DIFICULDADES NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTRUTURAS ADITIVAS[1]

Eliana Cristina de Carvalho Gabriel
Miriam Cardoso Utsumi

Introdução

A solução de problemas, bem como o ensino pautado nela, passou a ser mais enfatizada na década de 1980 como uma das recomendações de autores norte-americanos do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM). A ênfase dada era a importância da solução de problemas matemáticos, considerada como o foco central do processo de ensino e aprendizagem da matemática.

No Brasil, em consonância com o NCTM, foram elaborados os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998), que abordam a solução de problemas como propulsora da ação refletida que constrói conhecimentos. Recentemente também tivemos a publicação da Base Nacional Curricular Comum – BNCC (BRASIL, 2017), que preconiza a importância do saber matemático não se restringir ao conhecimento da terminologia, dos dados e dos procedimentos.

A recomendação é que os alunos devem conseguir combinar todos esses elementos para atender necessidades do cotidiano. Dentre vários elementos novos trazidos pela proposta, destaca-se o letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de forma a favorecer a formulação e resolução

---

[1] Este artigo originou-se das reflexões da Dissertação *Um estudo sobre as dificuldades apresentadas por alunos do 3º ao 5º ano do ensino fundamental nas etapas de solução de problemas de estrutura aditiva*. A Dissertação foi defendida na Faculdade de Educação - UNICAMP, sob a orientação da Prof. Dra. Miriam Cardoso Utsumi.

de problemas em uma variedade de contextos. No que diz respeito à solução de problemas, o documento a reconhece como sendo um *processo matemático* que exprime uma forma privilegiada da atividade matemática.

Sabemos que a adição e a subtração são normalmente ensinadas às crianças um bom tempo antes de outras operações aritméticas. Ao ingressar no primeiro ano escolar, a maior parte das crianças já tem capacidade de coordenar os esquemas de juntar e separar com a contagem. Com efeito, solucionam uma diversidade de problemas que envolvem as relações entre o todo e suas partes. Entretanto elas têm muito a aprender e entender sobre estas duas operações básicas da matemática (NUNES, 1997; NUNES *et al*., 2009).

Trabalhando com solução de problemas com alunos das séries iniciais do ensino fundamental, tem-se a impressão que, à medida que a escolaridade avança, proporcionalmente aumenta a preocupação dos estudantes em relação à "conta", isto é, ao cálculo numérico a ser executado. Quando se trata dos estudantes dos 4º e 5º anos que, em sua maioria já lêem com autonomia, muitas vezes, antes mesmo de ler o problema, surge a pergunta: "*Professora, é conta de mais ou de menos?*".

Essa dificuldade apresentada pelos estudantes fica evidenciada também nos resultados apresentados pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que tem como principal objetivo avaliar a educação básica do país. O SAEB constitui-se em um dos indicadores possíveis de avaliar o desempenho dos estudantes, não sendo considerado o único, tampouco substituindo as avaliações realizadas em cada sala de aula.

A série histórica do SAEB de 1995 a 2015 apontou que o Ensino Fundamental nos anos iniciais e finais, no que concerne à área da Matemática, tem apresentado avanços, todavia isso não se confirma no tocante à solução de problemas. Ainda que esse assunto tenha provocado muitos debates no âmbito educacional, somente pelos resultados das avaliações externas não é possível compreendermos o baixo desempenho dos estudantes de maneira mais aprofundada, ou seja, as razões para as dificuldades.

Considerando a importância de se conhecer as origens das dificuldades na aprendizagem de matemática, em especial das estruturas aditivas, vários pesquisadores desenvolveram estudos diagnósticos acerca do domínio das estruturas aditivas.

Por exemplo, Mendonça *et al.* (2007) e Santana, Cazorla e Campos (2007) realizaram um estudo diagnóstico com 1803 estudantes de 1ª a 4ª séries de escolas públicas dos estados de São Paulo e da Bahia.

Os dados obtidos confirmaram a tendência crescente da taxa de acertos ao longo da instrução, ainda que em patamares e ritmos diferenciados nos dois estados. Os estudantes de São Paulo partiram de um patamar de 64,6% na primeira série e alcançaram um patamar de 89,3% de acertos na quarta série. Por outro lado, os estudantes da Bahia partiram de um patamar de 52% na primeira série e chegaram a 65,4% na quarta série. Observou-se ainda que em todas as séries, em média, os estudantes de São Paulo responderam mais questões do que os estudantes da Bahia.

Os resultados mostraram que um problema envolvendo uma transformação aditiva, em que a transformação era desconhecida, foi o que apresentou maior dificuldade em ambos os estados. O problema tinha o seguinte enunciado: *"Carlos tinha 4 bolas de gude. Ganhou algumas e agora ele tem 10 bolas de gude. Quantas bolas ele ganhou?"*. As autoras sugerem que essa dificuldade, provavelmente, procedeu da incongruência semântica entre a palavra ganhou e a operação de subtração.

Moretti e Brandt (2014) pesquisaram as dificuldades dos alunos na solução de problemas aditivos de acordo com as categorias elencadas por Vergnaud à luz da Teoria de Representações Semióticas de Raymond Duval, no que se refere ao fenômeno da congruência semântica. Segundo os autores, Duval concentra seus estudos na aprendizagem matemática, propondo que para o estudo da atividade cognitiva é indispensável levar em consideração a importância das representações semióticas presentes na matemática. Dessa forma, os objetos matemáticos não são diretamente observáveis, isto é, eles não têm existência física e sua apreensão só é possível por meio de registros de representação e pela existência de uma grande variedade de representações semióticas possíveis de serem utilizadas, a saber: a linguagem natural, gráficos, linguagem algébrica, figuras geométricas, entre outras.

No que diz respeito à congruência semântica, os autores buscaram identificar as relações de congruência entre as formas verbais utilizadas nas mensagens discursivas dos problemas propostos e as operações aritméticas correspondentes. Vejamos um exemplo que poderá nos ajudar a entender melhor o caso da congruência semântica apresentada por Duval:

> *Maurício tinha 8 bolas. Em seguida deu 5 para Eduardo. Quantas bolas Maurício tem agora?*

Nesse exemplo, os autores destacaram a identidade entre a frase e a expressão 8–5, na qual o verbo "deu" poderia ser facilmente associado à operação de subtração. Nota-se ainda que os dados numéricos da sentença matemática correspondiam, na mesma ordem, aos dados apresentados no problema em língua materna. Assim, podemos dizer que existe congruência semântica entre a frase e a expressão aritmética.

A análise dos dados mostrou que os problemas que possuíam as expressões "ter a mais" ou "ter a menos" em seus enunciados, mas que requeriam as operações de subtração e adição, respectivamente, para sua resolução, tendiam a apresentar um nível baixo de desempenho, o que corroborou os estudos de Vergnaud (apud MORETTI; BRANDT, 2014), que destacam a influência dos fatores semânticos para explicar os sucessos ou fracassos dos alunos na solução de problemas deste tipo.

