UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Faculdade de Educação

ELIANA CRISTINA DE CARVALHO GABRIEL

UM ESTUDO SOBRE AS DIFICULDADES APRESENTADAS POR ALUNOS DO 3º AO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL NAS ETAPAS DE SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA

CAMPINAS
2018

ELIANA CRISTINA DE CARVALHO GABRIEL

UM ESTUDO SOBRE AS DIFICULDADES APRESENTADAS POR ALUNOS DO 3º AO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL NAS ETAPAS DE SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Educação, na área de concentração de Educação.

Orientadora: PROFA.DRA.MIRIAM CARDOSO UTSUMI

ESTE TRABALHO CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DE DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA ELIANA CRISTINA DE CARVALHO GABRIEL, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. MIRIAM CARDOSO UTSUMI

CAMPINAS
2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): Não se aplica.

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Faculdade de Educação
Rosemary Passos - CRB 8/5751

G114e

Gabriel, Eliana Cristina de Carvalho, 1981-
Um estudo sobre as dificuldades apresentadas por alunos do 3º ao 5º ano do ensino fundamental nas etapas de solução de problemas de estrutura aditiva / Eliana Cristina de Carvalho Gabriel. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Miriam Cardoso Utsumi.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Vergnaud, Gerard. 2. Educação Matemática. 3. Solução de problemas. 4. Estrutura aditiva. I. Utsumi, Miriam Cardoso. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: A study about the difficulties presented by students in grades 3 to 5 of elementary school in the stages of solution of additive structure problems
Palavras-chave em inglês:
Vergnaud, Gerard
Mathematics Education
Problems solution
Additive structure
Área de concentração: Educação
Titulação: Mestra em Educação
Banca examinadora:
Miriam Cardoso Utsumi [Orientador]
Fernanda de Oliveira Soares Taxa Amaroi
Telma Assad Mello
Data de defesa: 31-08-2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UM ESTUDO SOBRE AS DIFICULDADES APRESENTADAS POR ALUNOS DO 3º AO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL NAS ETAPAS DE SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA

Autor : Eliana Cristina de Carvalho Gabriel

COMISSÃO JULGADORA:

Prof.Dra.Miriam Cardoso Utsumi

Prof.Dra.Fernanda de Oliveira Soares Taxa Amaro

Prof.Dra.Telma Assad Mello

A Ata da Defesa assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no processo de vida acadêmica do aluno.

2018

Dedico este trabalho à memória do meu pai,
pelo seu legado de amor.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pois, sem Ele nada teria conquistado.

À Prof.Dra.Márcia Regina Ferreira de Brito (*in memoriam*) que me abriu as portas da pós-graduação na Unicamp e pelas contribuições valiosas para o meu desenvolvimento intelectual e profissional.

À Prof.Dra.Miriam Cardoso Utsumi que em virtude do falecimento da Prof.Dra. Márcia em julho/2018 aceitou generosamente o desafio de me conduzir na reta final deste trabalho como minha orientadora, por todo o seu empenho e dedicação.

Às Professoras Doutoras Fernanda de Oliveira Soares Taxa Amaro e Telma Assad de Mello que participaram da banca da qualificação e defesa, pelas correções e sugestões que contribuíram para o enriquecimento deste trabalho.

À Prof.Dra.Irene Maurício Cazorla pela assessoria na análise estatística.

Às amigas do grupo de pesquisa PSIEM: Sandra, Andréia, Lilian, Hellen, Aichi, Michele, Anália, Sanete, Lizandra, Marta, Clayde e Anastasia pelas discussões proveitosas e pelo apoio inestimável nos momentos mais difíceis.

Aos funcionários da Faculdade de Educação e da Biblioteca Prof. Joel Martins pelo carinho, atenção e dedicação com que sempre me trataram.

À equipe gestora da escola participante, docentes e funcionários pelo carinho e atenção durante a realização da coleta de dados.

Aos estudantes que participaram com entusiasmo deste estudo.

Aos meus pais Antonio (*in memoriam*) e Ana pelo apoio incansável, por acreditarem em mim, mesmo quando eu não acreditei.

Às minhas irmãs Claudinéia, Rosiane e Natalí e a minha sobrinha Letícia que sempre me apoiaram em todos os momentos difíceis e compartilharam comigo a alegria de concretizar este trabalho.

Ao meu marido Ederson Gabriel, grande companheiro, que esteve sempre ao meu lado, pelo amor, carinho, compreensão e paciência. Obrigada pela confiança que depositou em mim.

Aos meus amigos, familiares e todos àqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Com o objetivo de verificar as dificuldades dos estudantes durante a solução de problemas de estrutura aditiva, 64 estudantes oriundos do terceiro, quarto e quinto anos de escolaridade do ensino fundamental, de uma escola da rede pública de ensino do Estado de São Paulo, responderam a um questionário para sua caracterização e um teste matemático. A média geral do teste de matemática foi de 7,13 com desvio padrão de 3,10, sendo a nota mínima obtida 1,0 e a máxima 10,0. A análise dos dados mostrou que a variável autopercepção de dificuldades nas etapas da solução de problemas estava relacionada ao desempenho, conforme resultado do teste F ($F_{(2,61)} = 6{,}621$; $p = 0{,}002$), o desempenho cai de acordo com o número de etapas com autopercepção de dificuldade, considerando que o teste de Tukey sinalizou que apenas o desempenho dos estudantes que indicaram ter dificuldade em duas etapas ou mais se distancia significativamente dos outros. A análise dos dados evidenciou ainda que houve diferença significativa de desempenho entre o 3º e o 5º ano de escolaridade nos problemas P3 e P6. A análise dos protocolos mostrou que os estudantes de um modo geral, apresentaram mais dificuldade na etapa de *Retrospecto*, e em segundo lugar na etapa *Compreensão do Problema.* Os resultados mostraram ainda que o cálculo numérico foi o procedimento adotado pela maioria dos estudantes, não indicando diferença significativa por ano escolar.

ABSTRACT

In order to verify the difficulties of the students during the solution of problems of additive structure, 64 students from the third, fourth and fifth years of elementary school education from a public school system in the State of São Paulo answered a questionnaire for its characterization and a mathematical test. The overall mean of the math test was 7.13 with a standard deviation of 3.10, with the lowest grade being 1.0 and the maximum being 10.0. Data analysis showed that the self-perceived difficulty in the problem solving stages was related to the performance, according to the result of the F test ($F_{(2.61)} = 6.621, p = 0.002$), the performance falls according to the number of stages with self-perception of difficulty, considering that the Tukey test signaled that only the performance of the students who indicated having difficulty in two steps or more distances significantly from the others. The analysis of the data also showed that there is a significant difference in performance between the 3rd and 5th year of schooling in the P3 and P6 problems. The analysis of the protocols showed that students in general presented more difficulty in the Retrospect stage, and secondly in the Problem Understanding stage. The results also showed that the numerical calculation was the procedure adopted by the majority of the students, not indicating a significant difference per school year.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Solução do problema envolvendo cálculo relacional apresentada pelo sujeito AL 23

Figura 2- Solução do problema envolvendo comparação apresentada pelo sujeito A2 26

Figura 3 - Problemas 1 e 2 do instrumento elaborado por Magina e Campos (2004) 30

Figura 4 - Amostra da sondagem do sujeito "P" do 2º ano 31

Figura 5 - Amostra da sondagem do sujeito "B" do 2º ano 32

Figura 6 - Amostra de correção de uma sondagem seguindo critério: "certo" ou "errado" 34

Figura 7 - Amostra de correção de duas sondagens seguindo o critério investigativo 34

Figura 8 - Quadro de comparação entre os estágios básicos da atividade mental na solução de problema propostos por Krutetskii (1976) e as etapas do pensamento elaboradas por Sternberg (2008) 48

Figura 9 - Legenda dos esquemas de representação da teoria dos campos conceituais. 62

Figura 10 - Sistema de pontuação elaborado por Charles variando entre 0 e 30 pontos. 77

Figura 11 - Autopercepção dos estudantes quanto a sua compreensão dos problemas matemáticos 81

Figura 12 - Frequência da utilização de desenhos na solução do problema matemático por ano escolar 82

Figura 13 - Dificuldades apontadas pelos estudantes durante a solução de um problema 83

Figura 14 - Quadro de comparação entre os passos propostos por Polya (2006) e as dificuldades declaradas pelos estudantes 84

Figura 15 - Desempenho dos estudantes segundo o ano escolar 88

Figura 16 - Desempenho dos estudantes segundo número de etapas que sente dificuldades 90

Figura 17 - Desempenho dos estudantes segundo número de etapas que declarou sentir dificuldades 92

