilidade para a resolução de problemas. Em: Krulik, Stephen & Reys, Robert (orgs.). *A resolução de problemas na matemática escolar*. São Paulo: Atual, p. 283-298.

Mayer, Richard E. (1977). *Thinking and problem solving: an introduction to human cognition and learning*. United States of America: Scott, Foresman and Company.

Meira, Luciano R. L. (1994). Análise microgenética e videografia: ferramentas de pesquisa em psicologia cognitiva. *Temas em Psicologia*, (3), 59-71.

Meira, Luciano. R. L. (2002). Zona de Desenvolvimento Proximal como campo simbólico-temporal: aproximações de um modelo teórico e aplicações para o ensino de Matemática. *Anais do I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática* (pp. 51-57). Curitiba: Universidade Federal do Paraná.

Miguel, José Carlos (2005). O processo de formação de conceitos em matemática: implicações pedagógicas. *Anais 28ª Reunião Anual Anped*. [on line]. Disponível em: <<http://www.anped.org.br/28/textos/gt19/gt191020int.rtf>>. Acesso em: 20 março 2006.

Morato, Edwiges M. (2001). Interação e silêncio na sala de aula: o silêncio como veiculador de sentido e interação. *Educação e sociedade* [on line] ano XXII, n. 77, p. 289-293.

Disponível em: <<http://www.scielo.br>> Acesso em: 10 dez.2006.

Moreira, Marco Antonio. (2003). Linguagem e aprendizagem significativa. *Anais do II Encontro Internacional Linguagem, cultura e cognição*. [on line]. Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/~moreira/linguagem.pdf>> Acesso em: 22 de março de 2007.

Moreira, Marco Antonio. (2004). A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de Ciências e a investigação nesta área. Moreira, M. A. (org). *A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de Ciências e a investigação nesta área*. Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS, p. 7-32.

Moro, Maria Lucia F. (2000). A epistemologia genética e a interação social de crianças. *Revista Psicologia: Reflexão e Crítica*, 13(2), 295-310.

Moro, Maria Lucia F. (2002). Das estruturas aditivas para as multiplicativas na iniciação matemática. Aprender a repartir e a repetir grandezas equivalentes. *Anais do I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática*. Curitiba: Universidade federal do Paraná/Universidade Tuiti do Paraná, v.1, p. 84-97.

Moro, Maria Lucia F. (2004). Notações da matemática infantil: igualar e repartir grandezas na origem das estruturas multiplicativas. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, [on line], 17(2), 251-266. Disponível em: <<http://www.scielo.br>>. Acesso 18 out. 2005.

Moro, Maria Lucia. F. (2005a). Estruturas multiplicativas e tomada de consciência: repartir para dividir. *Revista Psicologia: Teoria e Pesquisa*, [on line], v. 21, n. 2, p. 217-226. Disponível em: <<http://www.scielo.br>>. Acesso 25 março 2006.

Moro, Maria Lucia F. (2005b). Notações na iniciação matemática: a repetição de grandezas na raiz da multiplicação. Em: M. L. Moro & M. T. C. Soares (Orgs.), *Desenhos, palavras e números: as marcas da matemática na escola*. Curitiba: UFPR Editora, p. 41-76.

Moro, Maria Lucia F., & Soares, M. T. C. (2006). A aprendizagem das estruturas aditivas Elementares: alunos, professores e pesquisadores. Em: M. R. F. Brito (Org). *Solução de*

*problemas e a matemática escolar* (pp. 135-162). Campinas: Alínea.

Moura, G. R. (2005). O Ensino da matemática escolar. *Psicopedagogia OnLine*. Disponível em: < <http://www.psicopedagogia.com.br/artigos>> Acesso em: 15 set. 2005.

Moysés, Lúcia (2004). *Aplicações de Vygotsky à educação matemática*. Campinas: Papirus.

Nesher, P., Greeno, & Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematic*, v. 13, n. 1, p. 373-394.

Nikson, M. (1994). The culture of the mathematics classroom: an unknown quantity? In: Sthefen Lerman (Ed.), *Cultural perspectives on the mathematics classroom* (pp. 07-35). Kluwer Mathematics Education Library, Academic Publishers incorporates, U.S.A.

Nunes, Terezinha, Campos, Tania Maria M., Magina, Sandra & Bryant, Peter. (2002). *Introdução à educação matemática: os números e as operações numéricas*. São Paulo: Proem.

Nunes, Terezinha, Campos, Tânia M., Magina, Sandra, & Bryant, Peter (2005). *Educação matemática: números e operações numéricas*. São Paulo: Cortez.

Nunes, Terezinha., & Bryant, Peter (1997). *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Oliveira, Marinalva S., & Tourinho, Emmanuel. Z. (2001). Desempenho de crianças do Ensino Fundamental na solução de problemas aritméticos. *Estudos de Psicologia*, 6(1). [on line]. Disponível em: <<http://www.scielo.br>> Acesso em: 22 ago. 2005.

Oliveira, Marta Kohl (1997). *Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico*. São Paulo: Scipione.

Oliveira, Marta Kohl. (1998). Pensar a educação: Contribuições de Vygotsky. Em: J. A. Castorina, E. Ferreiro, D. Lerner, & M. K. Oliveira (Orgs.). *Piaget – Vygotsky: novas contribuições para o debate* (pp. 51-83). São Paulo: Ática.