Ainda com relação à investigação sobre o domínio das estruturas aditivas, pode-se citar os estudos de Santana *et al*. (2009) e Magina e Campos (2004).

Os resultados mostraram que as situações nas quais a taxa de acerto foi baixa, possivelmente a razão foi a falta de compreensão do problema, havendo uma concentração dos erros ligados aos cálculos relacionais envolvidos nas situações propostas.

Nesse sentido, o trabalho realizado por Magina e Campos (2004) buscou diagnosticar as competências das crianças em lidar com situações-problema do campo aditivo desde o início de sua vida escolar, bem como o desempenho das mesmas nas quatro séries iniciais do ensino fundamental. O estudo citado concluiu que, embora a evolução das competências estivesse presente em todas as séries, ela não ocorreu de maneira análoga nas diferentes situações-problema, uma vez que cada uma exigiu o domínio de raciocínios distintos.

A busca pela compreensão das dificuldades apresentadas pelos estudantes na solução de problemas, em especial os de estruturas aditivas, também tem sido pauta de pesquisas que discutem a importância desses conceitos na formação continuada do professor, entre elas Santana, Alves e Nunes (2015).

A análise qualitativa dos dados mostrou que, para as professoras, a utilização da teoria dos campos conceituais durante o processo formativo promoveu reflexões frutíferas a respeito da forma como se desenvolve o processo de ensino e também deu suporte para a construção de atividades significativas à operação matemática, permitindo compreender as relações envolvidas nos conceitos.

As autoras destacaram ainda a importância da inserção da Teoria dos Campos Conceituais nos cursos de formação de professores, tanto na formação inicial como na continuada, como forma de instigar os professores a constantes reflexões sobre sua prática docente e seu processo formativo.

Desta forma, as pesquisas mostraram, dentre outros aspectos, que as dificuldades apresentadas pelos estudantes, no que concerne a solução de problemas de estruturas aditivas, estão relacionadas a vários fatores e de diferentes naturezas, dentre elas cabe citar: os aspectos semânticos que tratam da congruência ou incongruência semântica; a falta de compreensão do problema; erros ligados aos cálculos relacionais e a importância da formação continuada do professor abordar a teoria dos campos conceituais.

Ante os diversos fatores que podem estar associados às dificuldades apresentadas pelos estudantes durante a solução de problemas, acrescenta-se a importância das etapas da solução de problemas, que representam uma possibilidade de esmiuçarmos os erros apresentados pelos estudantes. Para investigar as etapas da solução de problemas, tomamos como referência as quatro etapas propostas por Polya (2006), a saber: Compreensão do problema; Estabelecimento de um plano; Execução do Plano e Retrospecto.

Dessa forma, a pesquisa de mestrado que originou este texto investigou a seguinte questão:

> ***Quais as relações entre desempenho e as etapas da solução de problemas de estrutura aditiva?***

Foram elencados os seguintes objetivos:

- Verificar os procedimentos que os estudantes utilizam para solucionar problemas matemáticos de estruturas aditivas;

- Analisar se existe diferença de desempenho entre as crianças na solução de problemas de estrutura aditiva relacionada ao ano de escolaridade;

- Identificar, dentre as etapas da solução de problemas propostas por Polya, em quais delas os estudantes apresentam maior dificuldade.

Solução de Problemas

Partindo de uma abordagem cognitiva de solução de problemas, este "é tratado como uma habilidade cognitiva complexa que caracteriza uma das atividades humanas mais inteligentes" (CHI; GLASER, 1992, p. 250), ou seja, refere-se a uma atividade mental superior ou de alto nível que implica no uso de conceitos e princípios necessários para atingir uma determinada solução (BRITO, 2006).

Segundo Proulx (apud BRITO, 2006), a solução está mais dirigida ao resultado, ao produto final, à resposta propriamente dita, logo seria melhor empregar o termo "solução". De acordo com Mello (2015), o termo resolução pode ser entendido como "solucionar novamente", se considerar o significado do prefixo "re", confundindo-se com a aplicação de um exercício.

Echeverria e Pozo (1998) enfatizaram ainda que uma situação somente pode ser concebida como um problema se existe um reconhecimento dela como tal e, para tanto, o sujeito não pode dispor de procedimentos automáticos que o permitam solucioná-la de forma imediata, sem demandar um processo de reflexão que implique em uma tomada de decisões acerca da sequência de passos a serem seguidos. Logo, um problema se distingue de um exercício na medida em que, neste último, há uma disponibilidade imediata de mecanismos que conduzem à solução. Sternberg (2008) ressalta que, quando se recupera rapidamente uma resposta da memória, não temos um problema.

Gagné (1974) apontou que a solução de problemas está relacionada a um tipo de atividade de alto nível de aprendizagem do indivíduo, valendo-se dos princípios aprendidos e permitindo a elaboração de novos.

Ainda nessa linha, cabe destacar que, por vezes, a "solução de problemas" é confundida com situações problema. A "situação problema" é estática, refere-se ao espaço do problema e se tornará um problema à medida que o indivíduo que se depara com ela é motivado a transformá-la, a buscar o estado final (BRITO, 2006).

Sendo assim, em uma perspectiva mais abrangente, podemos definir a solução de problemas como:

> (...) um processo que se inicia quando o sujeito se defronta com uma determinada situação e necessita buscar alternativas para atingir uma meta; nesses casos, o sujeito se encontra frente a uma situação-problema e, a partir daí, desenvolve as etapas para atingir a solução. A solução de problemas é, portanto, geradora de um processo através do qual o aprendiz

> vai combinar, na estrutura cognitiva, os conceitos, princípios, procedimentos, técnicas, habilidades e conhecimentos previamente adquiridos que são necessários para encontrar a solução com uma nova situação que demanda uma reorganização conceitual cognitiva. Trata-se, portanto, de reorganização dos elementos já presentes na estrutura cognitiva, combinados com os novos elementos trazidos. (BRITO, 2006, p. 19)

Comparando as definições apresentadas pelos diferentes autores, nota-se que, com maior ou menor detalhamento, a essência acerca do que se caracteriza como um problema mantém-se em todos, ou seja, se a priori já se tem a resposta, ou se rapidamente a recuperamos da memória, não estamos diante de um problema.

As etapas pelas quais passa o pensamento durante a solução de um problema foram tratadas por vários autores que, salvo um pormenor ou outro, preservam os passos essenciais. Buscamos apoio nas etapas propostas por Polya (2006).