Figura 18 - Relação entre as pontuações na Nota e na escala de Charles por ano escolar 93

Figura 19 - Taxa de acerto em cada um dos problemas estudados 94

Figura 20 - Porcentagem de sujeitos segundo a pontuação de Charles em cada um dos problemas 95

Figura 21 – Tipo de representação utilizada na solução em cada um dos problemas 97

Figura 22 - Realizou a redação da resposta em cada um dos problemas 97

Figura 23 - Porcentagem de acerto em cada problema por ano escolar 99

Figura 24 - Porcentagem de acerto no Problema 1, por ano escolar 100

Figura 25 - Extrato da solução do problema 1 pelo estudante E64 101

Figura 26 - Extrato da solução do problema 1 apresentado pela estudante E52: primeiro procedimento apresentado 102

Figura 27 – Quadro de comparação entre os passos propostos por Polya (2006) e o Sistema de Correção elaborado por Charles. 103

Figura 28- Extrato da solução do problema P1 apresentada pelo estudante E2..... 104

Figura 29 - Extrato da solução do problema P1 apresentada pelo estudante E4..... 105

Figura 30 - Extrato da solução do problema 2 elaborado pelo estudante E22..... 109

Figura 31 - Extrato da solução do problema 2 apresentada pelo estudante E55 110

Figura 32 - Extrato da solução do problema 2 apresentada pela estudante E7 111

Figura 33 - Porcentagem de acerto no Problema 3, por ano escolar..... 113

Figura 34 - Extrato da Solução do Problema 3 apresentado pela estudante E7 115

Figura 35 - Extrato da solução do problema 3 apresentada pela estudante E57 116

Figura 36 - Extrato da solução do problema 3 apresentada pela estudante E36 117

Figura 37 - Porcentagem de acerto no Problema 4, por ano escolar..... 119

Figura 38 – Extrato da solução do problema 4 apresentada pelo estudante E55 122

Figura 39 - Extrato da solução do problema 4 apresentada pelo estudante E8..... 122

Figura 40 - Extrato da solução do problema 4 apresentada pelo estudante E25 124

Figura 41 - Extrato da solução do problema 4 apresentada pelo estudante E57 124

Figura 42 – Extrato da solução do problema 4 apresentada pela estudante E28 125

Figura 43 - Extrato da solução do problema 4 apresentada pelo estudante E40 127

Figura 44 - Porcentagem de acerto no Problema 5, por ano escolar..... 127

Figura 45 - Extrato da solução do problema 5 apresentada pelo estudantes E1 129

Figura 46 – Extrato da solução do problema 5 apresentada pelo estudantes E3 130

Figura 47 – Extrato da solução do problema 5 apresentada pelo estudante E10 131

Figura 48 - Extrato da solução do problema 5 apresentada pela estudante E35..... 132

Figura 49 - Extrato da solução do problema 5 apresentada pela estudante E52 132

Figura 50- Porcentagem de acerto no Problema 6, por ano escolar 134

Figura 51 - Extrato da solução do problema P6 apresentada pelo estudante E18 136

Figura 52 - Extrato da solução do problema P6 apresentada pelo estudante E3 137

Figura 53 - Extrato da solução do problema P6 apresentada pelo estudante E57 138

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Distribuição da amostra por idade e gênero, segundo ano escolar 78

Tabela 2 – Relação Idade/ano escolar por gênero segundo ano escolar 79

Tabela 3 - Distribuição da amostra por ano que reprovou segundo o ano cursando 79

Tabela 4 – Ajuda que recebe no estudo de matemática, em função do ano de escolaridade 80

Tabela 5 – Frequência com que o aluno estuda matemática em função da série 81

Tabela 6 - Relação entre a autopercepção da compreensão dos problemas matemáticos com a frequência de estudo 82

Tabela 7 - Dificuldades apontadas pelos estudantes nas etapas da solução de problemas matemáticos por ano escolar 85

Tabela 8 - Dificuldades apontadas pelos estudantes nas etapas da solução de problemas matemáticos associadas às etapas propostas por Polya (2006), por ano escolar 86

Tabela 9 - Distribuição do número de etapas com dificuldades percebidas pelos estudantes, por ano escolar 87

Tabela 10 - Estatísticas relativas ao desempenho dos estudantes por ano escolar 88

Tabela 11- Estatísticas relativas ao desempenho dos estudantes por autopercepção de dificuldades 90

Tabela 12 - Estatísticas relativas ao desempenho dos estudantes na pontuação total na escala de Charles (0 a 30) 91

Tabela 13 - Porcentagem de sujeitos segundo a pontuação de Charles em cada um dos problemas 95

Tabela 14 – Tipo de representação utilizada na solução em cada um dos problemas 96

Tabela 15 - Porcentagem de acerto em cada problema por ano escolar e resultado do teste Qui-quadrado 98

Tabela 16 - Pontuação na escala de Charles no Problema 1, por ano escolar 101

Tabela 17 - Distribuição dos sujeitos de acordo com as fases da Solução de Problemas propostas por Polya (2006) em que os estudantes falharam na solução do problema 1 104

Tabela 18 – Tipo de representação utilizada na solução do Problema 1, por ano escolar 105

Tabela 19 - Redação da resposta do Problema 1, por ano escolar 106

Tabela 20 - Pontuação na escala Charles no Problema 2, por ano escolar 108

Tabela 21 - Distribuição dos sujeitos de acordo com as fases da Solução de Problemas propostas por Polya (2006) em que os estudantes falharam na solução do problema 2 110

Tabela 22 – Tipo de representação utilizada na solução do Problema 2, por ano escolar 111

Tabela 23 - Redação da resposta do Problema 2, por ano escolar..... 112

Tabela 24 - Pontuação na escala de Charles no Problema 3, por ano escolar 114

Tabela 25 - Distribuição dos sujeitos de acordo com as fases da Solução de Problemas propostas por Polya (2006) em que os estudantes falharam na solução do problema 3 116

Tabela 26 – Tipo de representação utilizada na solução do Problema 3, por ano escolar 118

Tabela 27 - Redação da resposta do Problema 3, por ano escolar..... 118

Tabela 28 - Pontuação na escala de Charles no Problema 4, por ano escolar 120

Tabela 29 - Distribuição dos sujeitos de acordo com as fases da Solução de Problemas propostas por Polya (2006) em que os estudantes falharam na solução do problema 4 123

Tabela 30 – Tipo de representação utilizada na solução do Problema 4, por ano escolar 125

Tabela 31 - Redação da resposta do Problema 4, por ano escolar..... 126

Tabela 32- Pontuação na escala de Charles no Problema 5, por ano escolar 129

Tabela 33 - Distribuição dos sujeitos de acordo com as fases da Solução de Problemas propostas por Polya (2006) em que os estudantes falharam na solução do problema 5 131

Tabela 34- Tipo de representação utilizada na solução do Problema 5, por ano escolar..... 133

Tabela 35 - Redação da resposta do Problema 5, por ano escolar..... 134

Tabela 36 - Pontuação na escala de Charles no Problema 6, por ano escolar 136

Tabela 37 - Distribuição dos sujeitos de acordo com as fases da Solução de Problemas propostas por Polya (2006) em que os estudantes falharam na solução do problema 6 138

Tabela 38 - Tipo de Representação utilizada na solução do Problema 6, por ano escolar 139

Tabela 39 – Redação da resposta do Problema 6, por ano escolar..... 139

Tabela 40 - Os procedimentos utilizados pelos estudantes durante a solução de problemas..... 141

Tabela 41 - Dificuldades apresentadas pelos estudantes durante a solução de problemas..... 143

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **15**

I- REVISÃO DA LITERATURA **20**

II- FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA **42**

III- PROCEDIMENTOS, MATERIAIS E MÉTODO **69**

SUJEITOS **69**

INSTRUMENTOS **71**

PROCEDIMENTO DE COLETA DE DADOS **75**

PROCEDIMENTO DE CORREÇÃO E ANÁLISE **76**

IV- ANÁLISE DE DADOS **78**

4.1 PERFIL DOS SUJEITOS **78**

4.2 ANÁLISE DO DESEMPENHO DOS ESTUDANTES **87**

4.3 ANÁLISE DO DESEMPENHO POR PROBLEMA **93**

4.3.1 ANÁLISE DO DESEMPENHO POR PROBLEMA DE FORMA COMPARATIVA GLOBAL 93

4.3.2 ANÁLISE DO DESEMPENHO DOS ESTUDANTES POR PROBLEMA E ANO ESCOLAR 98

V- CONSIDERAÇÕES FINAIS **140**

REFERÊNCIAS **145**

INTRODUÇÃO

Apresentamos neste trabalho uma discussão que buscou investigar o desempenho dos estudantes da educação básica em relação a duas proposições frequentemente presentes quando se fala em educação das séries iniciais: solução de problemas e estruturas aditivas.