Onuchic, L. R., & Allevato, N. S. G. (2004). Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de

Matemática através da resolução de problemas. Em: M. A. V. Bicudo & M. C. Borba (Orgs.). *Educação Matemática: pesquisa em movimento* (pp. 213-231). São Paulo: Cortez.

Onrubia, Janvier (2006). Ensinar: criar zonas de desenvolvimento proximal e nelas intervir. Em: César Coll, Elena Martín, Teresa Mauri, Mariana Mira, Javier Onhubia, Isabel Solé et al. *O construtivismo na sala de aula* (pp. 123-151). São Paulo: Ática.

Panizza, Mabel (2006). Reflexões gerais sobre o ensino da matemática. Em: Mabel Panizza, (Org.). *Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais* (pp. 19-33). Porto Alegre: Artmed.

Parra, C. (2001). Cálculo mental na escola primária. Em: Cecilia Parra & Irma Saiz (orgs.). *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas* (pp. 186-235). Porto Alegre: Artes Médicas.

Parra, C., & Saiz, I. (2001). Prefácio. Em: Cecília Parra & Irmã Saiz (orgs.). *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas* (pp. 3-10). Porto Alegre: Artes Médicas.

Passoni, J. C., & Campos, T. M. M. (2003). Revisitando os problemas aditivos de Vergnaud de 1976. Em: S. D. A. Machado (Org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica* (pp. 49-70). Campinas: Papirus.

Pessoa, C. A. S. (2002). Interação social: uma análise do seu papel na superação de dificuldades de resolução de problemas aditivos. *Anais da 25ª. Reunião Anual da ANPED*. [on line]. Disponível em: <<http://www.anped.org.br>>. Acesso em: 03 mar. 2006.

Pessoa, C. A. S., & Da Rocha Falcão, J. T. (1999). Analisando a influência da interação social na resolução de problemas matemáticos. *Anais do IV Encontro pernambucano de educação matemática*. Recife, PE.

Pessoa, C. A. S., & Da Rocha Falcão, J. T. (2001). Estruturas aditivas: conhecimentos do aluno e do professor. *Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. IM-UFRJ*. Disponível em: <<http://www.sbem.com.br>>. Acesso em: 17 set. 2005.

Poloni, A. (2006). Educação Matemática e a psicologia sócio-histórica. Em: S. G. L. Mendonça & S. Miller (Orgs.). *Vigotski e a escola atual: fundamentos teóricos e implicações pedagógicas* (pp. 149-167). Araraquara: J.M. Editora Ltda.

Polya, G. (1978). *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. (H. L. Araújo, trad.). Rio de Janeiro: Interciência.

Rabelo, E. H. (2002). *Textos matemáticos: produção, interpretação e resolução de problemas*. Petrópolis: Vozes.

Rego, T. C. (2005). Ensino e constituição do sujeito. *Revista Viver Mente & Cérebro, Coleção Memorial da Pedagogia, Lev Semenovich Vygotsky*, (2), 58-67.

Rischbieter, L. (s/d). A importância fundamental da cultura e do social no desenvolvimento. *Portal Aprender Brasil – Glossário Pedagógico*. [on line]. Disponível em: <[http://www.aprenderbrasil.com.br/pais/glossario\\_pedagogico/socio\\_construt.asp](http://www.aprenderbrasil.com.br/pais/glossario_pedagogico/socio_construt.asp)> Acesso em: 15 abril 2006.

Schliemann, A. D. (2003a). As operações concretas e a resolução de problemas de matemática. Em: T. N. Carraher (Org.). *Aprender Pensando: contribuições da psicologia cognitiva para a educação* (pp. 69-80). Petrópolis: Editora Vozes.

Schliemann, A. D. (2003b). Da matemática da vida diária à matemática da escola. Em: Analúcia Schliemann & David Carraher (Orgs.). *A compreensão de conceitos aritméticos* (pp. 11-38). São Paulo: Papirus.

Schliemann A. L. D., & Carraher, D. W. (2002). The evolution of mathematical reasoning: everyday versus idealized understandings. *Development Review*, 22(2), 242-266.

Schroeder, Thomas L. & Frank K. Lester, Jr. (1990). Developing understanding in mathematics via problem solving. In: P. R. Trafton & A. P. Shulte (Eds.). *New directions for Elementary School mathematics* (31-42). National Council of Teachers of Mathematics (NTCM).



Scriptori, C. C. (2003). Teoria e práticas educacionais nas perspectivas de Piaget e Vygotsky: uma reflexão necessária. Em: M. C. Assis, Mucio Camargo & O. Z. Mantovani (Ed.). *Anais do XIX Encontro Nacional de Professores do PROEPRE*. Campinas: Graf. FE, p. 98-110.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO (n/d). *Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo: SARESP/2005*. [on line]. Disponível em: <<http://www.Educação.sp.gov.br>>. Acesso em: 20 set. 2006.

Silva, A. C., & Rêgo, R. G. (2006). Matemática e literatura infantil: um estudo sobre a formação do conceito de multiplicação. Em: M. R. F. Brito (Org.), *Solução de problemas e a matemática escolar* (pp. 207-236). Campinas: Alínea.

Sirgado, Angel Pino. (2000). O conceito de mediação semiótica em Vygotsky e seu papel no psiquismo humano. Em: *Cadernos Cedes. Pensamento e Linguagem, estudos na perspectiva da Psicologia Soviética*. Campinas, SP: Centro de Estudos Educação e Sociedade, n.24, p. 38-51.