Em 1945, Polya publicou aquela que seria considerada sua obra mais conhecida: *How to Solve It*. O autor desenvolveu um processo de solução de problemas em quatro etapas, a saber: Compreensão do Problema; Estabelecimento de um Plano; Execução do Plano e Retrospecto.

A Compreensão do problema refere-se à necessidade do enunciado verbal do problema ficar bem entendido. Esta etapa prevê também que o estudante identifique as partes principais do problema, a incógnita, os dados, as condicionantes. Com relação ao Estabelecimento de um plano, o autor afirma que conceber um plano exige, de um modo geral, que conheçamos quais as contas, os cálculos ou desenhos que precisamos executar para obter a incógnita, ou seja, quais os procedimentos para a obtenção da solução. No tocante à Execução do plano, o autor ressalta que a dificuldade maior consiste no estabelecimento do plano, pois este exige conhecimentos anteriores, bons hábitos mentais e de concentração. Por outro lado, a execução do plano exigirá do estudante muita paciência para checar todos os detalhes, de forma a não ocultar um erro. Por fim, o Retrospecto é caracterizado como uma fase importante e instrutiva do trabalho da solução, pois o objetivo é fazer com que o estudante realize um retrospecto da solução completa, de forma a reexaminar o caminho que o levou até a resposta, favorecendo a consolidação do seu conhecimento e aperfeiçoando sua capacidade de resolver problemas.

Destaca-se que somente seguir as etapas propostas não garante o êxito na solução, tampouco garantirá a formação e aprimoramento para bons solucionadores de problemas, tidos na literatura como "experts", uma vez que são vários e de diferentes naturezas os fatores que influenciam na solução de problemas.

Nesse sentido, buscando também compreender as dificuldades apresentadas pelos estudantes na solução de problemas, em particular os problemas de estruturas aditivas, Vergnaud (2009) desenvolveu a Teoria dos Campos Conceituais. Com relação ao campo conceitual das estruturas aditivas, Vergnaud (1986) destacou que esta diz respeito a uma série de competências observáveis em crianças e em alunos do ensino secundário ao superior, e que vai além do conjunto de conceitos envolvidos, ou seja, há por trás destas estruturas um problema de conceituação absolutamente essencial e que compreende várias outras complexidades.

A teoria dos campos conceituais é uma teoria cognitivista que foi desenvolvida pelo psicólogo, professor e pesquisador francês Gérard Vergnaud. Ela oferece um arcabouço para o estudo do desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem de competências complexas pelos estudantes, levando em conta os próprios conteúdos do conhecimento e a análise conceitual de seu domínio (VERGNAUD, apud MOREIRA, 2009).

Para Vergnaud, o conhecimento está organizado em campos conceituais, cujo domínio por parte do sujeito ocorre a longo prazo, através de experiência, maturidade e aprendizagem. Nesse contexto, "longo prazo" estende-se a uma perspectiva de desenvolvimento, ou seja, não basta alguns dias ou algumas semanas para que uma criança adquira uma nova competência ou compreenda um novo conceito, mas sim vários anos de vida escolar atrelados à experiência do sujeito. É exatamente sobre esse processo que a teoria dos campos conceituais ocupa-se entre as primeiras competências adquiridas pelas crianças entre quatro ou cinco anos concernentes ao espaço e aos raciocínios sobre grandezas, por exemplo, até as competências que ainda trazem dificuldades à parte dos adolescentes (VERGNAUD, apud MOREIRA, 2009; 2011).

Para a constituição da teoria dos campos conceituais, Vergnaud (apud MOREIRA, 2009) apoiou-se nas contribuições das teorias de Piaget e de Vygotsky. No que diz respeito à teoria de Piaget, sobretudo, ressalta-se o conceito de esquema, fundamental para a teoria dos campos conceituais.

Vergnaud (1998), pautado nas contribuições de Piaget, definiu esquema como a organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situações, e ressalta ainda que não é o comportamento que é invariante, mas sim a sua organização. O autor aponta que a maior parte da nossa atividade cognitiva é composta de esquemas e, pensando nisso, a educação deve contribuir para que o sujeito desenvolva um repertório amplo e diversificado de esquemas, uma vez que os estudantes são frequentemente confrontados com situações em que não dispõem dos esquemas necessários. Ante isto, não há outra alternativa senão procurar por esquemas "na vizinhança", na tentativa de decompor e recombinar os já existentes a fim de formar novos esquemas – contando ou não com a ajuda do professor ou dos colegas.

No que diz respeito ao legado de Vygotsky à teoria dos campos conceituais, nota-se, por exemplo, a importância atribuída à interação social, à linguagem e à simbolização presente no progressivo e gradativo domínio de um campo conceitual pelo sujeito (VERGNAUD apud MOREIRA, 2009). Ressalta-se, ainda, a ênfase na proposta teórica de Vygotsky acerca da zona de desenvolvimento proximal, que caracteriza o desenvolvimento mental prospectivamente, quer dizer, trata da distância entre as práticas que uma criança já domina e as atividades nas quais ela ainda depende de ajuda. Para Vygotsky, é no caminho entre esses dois pontos que ela pode se desenvolver mentalmente através da interação e da troca de experiências (VYGOTSKY, 2009). Nesse sentido, o professor auxilia o sujeito a realizar algo que este, sozinho, não poderia fazer, ou seja, nesta perspectiva o professor é tido como mediador (VERGNAUD, 2009).

Para Vergnaud (apud MOREIRA, 2009), um campo conceitual significa um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição. Nesse sentido, o detalhamento de um campo conceitual exige sincronicamente a análise das situações (ou problemas), dos procedimentos de tratamentos empregados pelos alunos, bem como os propósitos que eles têm e suas argumentações, além das representações simbólicas que utilizam (VERGNAUD, 1986).

A base da Teoria dos Campos Conceituais é a concepção de conceito elaborada pelo autor. Vergnaud (2009) definiu que a construção de um conceito envolve uma terna de conjunto que, de acordo com a teoria dos campos conceituais, foi denominada simbolicamente de (S, I e R), em que S é um conjunto de situações; I um conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações); e R um conjunto de representações simbólicas. O conjunto de situações é que dá sentido ao conceito. Por sua vez, o conjunto de invariantes é responsável por acomodar a operacionalidade do conceito. Por último, o conjunto de representações simbólicas, que envolve a linguagem natural, gráficos, diagramas, sentenças formais, dentre outras, é usado para indicar, bem como representar, o conjunto de invariantes e, consequentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

O conjunto de invariantes operatórios, também designados por Vergnaud (1998) pelas expressões conceito-em-ação e teorema-em-ação, referem-se aos conhecimentos contidos nos esquemas. Teorema-em-ação é uma proposição tida como verdadeira sobre o real, e conceito-em-ação é um objeto, um predicado ou uma categoria de pensamento tida como pertinente. Todavia, o autor destaca que conceitos-em-ação e teoremas-em-ação podem progressivamente tornarem-se verdadeiros conceitos e teoremas científicos. Neste sentido, essencialmente o ensino deve consistir em ajudar o aluno a construir conceitos e teoremas explícitos (e cientificamente aceitos) partindo de conhecimento implícito, e eis aí um dos problemas do ensino e da didática que consiste em encontrar maneiras de favorecer tal transformação (VERGNAUD, 1986; 1998).