A temática da solução de problemas surgiu como preocupação no decorrer da minha trajetória acadêmica que teve início no ano de 2005. A graduação me ofereceu um panorama geral sobre a educação em seus aspectos: filosófico, sociológico e psicológico.

Com relação às práticas pedagógicas voltadas para a educação infantil e ensino fundamental, as disciplinas, seminários e discussões em sua maioria privilegiavam a área de Língua Portuguesa e pouco se discutia acerca da Educação Matemática. Consequentemente, percebia ali as lacunas no processo de formação inicial, e antevia que tudo isso me faria falta quando estivesse no exercício da minha profissão.

A respeito da formação do professor Dewey (apud Westbrook, 2010) destacou a importância dos professores serem bem capacitados, plenamente conhecedores da disciplina ensinada. Além de contarem com a formação em Psicologia da criança e serem capacitados em técnicas destinadas a propiciar estímulos necessários à criança, para que o conhecimento faça parte de sua experiência. Nesta perspectiva, dois dos educadores que trabalharam com Dewey em suas pesquisas acreditavam que um professor com essa formação teria condições de ver o mundo com os olhos de criança e com os de adulto. O excerto abaixo elucida esse pensamento:

> Como Alice, a professora tem de passar com as crianças pelo espelho e ver, com as lentes da imaginação, todas as coisas, sem sair dos limites de sua experiência, mas, em caso de necessidade, tem de recuperar sua visão corrigida e proporcionar, com o ponto de vista realista do adulto, a orientação do saber e os instrumentos do método (MAYHEW; EDWARDS apud WESTBROOK, 2010, p. 19).

No ano de 2010 teve início a minha trajetória docente, marcada por um "desassossego[1]" que pode ser retratado nas "inquietações" presentes na vida de um

[1] Recordo-me das aulas de Sociologia com o Prof. Dr.Romualdo Dias citando o sociólogo Boaventura Sousa Santos.

professor alfabetizador principiante, pois, pensando na alfabetização e letramento da língua materna, de certa forma, ainda que restrito havia um repertório com algumas possibilidades de ação e intervenção. Por outro lado, em relação à alfabetização matemática meu repertório não se diferenciava muito das minhas vivências enquanto estudante das séries iniciais. Ou seja, a Educação Matemática representava um desafio ainda maior pelo fato de perceber as lacunas da minha formação inicial, além das dificuldades e defasagens percebidas nos estudantes das séries iniciais. Dessa forma, ao contrário da proposta de Dewey pela minha formação acadêmica não era possível "passar pelo espelho" juntamente com meus alunos, uma vez que não conhecia plenamente a disciplina que iria ministrar, tão pouco dominava as técnicas necessárias para o ensino dela.

Neste sentido, Dewey (apud Westbrook, 2010) admitiu que a maioria dos educadores não possuíam conhecimentos teóricos e práticos que são necessários para ensinar de acordo com à analogia da "Alice através do espelho", todavia, considerava que os educadores podiam aprender e fazê-lo. E no ensejo de aprender para dominar os conteúdos da disciplina que a partir daquele momento ministraria, as primeiras aproximações com a Educação Matemática foi por meio do livro: "*A Educação Matemática e a construção do número: uma experiência em diferentes contextos sócioeconômico*". Foi a partir da leitura desse livro que percebi o quanto meu ensino de matemática tinha privilegiado o ensino arbitrário e mecânico das "continhas", pois, mesmo antes de entender e compreender os conceitos de dezena e unidade já realizava as continhas "deitadas" e "em pé".

Consequentemente, tive também minha iniciação com a temática da solução de problemas por meio dos seguintes textos: *Aritmética no ensino fundamental* (FINI, 2001); *Formulação e solução de problemas aritméticos de enredo: inventando e resolvendo problemas* (informação verbal)[2]; *Intervenção psicopedagógica e resolução de problemas: trabalho em grupos e histórias em quadrinhos* (informação verbal)[3]. Acrescentando- se

[2] Texto fornecido pela Prof.Dra. Lucila Diehl Tolaine Fini em uma disciplina ministrada no Curso de Especialização: Psicopedagogia Construtivista, na Faculdade de Educação da Unicamp, em 2012.

[3] Texto fornecido pela Prof.Dra. Lucila Diehl Tolaine Fini em uma disciplina ministrada no Curso de Especialização: Psicopedagogia Construtivista, na Faculdade de Educação da Unicamp, em 2012.

ainda nesta lista algumas leituras acerca dos campos conceituais aditivos e multiplicativos pautados nas ideias de Gerard Vergnaud.

Ainda no ano de 2015 ingressei no Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da Unicamp, no grupo de Pesquisa de Psicologia e Educação Matemática – PSIEM. O ingresso na pós graduação representou a possibilidade de buscar respostas para algumas inquietações presentes desde a graduação. Além de propiciar o contato com pesquisas e estudos desenvolvidos acerca da solução de problemas e das estruturas aditivas.

A solução de problemas, bem como o ensino pautado nela, passou a ser mais enfatizada na década de 1980 como uma das recomendações de autores norte americanos do *National Council of Theachers of Mathematics* (NCTM), cuja ênfase dada era a importância da solução de problemas matemáticos, considerada como o foco central do processo de ensino e aprendizagem da matemática.

No Brasil, em consonância com o NCTM, foram elaborados os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998), que abordam a solução de problemas como propulsora da ação refletida que constrói conhecimentos. E recentemente tivemos a publicação da Base Nacional Curricular Comum – BNCC (BRASIL, 2017), que preconiza a importância do saber matemático não se restringir ao conhecimento da terminologia, dos dados e dos procedimentos. Enfatizando que os alunos devem conseguir combinar todos esses elementos para atender necessidades do cotidiano. Dentre vários elementos novos trazidos pela proposta, destaca-se o letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de forma a favorecer a formulação e resolução de problemas em uma variedade de contextos. No que diz respeito à solução de problemas, o documento a reconhece como sendo um *processo matemático* que exprime uma forma privilegiada da atividade matemática.

Sabemos que a adição e a subtração são normalmente ensinadas às crianças um bom tempo antes de outras operações aritméticas. Ao ingressar na primeira série, a maior parte das crianças já tem capacidade de coordenar os esquemas de juntar e separar com a contagem, com efeito, solucionam uma diversidade de problemas que envolvem as relações entre o todo e suas partes. Entretanto elas têm muito a aprender e entender

sobre estas duas operações básicas da matemática (NUNES, 1997; NUNES, CAMPOS, MAGINA e BRYANT, 2009).

Trabalhando com solução de problemas com alunos das séries iniciais do ensino fundamental, tem-se a impressão que, à medida que a escolaridade avança, proporcionalmente aumenta a preocupação dos estudantes em relação a “conta”, isto é, o cálculo numérico a ser executado. Quando se trata dos estudantes dos 4º e 5º anos que, em sua maioria já lêem com autonomia, muitas vezes, antes mesmo de ler o problema surge a pergunta: *Professora é conta de mais ou de menos?*

E essa dificuldade apresentada pelos estudantes fica evidenciada nos resultados apresentados pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB, que tem como principal objetivo avaliar a educação básica do país. Cabe destacar que o SAEB se constitui em um dos indicadores possíveis de avaliar o desempenho dos estudantes, não sendo considerado o único, tampouco substituindo as avaliações realizadas em cada sala de aula. A série histórica do SAEB de 1995 a 2015, apontou que o Ensino Fundamental nos anos iniciais e finais, no que concerne à área da Matemática, tem apresentado avanços, todavia, isso não se confirma no tocante à solução de problemas. Ainda que esse assunto tenha provocado muitos debates no âmbito educacional, pelos resultados das avaliações externas não é possível compreendermos o baixo desempenho dos estudantes de maneira mais aprofundada, ou seja, as razões para as dificuldades.

Ante o exposto, nos perguntamos o por quê crianças do 4º e 5º anos de escolaridade ainda apresentam dificuldades na solução de problemas? Por que os avanços de desempenho em relação à solução de problemas são tão sutis?

Essas indagações têm permeado o ambiente escolar e fomentado discussões acerca da promoção de políticas públicas que visem uma melhora no ensino público e também têm sido pauta de pesquisas que discutem a importância da formação continuada do professor, entre elas, Etcheverria, Campos e Silva (2015); Santana, Alves e Nunes (2015) e Justo e Dorneles (2010).

Com base no exposto e reconhecendo a existência de dificuldades por parte dos estudantes na solução de problemas matemáticos, foi elaborada a seguinte questão de pesquisa:

Quais as relações entre desempenho e etapas da solução de problemas de estrutura aditiva?