Smole, K. S., & Diniz, M. I. (2001). Ler e aprender matemática. Em: K. S. Smole & M. A. Diniz (Orgs), *Ler, escrever e resolver problemas* (pp. 69-86). Porto Alegre: Artmed.

Smolka, A. L. B. (1995). A concepção de linguagem como instrumento: um questionamento sobre práticas discursivas e educação formal. *Temas em Psicologia*, (2), 11-21.

Smolka, A. L. B. (2000). A prática discursiva na sala de aula: uma perspectiva teórica e um esboço de análise. *Cadernos CEDES 24: Pensamento e Linguagem: estudos na perspectiva soviética*. Campinas: CEDES, UNICAMP.

Souza, C. M. S. G., & Fávero, M. H. (2002). *Investigações em ensino de Ciências*, 7(1). [on line]. Disponível: <<http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7>>. Acesso em: 10 março 2006.

Spinillo, A. G., & Lautert, S. L. (2006). O diálogo entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática. Em: Meira & Spinillo (Orgs). *Psicologia cognitiva: cultura, desenvolvimento e a aprendizagem* (pp. 46-80). Recife: Editora universitária da

UFPE.

Starepravo, Ana Ruth & Moro, Maria Lucia F. (2005). As crianças e suas notações na solução de problemas multiplicativos. Em: M. L. Moro & M. L. C. Soares (Orgs.), *Desenhos, palavras e números: as marcas da matemática escolar* (pp. 107-143). Curitiba: Editora da UFPR.

Steele, D. F. (2001). Using sociocultural theory to teach mathematics: A vygotskiana perspective. *School Science and Mathematics*, (8), 414-416. Disponível em <<http://www.eric.ed.gov>>. Acesso em: 19 set. 2005.

Taxa, F. O. S. (1996). *Estudo sobre a resolução de problemas verbais aritméticos nas séries iniciais*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Taxa, F. O. S. (2001). *Problemas multiplicativos e processo de abstração em Crianças na 3ª série do Ensino Fundamental*. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Taxa, F. O. S., & Fini, L. D. T. (2001). Estudo sobre a solução de problemas aritméticos de multiplicação do tipo isomorfismo de medidas. Em: M. R. F. Brito (Org.), *Psicologia da educação matemática: teoria e pesquisa* (pp. 167-200). Florianópolis: Insular.

Trindade, R. (2006). Entrevista: Vygotsky atribui a quem educa a responsabilidade de abrir um caminho. *Revista ABC Educatio*, (58), 8-11.

Tudge, J. (2002). Vygotsky, a zona de desenvolvimento proximal e a colaboração entre pares: implicações para a prática em sala de aula. Em: L. C. Moll (Org.), *Vygotsky e a educação: Implicações pedagógicas da psicologia sócio-histórica* (pp. 51-168). Porto Alegre: Artmed.

Vasconcelos, L. (2003). Problemas de adição e subtração: modelos teóricos e práticas de ensino. Em: Analucia Schliemann & David Carraher (Orgs.), *A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa* (pp. 53-72). Campinas: Papirus.

Vergnaud, G. (1979). The acquisition of arithmetical concepts. *Educational Studies in*

*mathematics*, 10, 273-274.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. Em: R. Lesh & M. Landau. (Ed.), *Acquisition of mathematics concepts and process* (pp. 127-174). Orlando: Academic Press, Inc.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. Em: H. Hiebrt & M. Behr (Eds.) *Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in Middle Grades* (pp. 141-161). Laurence Erlbaum Ed.

Vergnaud, G. (1990a). Epistemology and psychology of mathematics education. Em: P. Neshier & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 14-30). Cambridge University Press.

Vergnaud, G. (1990b). La teoría de los campos conceptuales. In: *Recherches em Didáctica des Mathématiques*, vol. 10, nº 2, 3, pp. 133-170. Disponível em: <[http://cecap.anep.edu.uy/documentos/curso\\_dir\\_07/modulo2/materiales/didactica/campos.pdf](http://cecap.anep.edu.uy/documentos/curso_dir_07/modulo2/materiales/didactica/campos.pdf)> Acesso em: 10 out 2006.

Vergnaud, G. (1996). Teoria dos campos conceituais. *Anais do 1º. Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro*. Projeto Fundação, Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro/UFRJ. (n.d).

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. Em: T. Nunes & P. Bryant (Ed.), *Learning and teaching mathematics: an international perspective* (pp. 05-28). Psychology Press Ltd, Publishers.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of mathematical behavior*, 17(2), 167-181.

Vergnaud, G. (2003). A gênese dos campos conceituais. Em: E. P. Grossi (Org.), *Por que ainda há quem não aprende? A teoria* (pp. 21-60). Petrópolis: Vozes.

Vergnaud, G. (2004). *Lev Vygotski: Pedagogo e pensador do nosso tempo*. Porto Alegre:

GEEMPA.

Vergnaud, G. (2005a). Esquemas operatórios de pensamento: uma conversa com Gérard Vergnaud. Em: E. P. Grossi (Org.), *Ensinando que todos aprendem: fórum social pelas aprendizagens 2005* (pp. 85-100). Porto Alegre: GEEMPA.

Vergnaud, G. (2005b). Prefácio. Em: Moro, Maria Lucia & Soares, Maria Teresa. *Desenhos, palavras e números: as marcas da matemática escolar*. Curitiba: UFPR.