Acrescenta-se também que a teoria dos campos conceituais não é uma teoria exclusiva da matemática, considerando que a noção conceitual não se restringe somente a esta área. Contudo, o autor apresenta especial interesse pelos campos conceituais das estruturas aditivas e das estruturas multiplicativas e, para fins deste artigo, serão enfocadas as estruturas aditivas.

O delineamento das estruturas aditivas é muito mais complexo do que se possa imaginar, pois não se restringe a execução dos cálculos numéricos em si, seja a adição e/ou a subtração, ou seja, implica no entendimento da progressiva e lenta compreensão, pelas crianças, das propriedades das relações em jogo (VERGNAUD, 1986).

Vergnaud (2014) descreveu que a noção de relação é uma noção absolutamente geral, e que o conhecimento consiste, em grande parte, em estabelecer relações e organizá-las em sistemas. O autor cita três exemplos de relações, sendo elas as binárias, ternárias e quaternárias, respectivamente, que ligam dois elementos entre si, três elementos entre si e, por fim, quatro elementos entre si.

Ante o exposto, Vergnaud (2014) destacou que existem vários tipos de relações aditivas e, consequentemente, vários tipos de adições e subtrações. Ressalta ainda que as relações aditivas são relações ternárias, isto é, são relações que ligam três elementos entre si. Por exemplo: cinco mais quatro é igual a nove.

Outro aspecto indispensável para a compreensão das estruturas aditivas é a noção de cálculo relacional proposto pelo autor. No que se refere ao cálculo relacional, o autor faz uma distinção entre os cálculos "relacional" e "numérico". O cálculo numérico está implicado às operações usuais de adição, subtração, multiplicação e divisão; por outro lado, o cálculo relacional compreende as operações do pensamento necessárias para que haja a manipulação das relações envolvidas nas situações (MAGINA, 2008).

Vergnaud (2014) descreve seis esquemas ternários fundamentais.

I- **Composição de medidas:** duas medidas se compõem para resultar em uma terceira.

Exemplo: Paulo tem 6 bolinhas de gude de vidro e 8 bolinhas de gude de metal. Ele tem ao todo 14 bolinhas.

II- **Transformação de uma medida:** uma transformação opera sobre uma medida para resultar em uma medida.

Exemplo: Paulo tinha 7 bolinhas de gude antes de jogar. Perdeu 4 bolinhas. Ele tem agora 3.

III- **Comparação de Medidas:** uma relação liga duas medidas.

Exemplo: Paulo tem 8 bolinhas de gude. Tiago tem 5 a menos que Paulo. Então Tiago tem 3.

IV- **Composição de transformações:** duas transformações compõem-se para resultar em uma transformação.

Exemplo: Paulo ganhou ontem 6 bolinhas de gude e hoje perdeu 9 bolinhas. Pensando no todo, ele perdeu 3.

V- **Transformação de uma relação:** uma transformação opera sobre um estado relativo (uma relação) para resultar em um estado relativo.

Exemplo: Paulo devia 6 bolinhas de gude para Henrique. Ele devolveu 4. Agora, ele lhe deve somente 2 bolinhas.

VI- **Composição de relações:** dois estados relativos (relações) compõem-se para resultar em um estado relativo.

Exemplo: Paulo deve 6 bolinhas de gude a Henrique, mas Henrique lhe deve 4. Então, Paulo deve 2 bolinhas a Henrique.

De um modo geral, considerando as características de cada categoria, pode-se dividi-las em três grupos básicos de problema, que consistem em composição, transformação e comparação, e cada qual apresenta suas subcategorias, bem como seus respectivos graus de complexidade.

Por vezes, a prática docente privilegia uma das categorias e, consequentemente, não abrange as subcategorias, ou seja, além de limitar a oferta no âmbito da categoria, restringe também as subcategorias.

Procedimentos Metodológicos

Foi selecionada uma amostra de conveniência, composta por uma turma de estudantes matriculados no terceiro, quarto e quinto anos de uma escola pública da rede municipal de Limeira - SP. A idade dos sujeitos variou de 8 a 10 anos. Foram utilizados como instrumentos um questionário informativo para caracterizar os sujeitos e um teste matemático, tipo lápis e papel, composto por seis problemas de estruturas aditivas, utilizando valores numéricos pequenos. Os dados foram coletados pela primeira autora e a aplicação do instrumento foi coletiva. O Quadro 1 apresenta os problemas utilizados.

Quadro 1 - Problemas Elaborados para o Teste de Matemática

	Problemas	Categorias
P1	A coleção de Marcelo tem 6 tampinhas azuis e 8 tampinhas verdes. Quantas tampinhas ele tem ao todo?	Composição de medidas
P2	Gabriel tinha 9 cartinhas antes de jogar, perdeu 4 cartinhas. Quantas cartinhas ele tem agora?	Transformação de uma medida
P3	Maria tem 8 bonecas. Laura tem 5 bonecas a menos que Maria. Quantas bonecas Laura tem?	Comparação
P4	Bruno jogou 2 partidas de bolinha de gude. Na primeira partida, ele ganhou 16 bolinhas. Na segunda partida, perdeu 9. Ao final, o que aconteceu?	Composição de transformações
P5	Ryan devia 12 cartinhas para Henrique. Ele devolveu 7. Quantas cartinhas ele ainda deve para Henrique?	Transformação de uma relação
P6	Isabele deve 8 figurinhas à Giovana, mas Giovana lhe deve 5. Então qual é a quantidade de figurinhas que Isabele deve à Giovana?	Composição de relações

Fonte: Gabriel (2018).

O teste foi corrigido de duas maneiras: a primeira considerou as questões “certas” ou “erradas” atribuindo pontos de zero a dez, tendo sido dada uma nota, a qual foi obtida pela pontuação em cada problema.

A atribuição dos pontos de cada problema baseou-se na análise das seis categorias de estruturas aditivas apresentadas por Vergnaud (2014). Os pontos foram atribuídos de acordo com a ordem crescente do grau de complexidade característico a cada categoria, quer dizer, partimos do menos para o mais complexo. Consequentemente, os pontos foram conferidos da seguinte forma: para o primeiro e segundo problemas, um ponto para cada; para o terceiro e quarto, um ponto e meio para cada; para o quinto problema foram atribuídos dois pontos; e, por fim, três pontos para o sexto problema.