Partindo desse questionamento elaboramos dois instrumentos que atendessem aos objetivos propostos da pesquisa, a saber:

- Verificar os procedimentos que os estudantes utilizam para solucionar problemas matemáticos de estruturas aditivas;
- Analisar se existe diferença de desempenho entre as crianças na solução de problemas de estrutura aditiva relacionada ao ano de escolaridade;
- Identificar dentre as etapas da solução de problemas, proposta por Polya, em quais delas os estudantes apresentam maior dificuldade;

O presente trabalho foi organizado em cinco capítulos. No primeiro apresento uma revisão da literatura sobre estudos que se basearam no campo conceitual das estruturas aditivas.

O Capítulo II reuniu componentes teóricos a respeito da solução de problemas aritméticos, como também a Teoria dos Campos Conceituais das Estruturas Aditivas.

O Capítulo III, foi destinado à explicitação do método, descrevo o problema de pesquisa, os objetivos, o lócus da pesquisa, os sujeitos e os procedimentos referentes à coleta de dados.

No capítulo IV é apresentada a análise dos resultados do teste de matemática, contando com o suporte do software SPSS para análise estatística. Além da análise qualitativa que foi pautada nos protocolos e procedimentos apresentados pelos estudantes.

No último capítulo são apresentadas as considerações finais, com os resultados e a retomada dos objetivos de pesquisa propostos.

I- REVISÃO DA LITERATURA

O presente trabalho tem como proposição central o estudo das questões concernentes à solução de problemas aritméticos de estruturas aditivas. A partir dessa proposta, a revisão buscou analisar estudos e pesquisas que tratavam desta temática, admitindo como um de seus referenciais teóricos a Teoria dos Campos Conceituais, em especial as estruturas aditivas, com foco nos estudantes das séries iniciais do Ensino Fundamental. A busca foi realizada, dentre outras fontes, nas bases de dados Education Resources Information Center – ERIC; Scientific Electronic Library Online – SCIELO; banco de teses e dissertações das Universidade de São Paulo, Universidade Estadual de Campinas e Universidade Estadual Paulista. Para fins dessa pesquisa foram incluídos artigos publicados entre 2005 e 2015.

Com o objetivo de descrever a natureza do processo infantil na construção de relações aditivo-subtrativas, Moro e Soares (2006) submeteram seis alunos de 1ª e 2ª séries (7 a 10 anos de idade), agrupados ao acaso, em duas tríades, a uma sequência de tarefas que consistiu em igualar duas parcelas desiguais de uma adição. Para a realização da tarefa foram disponibilizados os seguintes materiais: uma coleção de 20 fichas de plástico (mesma cor), uma caixa de papelão com uma divisória repartindo-a em duas metades, dois bonecos, folhas de cartolina e canetas hidrocor.

Cada criança da tríade, na sua vez compunha parcelas não equivalentes de uma adição conforme demonstrado por Moro e Soares (2006, p.144) *"(...) para parcelas de 5 e 15 elementos... é para descobrir quantas balas têm para cada boneco..., e... descobrir quantos este (boneco) tem a mais..., ou a menos que o outro..."* pode-se inferir que a criança distribuiu as fichas de plástico ao acaso entre os dois bonecos, em seguida juntamente com os demais integrantes da tríade identificavam e comparavam a quantidade entregue a cada boneco.

Adiante, era solicitada a tríade que igualasse a quantidade de objetos das duas parcelas, como descrito por Moro e Soares (2006, p.144) "*agora, o que vocês vão fazer para os dois bonecos ficarem com a mesma quantidade igual de balas?...,... por que ficou a mesma quantidade?*". Para o registro, as tríades receberam cartolina, e eram convidadas a marcar, desenhar, escrever com números, do jeito que quisessem. Pouco depois, as crianças eram convidadas a interpretar suas produções.

Os resultados referentes às realizações das crianças apontam quatro patamares de construção, a saber: a quantificação de coleções indicando onde tem mais e onde tem menos, conforme apresentado por Moro e Soares (2006) Sue (7;4, 1ª série) (para 5 e 9 fichas) *"Sue, você viu, contou aqui tudo o que tinha?; Sue (olha as coleções); Olhe o que tem, quem é que tem mais agora?; Sue: A boneca.; E quem tem menos?; Sue: O boneco."* O segundo patamar trata da quantificação de coleções apontando que parcelas aumentam quando fichas são colocadas ou diminuem quando fichas são tiradas, por exemplo:

> *Deb (7;3, 1ª série) (para 5 e 8 fichas , igualizadas para 6 e 6) (tira 1 ficha de uma parcela, logo, 6-1=5)... seis, tem que tira uma, fica menos...(olha fichas) cinco. (põe 1 de volta, 5+1=6)...fica mais (aponta fichas)... agora oito, não, seis. (MORO e SOARES, 2006, p.146)*

O terceiro patamar é caracterizado pela quantificação das coleções como parcelas, assinalando que parcelas são comparáveis, isto é, tem mais ou tem menos e podem ser modificadas por acréscimos e retiradas de 1 ou 2 elementos. Por último Moro e Soares (2006) descrevem a quantificação de parcelas, cujas relações aditivo-subtrativas têm caráter de relações inversas e estão pautadas no apoio empírico, conforme segue:

> *We (8;10, 2ª série) (para 4 e 12): ...aqui (12) tem mais que lá (4); exp.: Quantos que ela tem muito mais que ele?; We (olhando fichas, estica dedos) Oito, tem oito a mais... (aponta boneco)... oito a menos; (com a igualização das parcelas, com Vi, por retiradas e acréscimos 1 a 1, logo, 8 e 8), We: Cada um com oito agora... em tudo dezesseis. (MORO e SOARES, 2006, pp.146-147)*

O estudo citado, ainda, concluiu que há sinais de que a origem e desenvolvimento das relações aditivo-subtrativas, tal como as trabalhadas nas tarefas estão interligadas ao processo de construção do número, quer dizer, são resultados que respaldam a proposição das autoras de haver uma intricada relação entre a elaboração progressiva de adições e subtrações e a construção do número (MORO e SOARES, 2006).

Moro e Soares (2006) também analisaram as notações de acordo com a produção e interpretação pelas crianças, apontando a descrição de quatro patamares relativos à representação notacional, a saber: reprodução notacional mecanizada, sem qualquer significação numérica aditiva e/ou subtrativa; reprodução notacional em partes mecanizada: que consistiu em algarismos, escritas alfabéticas, expressões aritméticas, sem necessariamente serem adicionáveis; produção notacional intencional de resultados numéricos, neste patamar os estudantes já produziram algarismos com significado

numérico, por último, produção notacional intencional de resultados numéricos com as ações de adicionar e/ou retirar.

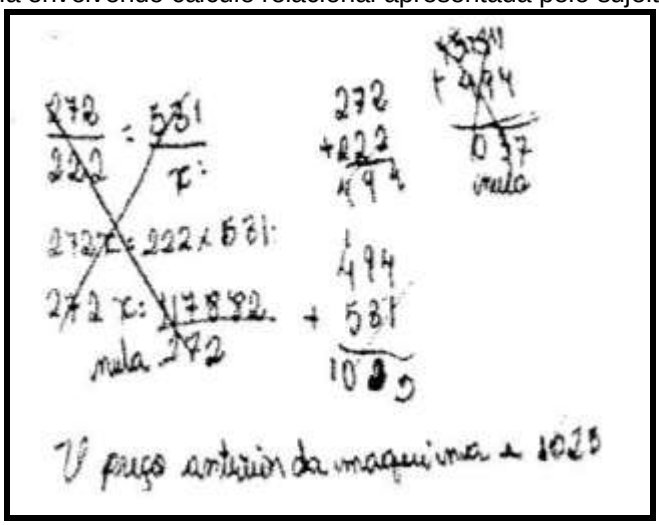
Sobre a representação notacional, a pesquisa realizada por Koch e Soares (2005) buscou interpretar as notações dos estudantes de uma turma da 6ª série, em uma escola pública da periferia de Londrina, quando estes resolviam problemas de estrutura aditiva. Os estudantes foram submetidos a um teste matemático com quatro problemas, e foram orientados a solucioná-los com canetas coloridas, de forma, a deixar registradas todas as suas tentativas de solução. Os resultados expressaram os diversos tipos de notação utilizados, tais como: desenhos, diagramas, reta numérica, alguns cálculos numéricos escolares (as “contas em pé”, ou “deitadas”, expressões numéricas, como uso de parênteses ou não), quantidades representadas por números inteiros, positivos e negativos.