Verschaffel, L., & DE Corte, E. (1997). Word problems: a vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school? Em: T. Nunes & P. Bryant. *Learning and teaching mathematics: an international perspective* (pp. 69-97). Psychology Press Ltd., Publishers.

Vigotski, L. S. (1996). *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. Michael Cole, Vera Jonh-Steiner, Sylvia Scribner & Ellen Souberman (orgs). Tradução de: José Cipolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. São Paulo: Martins Fontes.

Vigotski, L. S. (2001). *A construção do pensamento e da linguagem*. Tradução de Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes.

Vigotski, L. S. (2003). Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar. Em: Luria, Leontiev, Vygotsky et al. *Psicologia e Pedagogia: bases psicológicas da aprendizagem e desenvolvimento* (pp. 01-17). São Paulo: Centauro.

Vigotski, L. S. (2005). *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.



**ANEXO I**  
**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**

**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO  
PARA OS PAIS**

---

**Prezados Pais,**

Sou estudante da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e estou fazendo um estudo sobre a “A interação social e a solução de problemas aritméticos nas séries iniciais do Ensino Fundamental”.

Para dar continuidade a este trabalho necessito de sua colaboração autorizando seu filho a:

- Participar de atividades de solução de problemas individualmente;
- Participar de atividades de solução de problemas junto com um amigo.
- Ser filmado durante a realização das atividades e permissão para uso das imagens.

Esclareço que estas atividades serão desenvolvidas na própria escola em horário habitual de aula. A identificação de seu filho será mantida em segredo. A participação é voluntária e sem nenhum prejuízo, caso não queira participar. Aproveito para explicar que estas atividades não fazem parte das desenvolvidas pelo professor, portanto não irão influenciar a nota de seu filho na escola.

Agradeço sua colaboração e me coloco a sua disposição para esclarecimento de dúvidas.

Marta Santana Comério  
Telefone: (19) 3255 4971  
Celular: (19) 9238-3130

**Você autoriza a realização deste trabalho com seu filho (a)?**

**SIM**

**NÃO**

Eu, \_\_\_\_\_ responsável pelo aluno  
\_\_\_\_\_ autorizo a participação do meu filho nas atividades  
citadas. Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

Assinatura do responsável: \_\_\_\_\_

**ANEXO II**  
**PRÉ-TESTE E PÓS-TESTE**



## SOLUÇÃO DE PROBLEMA MATEMÁTICO

### PRÉ-TESTE

NOME: \_\_\_\_\_

DATA: \_\_\_\_\_

1. Na classe da professora Regina há 28 alunos. Sei que 17 são meninas. Quantos são os meninos?

11

17

45

20

2. Quantos bolos um padeiro pode fazer com 48 ovos, se cada bolo leva 3 ovos na receita?

28

45

16

51

3. Fernando tinha 16 bolinhas de gude. Ele jogou com seu amigo Tiago. Ele agora tem 9 bolinhas de gude. O que aconteceu?

Ele ganhou 9 bolinhas.

Ele perdeu 7 bolinhas.

Ele não ganhou nem perdeu bolinhas.

Ele ganhou 7 bolinhas.

4. A professora tem 60 bombons para repartir com uma turma de 15 alunos e quer que cada aluno receba a mesma quantidade de bombons. Quantos bombons ela deve dar a cada aluno?

15

45

4

( ) 10

5. Tenho 4 bandejas de iogurte. Há 6 potinhos de iogurte em cada bandeja. Quantos iogurtes eu tenho?

( ) 24

( ) 10

( ) 20

( ) 32

6. Janaína comprou 32 laranjas. Dessas 32 laranjas, 12 estavam estragadas. Quantas laranjas estavam boas?

( ) 20

( ) 22

( ) 40

( ) 44

7. Patrícia tem 5 bombons. Ana tem 4 vezes mais bombons que Patrícia. Quantos bombons tem Ana?

( ) 9

( ) 28

( ) 20

( ) 10

8. Marcelo tem 24 balas. Ele tem 8 a mais que Talita . Quanta bala Talita tem?

( ) 32

( ) 8

( ) 16

( ) 30

9. Paulo tinha R\$ 18,00. Ganhou R\$ 7,00 de seu pai e depois gastou R\$ 5,00. Quanto ele tem agora?

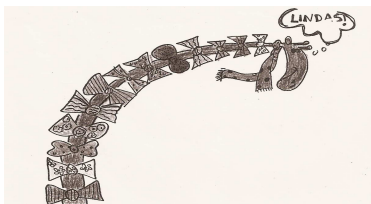
- ( ) R\$ 25,00
- ( ) R\$ 20,00
- ( ) R\$ 30,00
- ( ) R\$ 15,00

10. Laura adora brincar de bonecas. Sua mãe é costureira e resolveu fazer várias roupinhas novas para suas bonecas. Ela fez 3 blusinhas, cada uma de um modelo. Para combinar com as blusas, fez também 2 saias, uma florida e uma lisa. Veja abaixo as novas roupinhas das bonecas. Quantos conjuntos diferentes Laura pode formar com as peças de roupas novas que sua mãe fez?



- ( ) 12
- ( ) 6
- ( ) 10
- ( ) 5

11. Hemengarda é uma girafa. Ela adora colocar laços. Diz que eles valorizam o seu pescoço. Hemengarda tem 40 laços vermelhos, 56 de bolinhas coloridas, 4 amarelos, 8 de estampados diversos, 28 floridos e 30 cachecóis. Quantos laços Hemengarda tem?