Na segunda forma de correção, atribuiu-se uma pontuação de acordo com o conjunto de procedimentos desenvolvidos pelo sujeito, variando entre 0 e 30 pontos, de acordo com o sistema elaborado por Charles (apud LIMA, 2001), a saber:

Quadro 2 - Sistema de Pontuação Elaborado por Charles Variando entre 0 e 30 Pontos

Pontos	Descrição
0	Devolve o problema "em branco" (sem solução). Números copiados do problema; não entendimento do problema evidenciado. Resposta incorreta, sem evidenciar o desenvolvimento da solução.
1	Iniciou usando estratégia inapropriada; não concluiu a solução do problema. Abordagem sem sucesso; não tentou abordagem diferente. Tentativa falha de alcançar um subobjetivo.
2	Estratégia apropriada foi usada; não encontrou a solução ou alcançou um subobjetivo, mas não terminou a solução. Estratégia inadequada, que revele algum entendimento do problema. Resposta correta e procedimento de solução não mostrado.
3	Estratégia apropriada, porém o sujeito: Ignorou a condição do problema. Deu uma resposta incorreta sem razão aparente. Falta de clareza no procedimento empregado.
4	Estratégia(s) apropriada(s) Desenvolvimento da solução reflete entendimento do problema. Resposta incorreta por um erro de cópia ou de cálculo.
5	Estratégia(s) apropriada(s) Desenvolvimento da solução reflete entendimento do problema. Resposta correta.

Fonte: Lima (2001).

Os dados coletados no questionário informativo e no teste de matemática foram submetidos à análise exploratória de dados (estatística descritiva). Além disso, algumas análises estatísticas foram realizadas com o software IBM SPSS, com nível de significância de 0,05.

Análise de Dados

Na Tabela 1 e Figura 1, apresentamos o desempenho dos estudantes por ano escolar e verificamos que há um ganho significativo na nota à medida que se progride na escolarização, conforme resultado do Teste F ($F_{(2,61)} = 5{,}839$; $p = 0{,}005$).

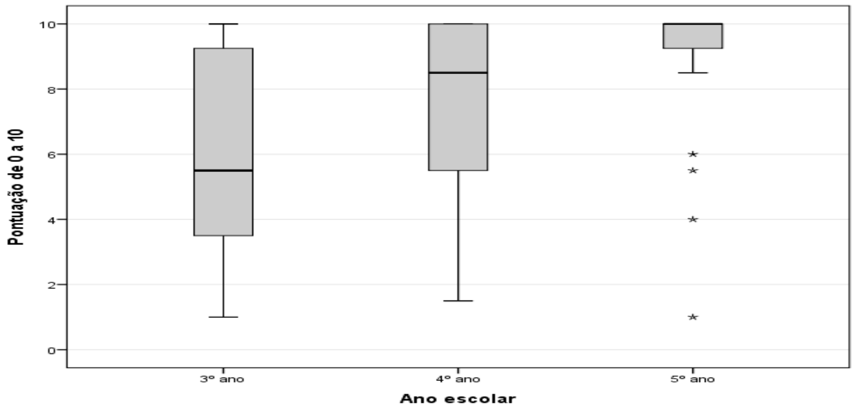
Tabela 1- Desempenho dos Estudantes por Ano Escolar

Ano escolar	Nº de sujeitos	Média (*)	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
3º ano	23	5,74a	3,12	1,00	10
4º ano	21	7,12ab	2,90	1,50	10
5º ano	20	8,75b	2,56	1,00	10
Geral	64	7,13	3,10	1,00	10

Fonte: Dados da Pesquisa

(*) Médias com letras iguais não diferem estatisticamente, conforme o teste de comparações múltiplas de Tukey.

Figura 1- Desempenho dos Estudantes Segundo o Ano Escolar



Fonte: Dados da Pesquisa

Na Figura 1, podemos ver que no 5º ano há quatro estudantes que obtiveram notas muito abaixo de 8 pontos, o que puxou a média para baixo, influenciando o resultado do teste de Tukey, que não detectou um desempenho superior do 5º ano com relação ao 4º ano.

Visando analisar a relação entre o desempenho no instrumento e a autopercepção de dificuldade nas cinco etapas da resolução de problemas, declaradas pelos estudantes quando da aplicação do questionário informativo, criamos a variável "Número de etapas com dificuldade", que agrupamos em três classes: nenhuma etapa, uma etapa, duas ou mais etapas. Os dados obtidos evidenciam que os estudantes indicaram que possuem mais dificuldades na etapa *Execução de um plano*. A etapa de *Retrospecto* foi a que apresentou menor indicação pelos estudantes como sendo difícil.

Na Tabela 2 e na Figura 2, apresentamos os resultados e podemos observar que o desempenho está fortemente ligado à autopercepção de dificuldade, conforme o resultado do teste F ($F_{(2,61)}$ = 6,621; p = 0,002): o desempenho cai de acordo com o número de etapas com autopercepção de dificuldade, sendo que o teste de comparações múltiplas de Tukey sinaliza que apenas o desempenho dos estudantes que indicaram ter dificuldade em duas etapas ou mais distancia-se significativamente dos outros.

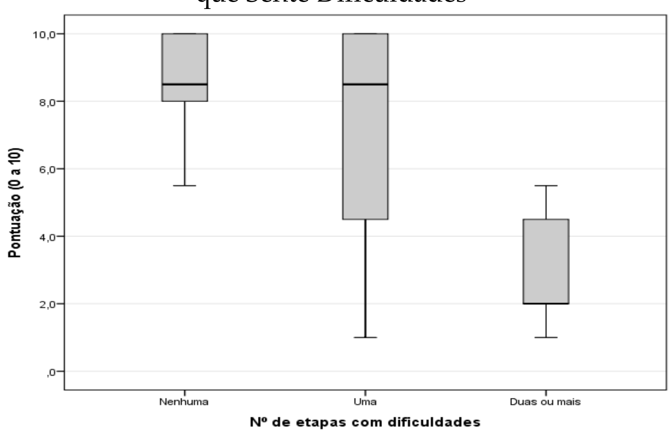
Tabela 2- Desempenho dos Estudantes por Autopercepção de Dificuldades

Nº de etapas que sente dificuldade	N	Média (*)	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
Nenhuma	10	8,600 a	1,5055	5,5	10,0
Uma	49	7,255 a	3,0993	1,0	10,0
Duas ou mais	5	3,000 b	1,9039	1,0	5,5
Total	64	7,133	3,0954	1,0	10,0

Fonte: Dados da Pesquisa

(*) Médias com letras iguais não diferem estatisticamente, conforme o teste de comparações múltiplas de Tukey.