O estudo apontou ainda que apesar de na sexta série, os conteúdos ensinados poderem ser representados no plano das equações numéricas e cálculo algébrico, isto é, geralmente em sentenças matemáticas, expressões numéricas e equações, neste estudo, raramente, foram encontradas essas representações, ainda que o mesmo tenha sido realizado no final do ano letivo. Ademais as autoras evidenciaram que a maioria dos estudantes da 6ª série, por mais que dominassem várias competências matemáticas relativas às situações de estrutura aditiva, ainda não as haviam consolidado, seja no que se refere aos cálculos relacionais necessários, seja no que se refere aos diversos sistemas de notação que lhes são pertinentes.

Quando se fala em dificuldades nos cálculos relacionais, evidencia-se as dificuldades inerentes às operações do pensamento necessárias para que haja a manipulação das relações envolvidas na situação, exemplificado por Koch e Soares (2005) na análise da solução de um problema pela estudante denominada “*AL*”. O enredo do problema era: *Ao fazer uma promoção, o gerente de uma loja baixou na mesma quantia, o preço de várias mercadorias. Num dia, um fogão que custava R$ 272,00, passou a custar R$ 222,00, e uma máquina de lavar roupas, passou a custar R$ 531,00. Qual o preço anterior da máquina?*

A Figura 1 apresenta a solução do problema pelo sujeito AL, que pela análise do protocolo indicou dificuldade com o cálculo relacional que o problema exigia.

Figura 1 - Solução do problema envolvendo cálculo relacional apresentada pelo sujeito AL



Fonte: Koch e Soares, 2005, p. 152

O cálculo relacional consistia na diferença entre o valor “que o fogão custava” e o que ele “passou a custar” que deveria inicialmente ter sido identificado pela estudante. As autoras ressaltam ainda, que a tentativa de usar a proporcionalidade como recurso para solucionar o problema, pode ter ocorrido pois esse era um conteúdo que estava sendo estudado na escola.

Considerando a importância de se conhecer as raízes das dificuldades na aprendizagem de matemática, em especial, das estruturas aditivas, vários pesquisadores desenvolveram estudos diagnósticos acerca do domínio das estruturas aditivas.

Com o objetivo de verificar o domínio das estruturas aditivas, em dois contextos diferentes, para subsidiar uma proposta de formação de professores, Mendonça, Pinto, Cazorla e Ribeiro (2007) e Santana, Cazorla e Campos (2007) realizaram um estudo diagnóstico com 1803 estudantes da 1ª a 4ª série, de escolas públicas dos estados de São Paulo e da Bahia.

O primeiro estudo foi realizado em São Paulo, entre os anos de 1997 e 1998, com 782 estudantes que cursavam entre a 1ª e 4ª série do ensino fundamental, de escolas públicas. Os sujeitos foram submetidos a um instrumento diagnóstico, do tipo lápis e papel, composto por 12 problemas de estruturas aditivas utilizando valores numéricos pequenos.

O segundo estudo foi uma reaplicação do primeiro estudo, sendo realizado no estado da Bahia por Santana et al (2007), no ano de 2005 e envolveu 1021 estudantes

que cursavam entre a 1ª e 4ª série do ensino fundamental, de 26 escolas públicas de seis municípios.

Os dados obtidos confirmaram a tendência crescente da taxa de acertos ao longo da instrução, ainda que, em patamares e ritmos diferenciados nos dois estados. Os estudantes de São Paulo partiram de um patamar de 64,6% na primeira série e alcançaram um patamar de 89,3% de acertos na quarta série. Por outro lado, os estudantes da Bahia partiram de um patamar de 52% na primeira série e chegaram a 65,4% na quarta série. Observou-se, ainda, que em todas as séries, em média, os estudantes de São Paulo responderam mais questões que os estudantes da Bahia.

Os resultados mostraram, ainda, que um problema envolvendo uma transformação aditiva com transformação desconhecida foi o que apresentou maior dificuldade, em ambos os estados, o problema tinha o seguinte enunciado: "*Carlos tinha 4 bolas de gude. Ganhou algumas e agora ele tem 10 bolas de gude. Quantas bolas ele ganhou?* São dados os estados inicial (quatro) e final (dez) e pedia-se a transformação desconhecida, que nesse caso consistiu em uma transformação aditiva: "ganhou algumas". As autoras sugerem que essa dificuldade, provavelmente, procedeu da incongruência semântica entre a palavra ganhou e a operação de subtração.

Além disso, os resultados revelaram que o segundo problema mais difícil para os alunos de ambos os estados pertencia a categoria de comparação com referente e referido conhecidos, porém, com relação negativa desconhecida, isto é, estabelecia uma relação entre duas quantidades, uma denominada de referente e a outra de referido. O referente é a quantidade a qual é tomada como referência para estabelecer a relação, e o referido é a quantidade que se obtém após estabelecer a respectiva relação, a saber: "*Ana tem 8 reais. Carlos tem 12 reais. Quem tem menos reais? Quantos reais a menos*?". Nesse exemplo, *Ana tem 8 reais* (referente), *Carlos tem 12 reais* (referido) e -*Quem tem menos reais?* (relação). A primeira vista, esse problema não deveria oferecer dificuldades, uma vez que, seu enunciado traz de forma explícita a palavra chave "a menos", ao contrário, do problema descrito anteriormente que culminava na incongruência semântica. As autoras apontaram para duas possíveis razões para este baixo desempenho: a presença de duas perguntas simultaneamente e o estado inicial ter sido menor do que o estado final.

Destaca-se, ainda, o contexto sócio-econômico e cultural como sendo um fator a se considerar nesses resultados. Os estudantes e professores que participaram do estudo em São Paulo têm uma acessibilidade maior ao conhecimento e aos bens culturais, além de ser o estado mais industrializado. No entanto, os alunos e professores que participaram do estudo na Bahia eram procedentes de pequenas cidades, eminentemente agrícolas, arrasadas economicamente, em decorrência do declínio da lavoura cacaueira e não raro, sem acesso ao livro didático.

Moretti e Brandt (2014), pesquisaram as dificuldades dos alunos na solução de problemas aditivos de acordo com as categorias elencadas por Vergnaud, à luz da Teoria de Representações Semióticas de Raymond Duval, no que se refere, ao fenômeno da congruência semântica. Segundo os autores, Duval concentra seus estudos na aprendizagem matemática propondo que para o estudo da atividade cognitiva é indispensável levar em consideração a importância das representações semióticas presentes na matemática. Dessa forma, os objetos matemáticos não são diretamente observáveis, isto é, eles não têm existência física e sua apreensão só é possível por meio de registros de representação e pela existência de uma grande variedade de representações semióticas possíveis de serem utilizadas, a saber: a linguagem natural, gráficos, linguagem algébrica, figuras geométricas, entre outras.

No que diz respeito à congruência semântica, os autores buscaram identificar as relações de congruência entre as formas verbais utilizadas nas mensagens discursivas dos problemas propostos e as operações aritméticas correspondentes. Vejamos um exemplo que poderá nos ajudar a entender melhor o caso da congruência semântica apresentada por Duval:

Maurício tinha 8 bolas. Em seguida deu 5 para Eduardo. Quantas bolas Maurício tem agora?

Nesse exemplo, os autores destacaram a identidade entre a frase e a expressão 8-5, onde o verbo “deu” poderia ser facilmente associado à operação de subtração. Nota-se ainda que, os dados numéricos da sentença matemática correspondiam, na mesma ordem, aos dados apresentados no problema em língua materna. Assim, podemos dizer que existe congruência semântica entre a frase e a expressão aritmética.

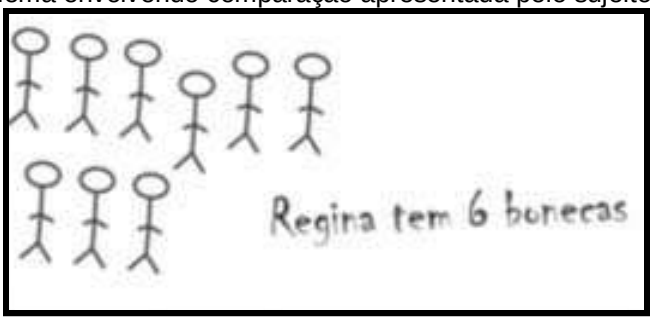
Nesse sentido, a fim de cumprir o objetivo proposto, 132 sujeitos do 5º ano do Ensino Fundamental, de duas escolas municipais responderam a uma prova com 14

problemas do campo aditivo cujas soluções exigiam uma única operação aritmética. A análise dos dados mostrou que os problemas que possuíam as expressões “ter a mais” ou “ter a menos”, mas que operação exigida para a solução correta era, respectivamente, a subtração e adição, tendiam a apresentar um nível baixo de desempenho. A este respeito Vergnaud (apud MORETTI E BRANDT, 2014) destacou a influência dos fatores semânticos a fim de explicar os sucessos ou fracassos dos alunos na solução de problemas.