- ( ) 128
- ( ) 96
- ( ) 136
- ( ) 166

## 12. As férias<sup>29</sup>

As crianças correram ao encontro do carteiro.

- Carta da vovó Dinha!

- Que bom! Iremos passar as férias na fazenda.

Ao chegarem à fazenda, Mônica e Sérgio viram que estavam fazendo os preparativos para a festa junina. Este ano ia ser muito bom. Gaspardina ia se casar com Mane Juvêncio, o maior fogueteiro da cidade.

Sérgio e Mônica foram ajudar seus amigos que estavam com dificuldade na organização da festa.

Mônica foi ver como andava a preparação da canjica. Dona Dedé estava precisando de ajuda! Ela tinha 96 potinhos de canjica e queria colocar 8 potinhos em cada bandeja. Mônica ajudou Dona Dedé colocando os potinhos nas bandejas. Quantas bandejas ela precisou?

88

104

12

8

Agora tudo estava pronto para a festa. Ia ter fogos, fogueira e muita comida. As 18:00 horas haverá o casamento da Gaspardina e do Juvêncio. A alegria ia ser grande! E você também gosta de festa junina?

---

<sup>29</sup> Adaptado de: SELVA, Ana Coelho (s/d). *Resolução de problemas de divisão com crianças pequenas: estratégias e recursos utilizados*. Disponível em <<http://www.educacaoonline.pro.br>> Acesso em: 24 ago. 2006.

## SOLUÇÃO DE PROBLEMA MATEMÁTICO

### PÓS-TESTE

NOME: \_\_\_\_\_

DATA: \_\_\_\_\_

1. Na classe da professora Célia há 29 alunos. Sei que 18 são meninos. Quantos são as meninas?

( ) 47

( ) 19

( ) 35

( ) 11

2. Quantas tortas de chocolate um padeiro pode fazer com 52 ovos, se cada torta leva 4 ovos na receita?

( ) 54

( ) 13

( ) 48

( ) 56

3. Gabriela tinha 20 cartas de baralho no início do Jogo do Mico. Ela jogou com sua amiga Bruna. Gabriela agora tem 11 cartas. O que aconteceu?

( ) Ela ganhou 11 cartas.

( ) Ela perdeu 9 cartas.

( ) Ela não ganhou nem perdeu cartas.

( ) Ela ganhou 9 cartas.

4. Senhor Roberto tem R\$ 80,00 para repartir com seus 5 filhos e quer que cada filho receba a mesma quantidade. Quantos Reais ele deve dar a cada filho?

( ) R\$ 85,00

( ) R\$ 20,00

R\$ 16,00

R\$ 75,00

5. Joana comprou 8 caixas de picolé para seu aniversário. Há 6 picolés em cada caixa. Quantos picolés ela comprou?

48

14

20

24

6. Uma escola comprou 50 litros de leite para fazer chocolate quente para a festa junina. A merendeira utilizou 36 litros para fazer o chocolate quente e guardou o restante. Quantos litros de leite ela guardou?

36

86

40

14

7. Paulo tem 6 figurinhas. Alberto tem 8 vezes mais figurinhas do que Paulo. Quantas figurinhas tem Alberto?

14

10

48

54

8. Márcia tem 32 lápis de cor. Ela tem 8 a mais que Tadeu . Quantos lápis de cor Tadeu tem?

40

24

( ) 16

( ) 32

9. Carlos tinha R\$ 34,00. Ganhou R\$ 12,00 de seu pai e depois gastou R\$ 6,00. Quanto ele tem agora?

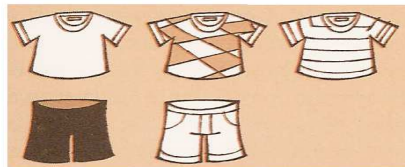
( ) R\$ 52,00

( ) R\$ 46,00

( ) R\$ 40,00

( ) R\$ 18,00

10. Igor é muito vaidoso e adora praticar esportes usando camiseta e bermuda. Hoje pela manhã ele não sabia qual roupa usar para dar uma caminhada. Colocou em cima da cama 3 camisetas e 2 bermudas. Se ele combinar, por exemplo, a camiseta branca com o short preto, faz um conjunto. Se ele combinar em cada dia uma das três camisetas com uma das duas bermudas, quantos conjuntos diferentes ele pode fazer? <sup>30</sup>



( ) 15

( ) 6

( ) 10

( ) 5

11. Marisbela é uma cachorrinha linda e vaidosa. Marinalva, sua dona, adora enfeitá-la. Ela diz que Marisbela também adora se sentir bela. Para você ter uma idéia, Marisbela tem 54 roupinhas estampadas, 40 brancas, 6 vermelhas, 18 pretas, 14 de bolinhas e 20 coleiras de diversas cores. Quantas roupinhas Marisbela tem?

---

<sup>30</sup> Problema adaptado de Nunes e cols. (2005, p. 194).



( ) 152

( ) 94

( ) 132

( ) 254

## 12. O Natal<sup>31</sup>

As crianças correram ao encontro do carteiro.

- Carta da vovó Guidinha!

- Que bom! A vovó e o vovô virão passar o Natal aqui em casa!