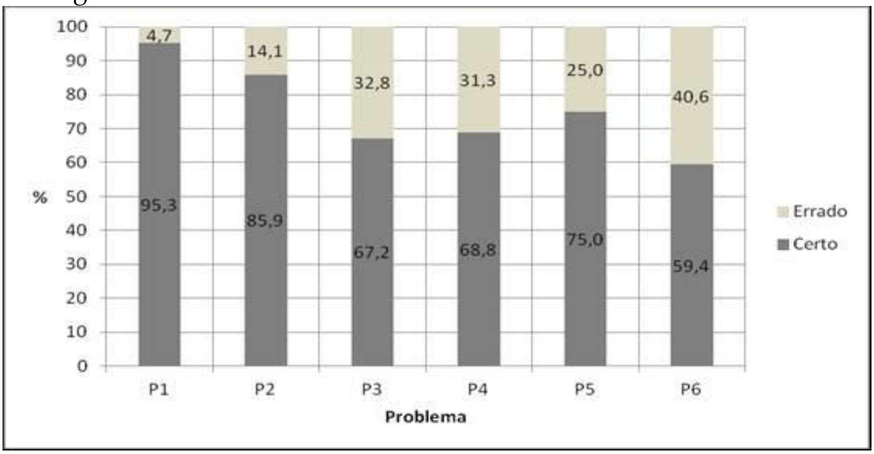
Figura 2- Desempenho dos Estudantes Segundo o Número de Etapas que Sente Dificuldades



Fonte: Dados da Pesquisa

Na Figura 3, apresentamos a taxa de acerto em cada um dos problemas. Podemos observar que a taxa de acerto é maior nos primeiros problemas e diminui nos últimos, e isto está correlacionado com a maior complexidade dos problemas, observando que a pontuação dada já levava em consideração esse fato.

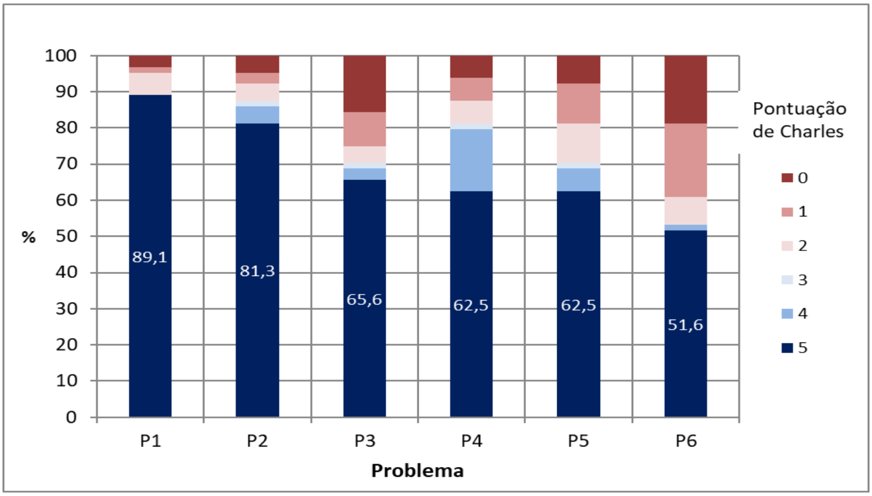
Figura 3 - Taxa de Acerto em Cada um dos Problemas Estudados



Fonte: Dados da Pesquisa

As duas formas de atribuir pontos às soluções dos alunos mostraram-se convergentes, como se pode observar na Figura 4, a qual apresenta a porcentagem de sujeitos em cada um dos problemas segundo a pontuação de Charles. Observamos que a complexidade do problema aumenta gradativamente, visto que a pontuação máxima (5) vai decaindo do P1 ao P6.

Figura 4 - Porcentagem de Sujeitos Segundo a Pontuação de Charles em Cada um dos Problemas



Fonte: Dados da Pesquisa

Os dados apresentados na Figura 4 evidenciam que a análise a priori que foi feita sobre as possíveis dificuldades para a atribuição da pontuação – a qual variou de 1,0 até 3,0 pontos por problema, perfazendo um total de 10 pontos –, revelou-se inadequada em relação aos problemas P3 e P5. Para o P3, classificado por Vergnaud (2014) como um problema da categoria de comparação, foi atribuído o valor de 1,5 ponto; no entanto, dada a dificuldade apresentada pelos estudantes, acreditamos que deveríamos ter atribuído 2,0 pontos. Por outro lado, para o problema P5, pertencente à categoria da *transformação de uma relação*, deveria ter sido atribuído a pontuação 1,5 ponto, pois, ainda que apresentasse uma estrutura mais complexa que os problemas anteriores, o seu contexto tratava de uma situação do cotidiano das crianças.

Analisando a Tabela 3, verificamos que, com exceção do Problema 1, em todos os outros problemas a porcentagem de acerto aumentou com a escolaridade, sendo que no Problema 3 a diferença foi de 40% entre o 3º e 5º ano, e no Problema 6, de 60%, sendo que apenas nestes dois problemas essa diferença foi estatisticamente significativa.

Tabela 3- Porcentagem de Acerto em Cada Problema por Ano Escolar e Resultado do Teste Qui-quadrado

Problema	Ano escolar				Teste Qui-quadrado		
	3º ano	4º ano	5º ano	Total	Valor	gl	p-valor
P1	100,0	95,2	90,0	95,3	2,395[a]	2	0,302
P2	73,9	90,5	95,0	85,9	4,469[a]	2	0,107
P3	**47,8**	**71,4**	**85,0**	**67,2**	**6,961**	**2**	**0,031**
P4	65,2	66,7	75,0	68,8	0,540	2	0,764
P5	69,6	66,7	90,0	75,0	3,540	2	0,170
P6	**30,4**	**61,9**	**90,0**	**59,4**	**15,818**	**2**	**0,000**

Fonte: Dados da Pesquisa

O primeiro problema (P1) era da categoria de composição, que mesmo crianças pré-escolares conseguem resolver. De acordo com Magina (2008), as situações protótipos são intuitivas, pois as mesmas são tratadas pelas crianças em sua vida diária, ou seja, mesmo antes de entrar na escola, favorecendo-as a ter um melhor desempenho em situações desse tipo. O raciocínio exigido nesse problema foi a adição direta de duas quantidades.

Pela análise dos dados, verificamos que no P1 a taxa de acerto foi de 95,3%, e que há uma queda linear na porcentagem de acertos do terceiro para o quinto ano: de 100% no 3º ano para 95,2% no 4º ano e 90,0% no 5º ano, embora o esperado era um crescimento linear que ocorresse do terceiro para o quinto ano de escolaridade. Este é o único problema em que a taxa de acerto inverte-se com a escolaridade, todavia essas diferenças não foram estatisticamente significativas, conforme resultado no teste Qui-quadrado.