Ainda sobre esse apontamento, os autores apresentaram um paralelo entre duas situações-problema propostas aos estudantes. No primeiro problema foi registrado um índice de acerto de 97%, seu enunciado era o seguinte: *Rita tem 8 gibis da Turma da Mônica. Cássia tem 5. Quantos gibis Cássia tem a menos que Rita?* Trata-se de um problema de comparação semanticamente congruente, uma vez que a expressão “tem a menos” leva à operação de subtração que era considerada a correta para a solução do problema. Por outro lado, o problema: *Márcia tem 9 bonecas. Ela tem 3 a menos que Luciana. Quantas bonecas tem Luciana?* registrou um índice de acerto de 56% , nesse caso a expressão “tem a menos” provavelmente induziu os estudantes a utilizarem à operação de subtração que era incorreta para a solução do problema.

Os resultados evidenciaram, ainda, que os estudantes que utilizaram representações intermediárias (desenhos e esquemas) tiveram sucesso na solução dos problemas, já que as mesmas facilitaram o tratamento semântico dos dados, diminuindo as interpretações errôneas. Observe a solução apresentada pelo sujeito *A2* para o seguinte problema: *Maria tem 9 bonecas. Regina tem algumas bonecas. Ela tem 3 bonecas a menos que Maria. Quantas bonecas tem Regina?* conforme demonstrado por Moretti e Brandt (2014, p.571)

Figura 2- Solução do problema envolvendo comparação apresentada pelo sujeito A2



Fonte: Moretti e Brandt, 2014, p.571

Os autores observaram que o aluno representou a totalidade de bonecas e pela representação auxiliar (desenho) foi possível supor que ele retirou 3, consequentemente, obtendo a quantia correta que Regina possuía de bonecas.

A julgar pelos resultados obtidos nesse estudo os autores apontaram, ainda, a existência de uma lacuna na formação dos professores, no campo conceitual das estruturas aditivas. Diante disso, é necessário promover a intervenção, em sala de aula, levando-se em conta a maneira como os referidos problemas são apresentados aos alunos. Com efeito, a superação dos fracassos na solução desses problemas depende da ajuda do professor. Os pesquisadores sugerem que essa intervenção possa contar com a compreensão do fenômeno de congruência semântica, visto que, esse quadro teórico se mostrou adequado para a interpretação das dificuldades, e possivelmente aponte para caminhos de superação.

Ainda com relação à investigação sobre o domínio das estruturas aditivas, pode-se citar os estudos de Santana et al (2009) e Magina e Campos (2004).

Santana, Cazorla, Oliveira (2009) realizaram a pesquisa em duas escolas públicas na região Sul da Bahia – cidade de Itabuna, com uma turma de 38 estudantes da 5ª série do ensino fundamental com idades variando de 10 a 14 anos, sendo que a maioria dos estudantes tinha entre 11 e 12 anos. Os sujeitos foram submetidos a um teste, do tipo lápis e papel, contendo dez situações-problema de adição e subtração adaptadas de livros didáticos da 5ª série. Na análise dos dados não foram encontradas diferenças significativas no desempenho médio de acordo com o gênero, mas sim por idade, sendo que os estudantes na idade indicada para a série (11 e 12 anos) tiveram um desempenho superior aos que apresentavam defasagem série-idade.

Os resultados mostraram que as situações nas quais a taxa de acerto foi baixa, possivelmente, a razão foi a falta de compreensão do problema, havendo uma concentração dos erros ligados aos cálculos relacionais envolvidos nas situações propostas. Pode-se mencionar, por exemplo, a quinta situação problema que compreendia relações de comparação e apenas 10,5% responderam de forma correta. No enunciado constava: "*Comprei três objetos. O primeiro custou R$ 205,00; o segundo custou R$123,00 a mais que o primeiro, e o terceiro, custou R$187,00 a mais do que o segundo. Quanto gastei ao todo?"* Os pesquisadores apontaram que já era esperado um

baixo desempenho dos estudantes nesse problema, tendo em vista a complexidade, além de ser um tipo de problema pouco trabalhado em sala de aula.

A maior parte dos estudantes (79%) não conseguiu compreender as relações de comparação estabelecida na relação, erraram no cálculo relacional, isto é, somaram os três valores, que na verdade correspondia ao preço do terceiro objeto, ignorando o fato de que era necessário encontrar o valor do segundo objeto e posteriormente o valor total da compra.

A pesquisa também observou que a taxa de acerto caía substancialmente quando os problemas envolviam números aplicados aos contextos espacial ou temporal (horas ou anos), como apresentado por Santana et al (2009) na sexta situação-problema sob o enunciado: “Dois amigos saíram da mesma casa, cada um foi para um lado. Marcelo andou 3 Km para um lado e Rose andou 5 Km para o outro lado. Qual é a distância que um teria de caminhar para chegar ao outro? Nesse problema a taxa de acerto foi de 34,2%. A maioria (52,6%) dos estudantes subtraiu as distâncias ao invés de adicionar, os pesquisadores apontaram para a possibilidade desses estudantes terem imaginado a casa como um referencial e a partir dela uma distância de 3 Km para um lado e outra de 5 Km para o outro. Dessa forma, as distâncias caminhadas estariam em sentidos opostos, o que poderia justificar à operação de subtração, quer dizer, a diferença entre as distâncias percorridas era o que faltava para chegar ao outro.

Os pesquisadores verificaram ainda que as duas maiores taxas de acertos ocorreram com situações-problema consideradas protótipos, que, segundo a teoria proposta por Vergnaud , são situações intuitivas e menos complexas. A primeira situação pertencia a categoria de composição, onde foram dadas as duas partes e se pedia o valor do todo, conforme constava no enunciado: “*Uma empresa tem 1748 pessoas trabalhando na sua fábrica e 566 trabalhando no escritório. Quantas pessoas trabalham nessa empresa?* A taxa de acerto foi de 84,2%, embora se esperasse que todos os estudantes conseguissem responder de forma correta

A segunda situação-problema era: “*Fazendo seus exercícios diários, Beto correu 2570 metros no sábado. No domingo, ele correu 750 metros a mais. Quantos metros Beto correu no domingo?* A taxa de acerto foi de 81,5% e tratava-se de uma situação protótipo de transformação, ou seja, (+750) operando sobre uma medida (2570) resultando em outra, que na ocasião proposta foi 3.320. Em consonância com os resultados obtidos por

Moretti e Brandt (2014), as autoras apontaram que nessa situação a expressão “a mais” apresentou congruência com a operação a ser realizada (adição), provavelmente essa congruência tenha tido um efeito direto no bom desempenho dos estudantes.

A este respeito Echeverria (1998) destacou que a maneira de expressar o problema pode evidenciar certas ambiguidades linguísticas ou semânticas e, desta forma, podem motivar diferentes formas de compreender um mesmo problema, ou seja, neste caso, em especial, poderia ocorrer de algumas crianças compreenderem a expressão “a mais”, como na verdade “mais”, isto é ao invés de somar “750” ao valor de “2570”, o estudante consideraria o “750” como a quantidade corrida no domingo.

Considerando os resultados obtidos, Santana et al (2009) puderam inferir que os estudantes da 5ª série, envolvidos nessa pesquisa, demonstraram ter um baixo nível de domínio do Campo Aditivo. Além disso, os autores sugerem que os professores realizem estudos no início do ano escolar, com o propósito de detectar as lacunas presentes no domínio dos conceitos do campo aditivo, de forma a propor ações para reverter esse quadro.