Ao chegar à véspera do Natal, Bianca e Paulo viram que a vovó Guidinha precisava de ajuda nos preparativos para as delícias do Natal. Este ano ia ser muito bom! A vovó estava fazendo bolinhos de milho!

Bianca e Paulo foram ajudar a vovó que estava com dificuldade na organização dos bolinhos nos pratos onde seriam servidos. A vovó tinha feito 78 bolinhos e queria colocar 6 bolinhos em cada prato. Bianca e Paulo ajudaram à vovó distribuindo os bolinhos nos pratos. Quantos pratos as crianças precisaram para colocar todos os bolinhos de milho?

( ) 72

( ) 24

( ) 84

( ) 13

Agora tudo estava pronto para a ceia de Natal! Muita música e muita comida gostosa. As 24:00 horas eles farão uma oração e depois haverá a troca de presentes! A alegria vai ser grande! E você também gosta de Natal?

---

<sup>31</sup> Adaptado de: SELVA, Ana Coelho (s/d). *Resolução de problemas de divisão com crianças pequenas: estratégias e recursos utilizados*. Disponível em <<http://www.educacaoonline.pro.br>> Acesso em: 24 ago. 2006.





**ANEXO III**  
**AS SESSÕES DE INTERAÇÃO SOCIAL: OS PROBLEMAS**

### **Os problemas das sessões de interação social: os problemas**

Como exposto no capítulo IV, dedicado à apresentação dos procedimentos metodológicos, os problemas solucionados pelos estudantes, nas quatro sessões de interação social em díade, foram apresentados em letra de imprensa maiúscula, um em cada folha. Salienta-se que não foi sugerida uma ordem de solução dos problemas.

Para que, durante as quatro sessões de interação social em díade, fossem contempladas as diversas categorias de problemas que compõem o campo conceitual das estruturas aditivas e multiplicativas<sup>32</sup> houve variação referente aos tipos de problemas e/ou categorias apresentados nas sessões. No entanto, cada sessão de interação social em díade segue sempre contemplando seis problemas envolvendo as quatro operações aritméticas elementares.

---

<sup>32</sup> De acordo com os estudos dos campos conceituais de Gérard Vergnaud.

## SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM DÍADE – 1ª. SESSÃO

Problema de estrutura aditiva. Categoria: transformação ligando dois relacionamentos, operação esperada de adição, tipo rotineiro.

LARISSA SAIU PARA FAZER COMPRAS NO MERCADO. QUANDO ELA CHEGOU EM CASA CONTOU O DINHEIRO QUE AINDA TINHA NA CARTEIRA, R\$32,00. SABENDO QUE ELA GASTOU R\$65,00 NO MERCADO, QUANTO ELA TINHA ANTES?

Problema de estrutura multiplicativa. Categoria: isomorfismo de medida, operação esperada de multiplicação, tipo rotineiro.

NUMA SALA DE TEATRO TEM 12 FILEIRAS DE CADEIRAS. SE EM CADA FILEIRA TEM 9 CADEIRAS, QUANTAS CADEIRAS TÊM NO TOTAL?

Problema de estrutura aditiva. Categoria: transformação ligando duas medidas, operação esperada de adição, tipo rotineiro.

LEONARDO TINHA 55 FIGURINHAS NO SEU ÁLBUM DE FUTEBOL. PABLO DEU A ELE MAIS 22. QUANTAS FIGURINHAS LEONARDO TEM AGORA?

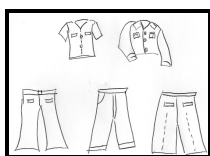
Problema de estrutura multiplicativa. Categoria isomorfismo de medida, divisão quotitiva, operação esperada: divisão, tipo rotineiro.

MARIANA TINHA 24 LÁPIS E RESOLVEU DISTRIBUIR IGUALMENTE ENTRE AS AMIGAS. CADA AMIGA RECEBEU 3 LÁPIS. PARA QUANTAS AMIGAS MARIANA DEU OS LÁPIS?

Problema de estrutura multiplicativa. Categoria produto de medida, operação esperada multiplicação, tipo não rotineiro.

ANDRÉ É VENDEDOR EM UMA LOJA DE ROUPAS MASCULINAS. ELE É CONSIDERADO UM ÓTIMO VENDEDOR, POIS OS CLIENTES SEMPRE LEVAM MAIS DE UMA PEÇA DE ROUPA. PARA AUMENTAR SUAS VENDAS ANDRÉ MOSTRA AOS CLIENTES COMO ELES PODEM FAZER DIFERENTES COMBINAÇÕES COM AS PEÇAS. ANDRÉ VENDEU PARA UM CLIENTE TRÊS CALÇAS DE R\$80,00 CADA E DUAS CAMISAS, UMA DE R\$35,00 E UMA DE R\$60,00.

VEJAS AS PEÇAS QUE O CLIENTE COMPROU:



DE QUANTAS MANEIRAS DIFERENTES O CLIENTE DE ANDRÉ PODE SE VESTIR COMBINANDO SEMPRE UMA DAS CAMISAS COM UMA DAS CALÇAS?

Problema de estrutura multiplicativa. Categoria isomorfismo de medida, tipo não rotineiro.

PAULA FOI AO SUPERMERCADO E COMPROU 5 KG DE ARROZ, 3 KG DE FEIJÃO, 2 KG DE AÇUCAR E 6 PACOTES DE BOLACHA. CADA PACOTE DE BOLACHA CUSTOU R\$ 2,00. QUANTO ELA PAGOU PELAS BOLACHAS?

## SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM DÍADE – 2ª. SESSÃO

Problema de estrutura multiplicativa. Categoria isomorfismo de medida, divisão por partição e do tipo rotineiro.

MARIETA COMPROU UM FOGÃO POR R\$ 320,00. ELA RESOLVER PAGAR O FOGÃO EM 8 PRESTAÇÕES IGUAIS. QUAL SERÁ O VALOR DE CADA PRESTAÇÃO?

Problema de estrutura aditiva. Categoria transformação ligando duas medidas, tipo rotineiro.

PATRÍCIA COLECIONA PAPÉIS DE CARTA. ELA DEU 12 PARA SUA AMIGA ALINE. AGORA PATRÍCIA TEM 25. QUANTOS PAPÉIS DE CARTA PATRÍCIA TINHA ANTES?

Problema de estrutura aditiva. Categoria composição de duas medidas, tipo rotineiro.

VINÍCIUS TINHA R\$ 28,00. GASTOU R\$ 7,00 EM UM LANCHE, MAS DEPOIS GANHOU R\$ 12,00 DE SEU AVÔ. QUANTO ELE TEM AGORA?

Problema de estrutura multiplicativa. Categoria isomorfismo de medida, divisão por cotas, tipo rotineiro.

QUANTOS SAQUINHOS DE DOCE JOANA PODE FAZER COM 48 BOMBONS, SE EM CADA SAQUINHO ELA COLOCAR 6 BOMBONS?

Problema de estrutura multiplicativa. Categoria produto de medida, tipo não-rotineiro.

A PADARIA “ESQUINA DO PÃO” FAZ DIFERENTES TIPOS DE PÃES, BOLACHAS, DOCES E BOLOS. TODOS OS DIAS OS FUNCIONÁRIOS, RESPONSÁVEIS PELO PREPARO DAS DELÍCIAS DA PADARIA, FAZEM BOLOS DELICIOSOS. OS BOLOS PODEM SER DE TRÊS TAMANHOS (PEQUENO, MÉDIO E GRANDE) E OS RECHEIOS PODEM SER DE SEIS TIPOS DIFERENTES: MORANGO, CHOCOLATE, BRIGADEIRO, COCO, DOCE DE LEITE E BANANA. QUANTOS TIPOS DIFERENTES DE BOLO A PADARIA “ESQUINA DO PÃO” PODE FAZER COMBINANDO SEMPRE UM DOS TAMANHOS DO BOLO COM UM DOS DIFERENTES TIPOS DE RECHEIOS?

Problema de estrutura aditiva. Categoria composição de medida, tipo não-rotineiro.<sup>33</sup>

TRÊS SITIANTES, SR. MANOEL, SR. JOAQUIM E SR. OLIVEIRA MORAM NA MESMA ESTRADA. VEJA AS DISTÂNCIAS QUE ELS MORAM UNS DOS OUTROS:  
O SR. MANOEL MORA A 10 km DO SR. JOAQUIM.  
O SR. OLIVEIRA MORA A 2 km DO SR. JOAQUIM.  
A QUE DISTÂNCIA DO SR. MANOEL MORA O SR. OLIVEIRA?

---

<sup>33</sup> Problema adaptado de Davis & Mckillip (1997, p. 120). Admite duas soluções: 8 Km e 12 Km.

### SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM DÍADE – 3ª. SESSÃO

Problema de estrutura aditiva. Categoria uma transformação ligando duas medidas, tipo rotineiro.

PATRÍCIA TINHA 7 BALAS. GANHOU ALGUMAS E AGORA ELA TEM 15 BALAS. QUANTAS BALAS ELA GANHOU?

Problema de estrutura multiplicativa. Categoria isomorfismo de medida, divisão por cotas, tipo rotineiro.

COMO RICARDO ESTAVA DOENTE SEUS PAIS RESOLVERAM LEVÁ-LO AO MÉDICO. O DOUTOR PEDRO RECEITOU UMA CAIXA DE REMÉDIO QUE CONTINHA 28 COMPRIMIDOS E PEDIU QUE ELE TOMASSE 4 COMPRIMIDOS POR DIA. SABENDO QUE RICARDO PRECISA TOMAR TODA A CAIXA DE REMÉDIO QUANTOS DIAS SEU TRATAMENTO VAI DURAR?

Problema de estrutura aditiva. Categoria um relacionamento estático ligando duas medidas, tipo rotineiro.

GABRIEL COLECIONA CANETAS COLORIDAS, ELE TEM ALGUMAS BEM DIFERENTES. ALBERTO TAMBÉM COLECIONA CANETAS COLORIDAS E ELE TEM 12 CANETAS A MENOS QUE GABRIEL. SABENDO QUE ALBERTO TEM 27 CANETAS COLORIDAS, QUANTAS CANETAS GABRIEL TÊM EM SUA COLEÇÃO?

Problema de estrutura multiplicativa. Categoria isomorfismo de medida, tipo rotineiro.

DONA CÉLIA GASTA 5 OVOS PARA FAZER UM BOLO. ELA PRECISA FAZER 6 BOLOS. QUANTOS OVOS IRÁ USAR?



Problema de estrutura multiplicativa, categoria produto de medida, tipo não-rotineiro.