No P2, observamos que a taxa de acerto geral foi de 85,9, e que há um crescimento linear na porcentagem de acertos do terceiro para o quinto ano: de 73,9% no 3º ano para 90,5% no 4º ano e 95% no quinto ano, embora essas diferenças não tenham sido estatisticamente significativas, conforme resultado no teste Qui-quadrado. Destaca-se que esse problema, tal qual o anterior, é considerado por Vergnaud (1986) como protótipo de problemas de estruturas aditivas; em ambos os problemas P1 E P2, os resultados esperados e aqueles obtidos se confirmaram.

O terceiro problema (P3) do teste de matemática pertence à categoria de comparação, em que são dados o referente ("Maria tem 8 bonecas") e a relação ("5 bonecas a menos"), e se pede o referido. Nesta situação, a relação entre o referente e o referido é negativa. A resposta correta esperada era: Laura tem 3 bonecas. Para obter esta resposta, era preciso que o estudante dominasse os conceitos de comparação e de subtração.

No terceiro problema, identificamos que a taxa de acerto geral foi de 67,2% e que há um crescimento linear de acertos do terceiro para o quinto ano: de 47,8% no 3º para 71,4% no 4º ano e 85% no 5º ano. Destaca-se que essa diferença do terceiro para o quinto ano foi estatisticamente significativa. Os resultados apresentados na Tabela 3 confirmaram a nossa hipótese de que o acerto aqui seria inferior aos dois problemas anteriores, posto que exigiu um raciocínio mais aprimorado. Magina (2008) e Nunes e Bryant (1997) apontaram que esse tipo de problema parece trazer mais dificuldades para os alunos, o que fica evidenciado pelo percentual de erros apresentados pelos estudantes do 3º e 4º ano de escolaridade: 52,2% (n=12) e 28,6% (n=6), respectivamente.

O quarto problema (P4) pertencia à categoria de *composição de transformações,* sendo duas transformações, uma positiva (+16) e a outra negativa (-9), e solicitava-se a terceira (+7) pela operação de subtração. Pela análise de dados, confirmamos que a taxa de acerto geral foi de 68,8%. Os resultados mostram que, para os três anos de escolaridade, há um crescimento linear na porcentagem de acertos: 65,2% (n=15), 66,7% (n=14) e 75,0% (n=15), respectivamente, sendo apenas ligeiramente superior do 3º para o 5º ano, ainda que essas diferenças não tenham sido estatisticamente significativas, conforme resultado no teste Qui-quadrado, constantes na Tabela 3. Resultado similar foi encontrado por Vergnaud e Durand (apud SANTANA, 2010) em um estudo realizado com estudantes na faixa etária de 10 a 11 anos. Nesse tipo de problema, os estudantes obtiveram um índice de acerto acima de 70%.

O quinto problema (P5) é classificado como transformação de uma relação: foi dada uma relação estática negativa ("devia 12") e uma transformação positiva ("pagou 5"). Por meio da transformação dada, tinha que se buscar uma nova relação estática, a qual, nesse caso, era descobrir "*quanto ainda devia para Henrique*". O aluno precisava dominar os conceitos de transformação de uma relação e de subtração para solucionar esse problema com êxito. Na Tabela 3, verificamos que a taxa de acerto geral foi de 75%. Os dados mostram que, em geral, houve aumento na taxa de acertos dos três anos de escolaridade. Nota-se também um expressivo avanço no percentual de acertos do 5º ano em relação ao 4º ano: 90% (n=18) e 66,7% (n=14), respectivamente. Todavia essas diferenças não foram estatisticamente significativas, conforme resultado no teste Qui-quadrado. Ressalta-se que, apesar de apresentar uma estrutura mais complexa do que os problemas anteriores, os resultados confirmaram a hipótese levantada sobre a facilidade de compreensão que uma situação presente no cotidiano traria para os estudantes.

No P6, há três relações estáticas dadas dentro da situação apresentada, a saber: "deve 8" é a primeira relação estática; a segunda fica evidenciada pela expressão "lhe deve 5" (no sentido de ter em haver 5) e a terceira que é caracterizada por "deve". De acordo com a revisão de literatura, já era esperado um baixo desempenho dos estudantes nessa categoria, a julgar pela sua complexidade. Dessa forma, apenas o 5º ano apresentou um resultado que superou a expectativa, registrando 90,0% (n=18) de acertos.

A taxa de acerto geral foi de 59,4%. Essa foi a questão mais difícil para os terceiro e quarto anos de escolaridade, os quais registraram os maiores índices de erros: 69,6% (n= 16) e 38,1% (n=8), respectivamente. Os resultados do teste Qui-quadrado mostraram que a diferença de 60% entre o desempenho do 3º para o 5º ano de escolaridade foi estatisticamente significativa.

Os resultados mostraram ainda que a etapa em que os estudantes apresentaram maior dificuldade foi a de *Retrospecto*. De um modo geral, a falha dos estudantes centrou-se na falta de uma resposta ao problema proposto, ou seja, após a execução do cálculo exigido, os estudantes, em sua maioria, não apresentavam uma resposta do tipo "R:" ou " Ele tem agora x tampinhas" ou mesmo "Tem ao todo x tampinhas".

A segunda maior dificuldade encontrada pelos estudantes durante a solução de problemas foi a *Compreensão do problema*. Os dados indicam que, nos problemas tidos como protótipos, os estudantes, em sua maioria, não apresentaram dificuldade nesta etapa. Em contrapartida, nos problemas com um grau de complexidade maior, foi possível observar o aumento da quantidade de crianças com dificuldade nesta etapa.

Dessa forma, observou-se que a autopercepção da etapa mais difícil pelos estudantes foi discordante da etapa em que eles apresentaram, de fato, mais dificuldades.

Considerações Finais

Com relação aos procedimentos utilizados pelos estudantes, evidenciados durante a solução de problemas, foi observado que os estudantes, em sua maioria, solucionaram os problemas utilizando predominantemente os cálculos aritméticos. Nos problemas que envolviam estruturas mais complexas, aumentou a quantidade de estudantes que não demonstraram o procedimento utilizado para a solução.

Neste sentido, Selva, Falcão e Nunes (2005), Moro e Soares (2006) e Koch e Soares (2005) assinalaram a importância de se trabalhar e incentivar os estudantes a utilizarem diversas formas para solucionar o problema. Destaca-se a importância de atrelar o procedimento do cálculo numérico ao ensino da solução de problemas (PALANCH, 2012).

Os resultados do teste matemático indicaram que há um ganho na nota à medida em que se progride na escolarização, ou seja, observa-se uma efetiva contribuição da escola no que diz respeito ao desempenho dos estudantes, sendo que foi encontrada diferença estatisticamente significativa entre o 3º e 5º ano de escolaridade.