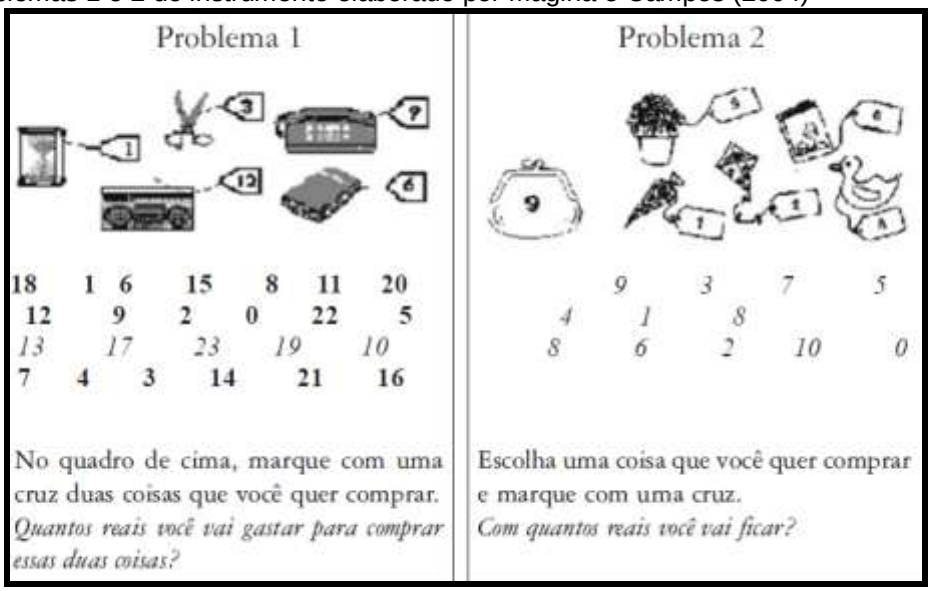
Nesse sentido, um trabalho realizado por Magina e Campos (2004) buscou diagnosticar as competências das crianças em lidar com situações-problema do campo aditivo, desde o início de sua vida escolar, bem como o desempenho das mesmas nas quatro séries iniciais do ensino fundamental. As pesquisadoras submeteram 248 sujeitos, distribuídos em 62 alunos da 1ª série, 63 da 2ª série, 62 da 3ª série e 59 alunos da 4ª série a um teste, composto por 20 situações-problema relativas às quatro operações básicas, sendo que dessas cinco situações eram relativas às estruturas aditivas.

Os resultados indicaram que quanto às competências referentes às estruturas aditivas, as crianças na 1ª série resolveram facilmente problemas de adição e subtração, quando os mesmos tratavam de duas categorias: composição e transformação. A categoria de composição são aqueles problemas em que duas partes se juntam para formar um todo, permitindo diversas variações, isto é, pode se dar o total e uma das partes e perguntar sobre a outra parte. Para efeito desse estudo as pesquisadoras propuseram uma situação de composição onde foram dadas as partes e pedia-se o todo.

Já a categoria de transformação caracteriza-se pelos problemas que têm um estado inicial, uma transformação (positiva ou negativa) e um estado final e nesse estudo o problema solucionado pelos estudantes era considerado um protótipo, ou seja, uma

situação mais simples com estado inicial e a transformação conhecidos e pedia-se o estado final. Abaixo, respectivamente, estão ambas as situações propostas aos sujeitos:

Figura 3 - Problemas 1 e 2 do instrumento elaborado por Magina e Campos (2004)



Fonte: Magina e Campos, 2004, p. 60

No que diz respeito a esses dois problemas Magina e Campos (2004) observaram que os resultados obtidos confirmaram suas hipóteses, considerando que mais de 70% dos alunos da 1ª série não apresentaram dificuldade em solucionar problemas desse tipo, considerados por Vergnaud como protótipos de estrutura aditiva.

O estudo citado ainda concluiu que, embora a evolução das competências estivesse presente em todas as séries, não ocorreram de maneira análoga nas diferentes situações-problema, uma vez que cada uma exigiu o domínio de raciocínios distintos.

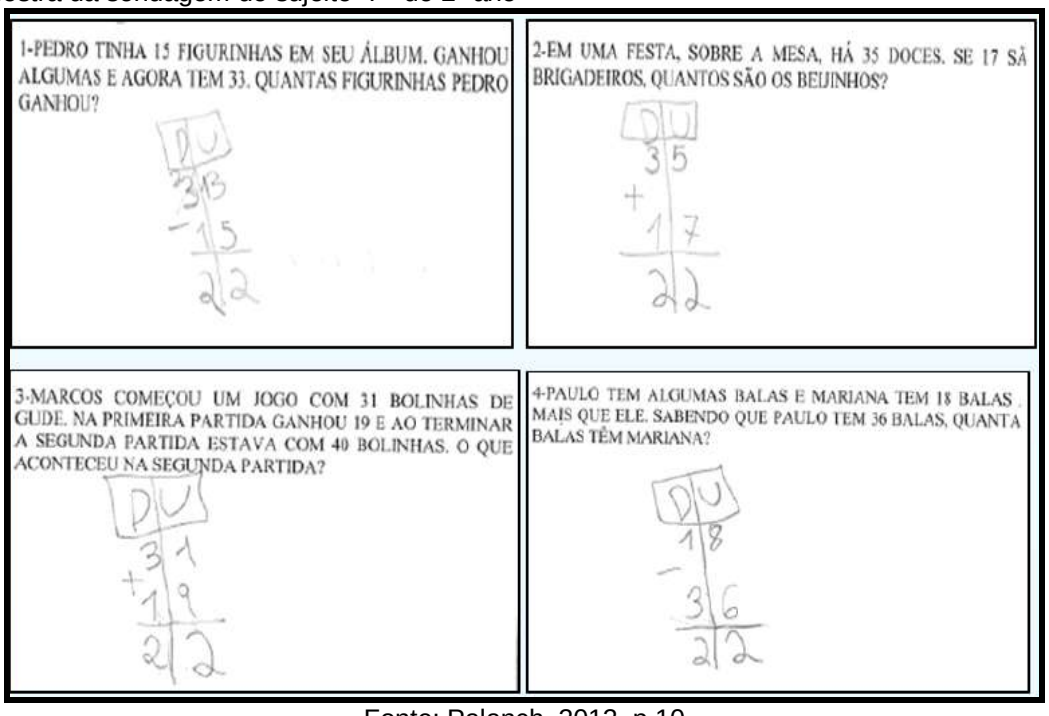
Com o objetivo de mapear os níveis de desenvolvimento do campo conceitual das estruturas aditivas Palanch (2012) realizou uma pesquisa diagnóstica com aproximadamente 10.260 estudantes do 2º ao 4º ano do Ensino Fundamental de 38 escolas da rede municipal de São Paulo. Além de mapear os níveis de desenvolvimento do campo conceitual das estruturas aditivas e as representações utilizadas, foi analisada a forma de avaliação que os professores realizam acerca desse constructo, quer dizer, verificar de que forma o docente compreende os registros das crianças.

A referida sondagem foi composta por quatro questões de estruturas aditivas, sendo uma da categoria composição, uma da transformação, outra da categoria comparação e, por fim, uma da categoria de composição de transformações, empregando

números até a ordem das dezenas. O pesquisador justificou a escolha da sondagem para a coleta de dados por considerar esse um importante instrumento de investigação para a prática docente, na medida em que permite ao professor aprofundar suas reflexões sobre como a criança desenvolve a compreensão de conceitos matemáticos. A tarefa foi aplicada pelos professores responsáveis sendo que os mesmos faziam leitura das questões para as crianças que ainda não estivessem alfabetizadas e, por isso, não realizariam a leitura com autonomia.

O estudo mostrou que o procedimento didático de ensinar primeiramente os cálculos numéricos representados por meio das operações aritméticas, e posteriormente solicitar aos alunos que resolvam os problemas acaba fazendo com que as operações, necessariamente, apareçam na solução, ainda que se evidenciem muitas vezes seu uso arbitrário e mecânico de acordo com a amostra de um aluno do 2º ano descrita por Palanch (2012, p.10).

Figura 4 - Amostra da sondagem do sujeito "P" do 2º ano



Fonte: Palanch, 2012, p.10

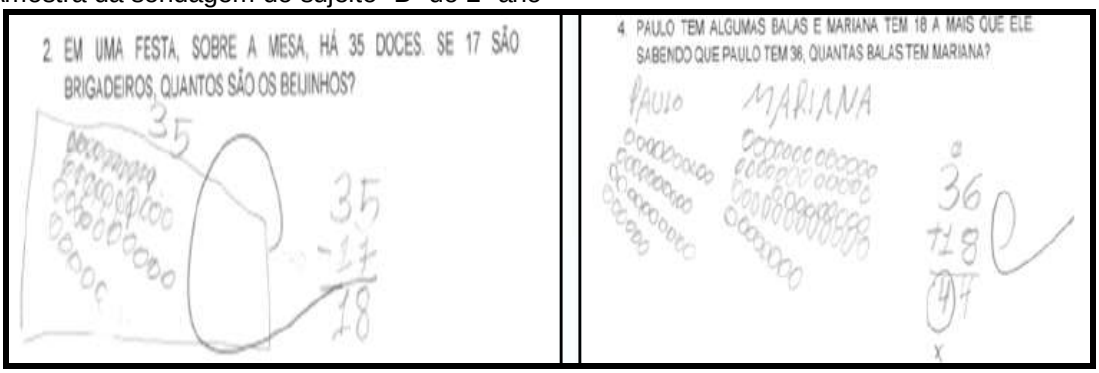
Em sua análise o pesquisador descreveu que o aluno reproduziu o único modelo de solução que conhecia, utilizando os números que apareciam no enunciado sem compreensão do que realmente deveria ser feito. Dessa forma, foi possível inferir que

para esse sujeito, solucionar problemas significava identificar e representar a operação aritmética que lhe parecida adequada.