CAMILA CONVIDOU ALGUNS AMIGOS PARA UM LANCHE EM SUA CASA. ELA FOI A PADARIA COM SUA MÃE COMPRAR O QUE PRECISAVAM PARA FAZER OS SANDUICHES. ELAS COMPRARAM 5 TIPOS DE PÃES ( PÃO FRANCÊS, PÃO DE BATATA, PÃO DE CENOURA, PÃO DE CEBOLA E PÃO DE AZEITONA), 3 TIPOS DE FRIOS (MORTADELA, PRESUNTO E SALAME). QUANTOS TIPOS DIFERENTES DE SANDUÍCHES ELAS PODEM FAZER COMBINANDO SEMPRE UM TIPO DE PÃO COM UM DOS TIPOS DE FRIOS?

Problema de estrutura aditiva, categoria composição de medida, tipo não-rotineiro.

TRÊS AMIGOS ENTRARAM NUMA LANCHONETE. LUCAS GASTOU R\$ 5,00. ANA CAROLINA GASTOU MENOS QUE LUCAS. SÉRGIO GASTOU O MESMO QUE ANA CAROLINA. QUANTO OS TRÊS GASTARAM NO TOTAL? VOCÊ ACHA QUE R\$ 15,00 SERÃO SUFICIENTES PARA PAGAR TUDO? <sup>34</sup>

### SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM DÍADE – 4ª. SESSÃO

Problema de estrutura aditiva. Categoria transformação de duas medidas, tipo rotineiro.

BRUNO DEVIA 18 FIGURINHAS A DANIEL, MAS AGORA DANIEL ESTÁ DEVENDO 7 FIGURINHAS A BRUNO. QUANTOS FIGURINHAS BRUNO AINDA DEVE A DANIEL?

Problema de estrutura multiplicativa. Categoria isomorfismo de medida, tipo não-rotineiro.

TIAGO COMPROU 3 EMBALAGENS DE IOGURTE. HÁ 6 POTINHOS DE IOGURTE

---

<sup>34</sup> Adaptado de TOLEDO & TOLEDO (1997). *Didática da matemática: como dois e dois, a construção da matemática*. São Paulo: FTD, p. 90. O problema admite infinitas soluções.

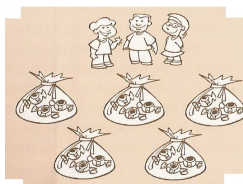
EM CADA EMBALAGEM. QUANTOS POTINHOS DE IOGURTE ELE COMPROU?

Problema de estrutura aditiva. Categoria composição de duas medidas, tipo rotineiro.

ALICE TEM 14 FIGURINHAS. SUA AMIGA ANGÉLICA TEM 8. QUANTAS FIGURINHAS PRECISARÍAMOS DAR A ANGÉLICA PARA QUE ELA TENHA O MESMO QUE ALICE?

Problema de estrutura multiplicativa. Categoria isomorfismo de medida, divisão por cotas, tipo rotineiro.

DONA ROSÁLIA TINHA FEITO ALGUNS SAQUINHOS DE BOMBONS PARA DAR AOS SEUS 5 SOBRINHOS QUE IRIAM PASSEAR EM SUA CASA. ENTRETANTO, TATIANA E BRUNO FICARAM MUITO RESFRIADOS E NÃO FORAM VER A TIA ROSÁLIA. QUANDO OS OUTROS SOBRINHOS CHEGARAM À CASA DA DONA ROSÁLIA VIRAM OS PACOTES DE BOMBONS EM CIMA DA MESA DA COZINHA. RESOLVERAM ENTÃO FAZER UM ACORDO: “COMO A TATIANA E O BRUNO NÃO VIERAM PODEMOS REPARTIR OS BOMBONS ENTRE NÓS TRÊS.” COM QUANTOS BOMBONS CADA UM DOS SOBRINHOS DA DONA ROSÁLIA IRÁ FICAR?



Problema de estrutura aditiva. Categoria composição de medidas, tipo não-rotineiro.

PARA A FESTA DO SEU ANIVERSÁRIO DE 10 000 ANOS O CONDE DRÁCULA CONVIDOU MUITOS AMIGOS: 20 BRUXAS DO LAGO, 55 DUENDES DA FLORESTA ENCANTADA, 32 FANTASMINHAS E 18 FADAS DO MONTE ALPINO. QUANTOS AMIGOS ELE CONVIDOU PARA A FESTA? DOS CONVIDADOS DO CONDE DRÁCULA 5 BRUXAS DO LAGO E 8 FADAS NÃO FORAM A FESTA PORQUE ESTAVAM DOENTES. E AGORA, QUANTOS CONVIDADOS ESTAVAM NA FESTA DO CONDE DRÁCULA?

Problema de estrutura aditiva e multiplicativa. Categorias composição de medidas e isomorfismo de medida respectivamente, tipo não-rotineiro.

NA SALA DE BRINQUEDOS DE UMA ESCOLA DE EDUCAÇÃO INFANTIL HÁ 12 BONECAS, 18 CARRINHOS, 7 JOGOS DE PANELINHAS, 21 CORDAS E 4 MESAS REDONDAS COM 6 CADEIRAS EM CADA MESA PARA AS CRIANÇAS SE SENTAREM. QUANTAS BOLAS HÁ NA SALA? QUANTOS BRINQUEDOS HÁ NESTA SALA? QUANTOS DESSES BRINQUEDOS SERVEM PARA BRINCAR DE CASINHA? QUANTAS CADEIRAS TEM NESTA SALA?