Os problemas nos quais a taxa de acerto foi pequena, a análise de protocolo mostrou que, dentre outras, uma das razões era a falta de compreensão do problema, ocasionando uma concentração de erros ligados ao cálculo relacional.

A categoria *composição de relações estáticas* foi a que apresentou os maiores índices de erros entre os estudantes dos terceiro e quarto anos de escolaridade. Ressalta-se que esses erros, em sua maior parte, estavam ligados ao cálculo relacional.

A etapa em que os estudantes apresentaram maior dificuldade foi a de *Retrospecto*. Polya (2006) e Sternberg (2008) destacaram a importância do *Retrospecto* durante o processo de solução de problemas, ressaltando que, frequentemente, é por meio do processo de avaliação e do reexame da solução que ocorrem importantes progressos. O hábito de examinar a solução oferece a oportunidade de se inteirar do método que levou à resolução, para caracterizá-lo e posteriormente utilizá-lo em outros problemas.

Em relação à segunda etapa, em que os estudantes apresentaram maior dificuldade durante a solução de problemas, a de *Compreensão do problema*, ressalta-se que tal dificuldade está ligada ao cálculo relacional, o qual, por sua vez, assinala que os estudantes têm dificuldade para decidir qual é a operação correta para a solução de determinado problema. Ademais, foi possível verificar a existência de erros graves ao armar e efetuar as operações, denotando falta de entendimento e conhecimento do Sistema de Numeração Decimal.

A pesquisa sublinha a necessidade de um processo de formação de professores voltado para os problemas aditivos, que auxilie o professor ou futuro professor a promover o trabalho com os estudantes fazendo uso das diferentes situações dentro do campo conceitual das estruturas aditivas. Desta forma, o estudante terá a possibilidade de desenvolver e dominar os conceitos presentes nesse campo conceitual.

Referências

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular. Secretaria de Educação Básica**. Brasília: MEC, 2017.

BRITO, M.R.F. (Org.). **Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos**. Campinas: Alínea, 2006.

CHI, M.; GLASER, R. A capacidade para a solução de problemas. In: R. STERNBERG (Org.). **As capacidades intelectuais humanas: uma abordagem em processamento de informações**. Tradução: Dayse Batista. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.

ECHEVERRÍA, M. D. P. P. ; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J.I. (Org.). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Tradução: Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 13-42

GAGNÉ, R.M. **Como se realiza a aprendizagem**. Brasília, DF: Livros Técnicos e Científicos/ INL, 1974.

KOCH. N.T.O.; SOARES, M.T.C. O professor, seus alunos e a resolução de problemas de estrutura aditiva. In: MORO, M.L.F.; SOARES, M.T.C. (Orgs.) **Desenhos, palavras e números**: as

marcas da matemática na escola. Curitiba: Ed. da UFPR, 2005. p. 145-182.
LIMA, V.S. **Solução de Problemas: Habilidades Matemáticas, Flexibilidade de Pensamento e Criatividade**. Tese (Doutorado em Educação), UNICAMP, Campinas, 2001.
MAGINA, S.; CAMPOS, T. As estratégias dos alunos na resolução de problemas aditivos: um estudo diagnóstico. **Educação matemática e pesquisa**, v. 6, n. 1, p. 53-71, 2004.
MAGINA, S.M.P. **Repensando adição e subtração: contribuições da teoria dos campos conceituais**. 3.ed. São Paulo: PROEM, 2008.
MENDONÇA, T.M. *et al*.. As estruturas aditivas nas séries iniciais do ensino fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v. 10, n. 2, p. 219-239, jul. 2007.
MELLO, T.A. **Estratégias de Pensamento, atitudes em relação à matemática e desempenho na Prova Brasil.** Tese (Doutorado em Educação), UNICAMP, Campinas, 2015.
MOREIRA, M.A. **La Teoría de los campos conceptuales y La enseñanza/aprendizaje de las ciências**. Burgos: Universidad de Burgos, 2009.
MORETTI, M.T., BRANDT, C.F. Dificuldades na resolução de problemas aditivos a uma operação: ponto de encontro esclarecedor à luz da noção de congruência semântica. **Acta Scientiae,** Rio Grande do Sul, v. 16, n. 3, p. 553-577, 2014.
MORO, M.L.F.; SOARES, M.T.C. A aprendizagem de Estruturas Aditivas Elementares: Alunos, Professores e Pesquisadores. In: BRITO, M.R.F. (org.). **Solução de Problemas e a Matemática Escolar**. Campinas: Alínea, 2006. p. 135-162.
NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Tradução: Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.
NUNES, T. *et al*. **Educação Matemática:** números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2009.
PALANCH, W.B.L. Sondagem das Ideias do Campo Aditivo: Resolução de Problemas ou Aplicabilidade de Algoritmos.

Educação Matemática Em Revista, São Paulo, n. 35, p. 5-15, mar. 2012.
POLYA, G. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.
SANTANA, E.R.S. **Estruturas Aditivas: um suporte didático influencia a aprendizagem do estudante?** Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.
SANTANA, E.R.S.; CAZORLA, I.M.; CAMPOS, T.M.M. Desempenho de Estudantes em Diferentes Situações no Campo Conceitual das Estruturas Aditivas. **Estudos Em Avaliação Educacional,** São Paulo, v. 18, n. 38, p. 137-152, set/dez. 2007.
SANTANA, E.R.S.; CAZORLA, I.M.; OLIVEIRA, A.M. Uma análise do domínio das estruturas aditivas com estudantes da 5ª série do ensino fundamental. **Educação Matemática Em Revista**, São Paulo, v. 2, n. 10, p. 29-39, 2009.
SANTANA, E.; ALVES, A.A.; NUNES, C.B. A teoria dos campos conceituais num processo de formação continuada de professores. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 1162-1180, 2015.
SELVA, A.C.V.; FALCÃO, J.T.R.; NUNES, T. Solving additive problems at pre-elementary school level with the support of graphical representation. In: 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. **Anais**... Melbourne: PME, p. 161-168, 2005.
STERNBERG, R. **Psicologia Cognitiva**. 4. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.
VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica,** Lisboa, v. 1, n. 5, p. 75-90, 1986.
VERGNAUD, G. A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. **Journal of Mathematical Behavior,** v. 2, n. 17, p. 167-181, 1998.

VERGNAUD, G. Introdução. In: MOREIRA, M.A. **La Teoría de los campos conceptuales y La enseñanza/aprendizaje de las ciências**. Burgos: Universidad de Burgos, 2009. 97p.
VERGNAUD, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar Em Revista**, Curitiba, número Especial, p. 15-27, jan. 2011.
VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Ed. da UFPR, 2014.
VYGOTSKY, L.S. **A construção do pensamento e da linguagem.** Tradução: Paulo César Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2009.