No que diz respeito a este aspecto, Brito (2006) afirmou que, supostamente, o que ocorre na maior parte do ensino de matemática é um ensino direcionado para os procedimentos prontos e acabados, ou seja, o professor antecipadamente elabora a proposta de solução adequada a cada tipo de problema, restringindo o estudante da busca de formas criativas de solução.

Nesse sentido, Palanch (2012) citando Vergnaud [4] e Duval[5] destacou a importante tarefa do ensino que é propiciar situações nas quais os alunos possam utilizar diferentes maneiras de representar, assim como a passagem de uma maneira para a outra, quer dizer, do desenho para a representação convencional e vice-versa. E dada à importância da criança em se utilizar de diversas representações para encontrar a solução do problema Palanch (2012) apresentou a solução de dois problemas que foi realizada por uma estudante do 2º ano, conforme mostra a Figura 5.

Figura 5 - Amostra da sondagem do sujeito "B" do 2º ano



Fonte: Palanch, 2012, p.9

Pela análise dos registros da criança o autor assinalou que, provavelmente, ela realizou a solução dos problemas inicialmente, através do desenho e depois utilizou a operação aritmética para chegar ao resultado. Todavia, ressaltou que se a estudante

[4] VERGNAUD, G. *El niño, lãs matemáticas y La realidad: problemas de La enseñanza de lãs matemáticas em La escuela primária*. México: Trillas, 1991.

[5] DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. *In*: Machado, S.D.A (Org.). *Aprendizagem em Matemática*. Campinas, SP: Papirus, p. 11-34, 2003.

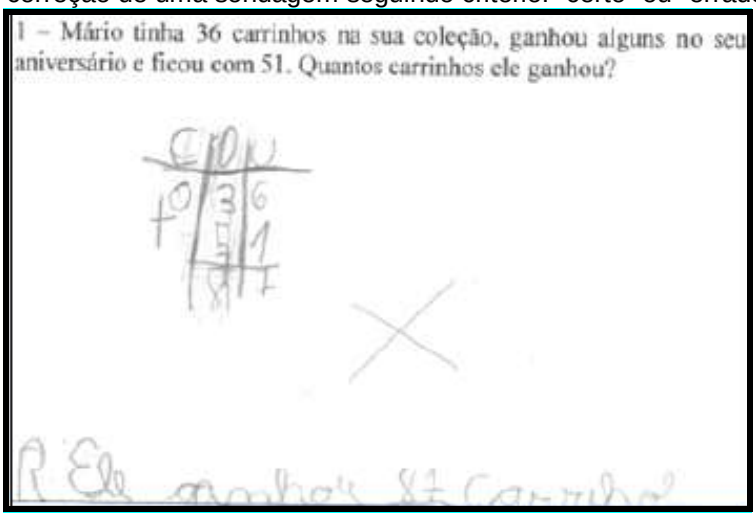
tivesse utilizado unicamente os desenhos teria tido maior êxito nos resultados, pois, em ambos os problemas foi possível constatar erros no procedimento de passagem de uma maneira de representar (desenho) para a operação aritmética, no tocante ao problema de número 2.

O sujeito “B” ao realizar o cálculo numérico “35-17” que se tratava de uma subtração com reserva, conhecida também entre as crianças pela “conta de emprestar” foi possível perceber a possível falha na notação, uma vez que não há registro na ordem da dezena, que houve esse “empréstimo” para a unidade. Todavia, não podemos afirmar categoricamente que isso trata-se de um erro, pois, o sujeito pode ter realizado essa operação mentalmente dispensando os registros convencionais.

Ainda nesse item, o autor concluiu que não se trata de eliminar as operações aritméticas no processo de solução, mas sim possibilitar que os estudantes exibam e registrem seus procedimentos pessoais e avancem tanto no conhecimento dos objetos matemáticos, como também no próprio sistema de representação.

A pesquisa também observou a forma de avaliação dos professores acerca das diversas representações utilizadas pelos estudantes. Os resultados mostraram que em diversas sondagens as respostas dadas pelos alunos, na maioria das vezes, não foram exploradas pelos professores, limitando-se ao certo ou errado, conforme elucidado na figura 6 (PALANCH, 2012, p. 11)

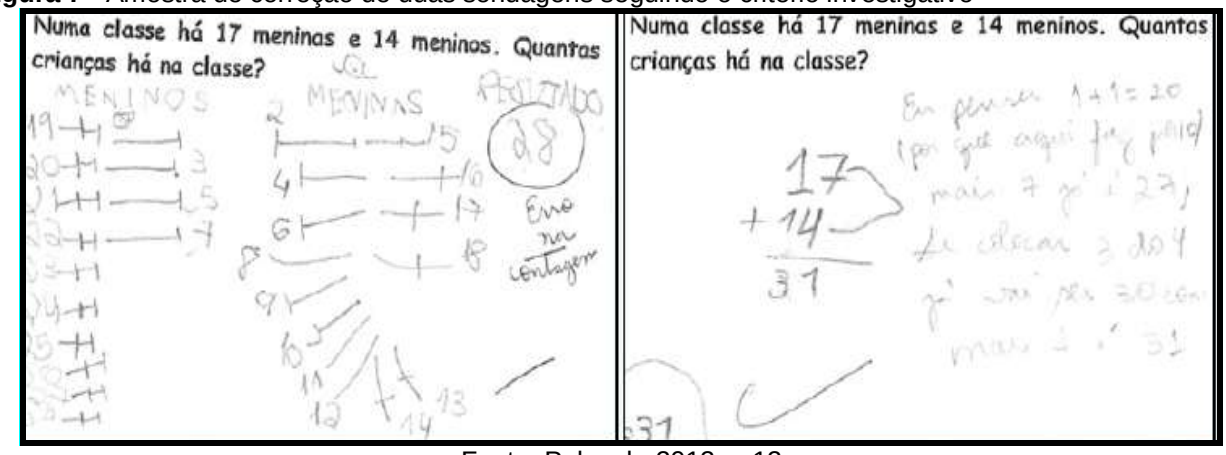
Figura 6 - Amostra de correção de uma sondagem seguindo critério: "certo" ou "errado"



Fonte: Palanch, 2012, p.11

Observou-se que o professor identificou o erro do aluno não procurando compreender a procedência dessa dificuldade e que caminhos o aluno tomou no momento da solução. Ante esses resultados o pesquisador afirmou que para a aprendizagem se tornar mais significativa é de suma importância, que os alunos sejam estimulados a questionar suas respostas, bem como os seus procedimentos de solução. Pois, dessa forma, supostamente desenvolverão habilidades que lhes permitirão questionar os resultados e reavaliar os procedimentos adotados. Nessa perspectiva, Palanch (2012) afirmou que as ações pedagógicas devem ser direcionadas para além da simples constatação do erro, mas para a investigação a partir do erro, conforme elucidado nas sondagens de dois sujeitos da turma do 3º ano.

Figura 7 - Amostra de correção de duas sondagens seguindo o critério investigativo



Fonte: Palanch, 2012, p.12

A este respeito, Taxa (2001) apontou que para Vergnaud nem todos os procedimentos usados pelas crianças, de certa forma, conduzem à solução dos problemas propostos pelo professor. No entanto, tais procedimentos são importantes para se compreender o que elas fazem, e devem ser analisados. Dessa forma, o professor que se propõe, de fato, a investigar os procedimentos dos estudantes pode: identificar os erros na utilização dos dados do problema, saber o que as crianças desconhecem e o que desconsideraram no processo de solução, entre outros.

Palanch (2012) baseado nos resultados da pesquisa sugeriu que a solução de problemas deve compor a grade de atividades permanentes realizadas em sala de aula, onde problemas do campo aditivo como os utilizados na pesquisa sejam oferecidos aos estudantes para serem solucionados de acordo com suas estratégias e que essas, em seguida, sejam socializadas com o intuito de se tornarem objetos de reflexão dos demais alunos. Destacou ainda a necessidade de promover a formação continuada do professor no que tange à apropriação mais significativa da teoria dos campos conceituais de estruturas aditivas.

Nesta perspectiva, os estudos de Etcheverria, Campos e Silva (2015) e Santana, Alves e Nunes (2015), cujo foco foi a formação dos professores, revelaram que a formação continuada ampliou as perspectivas dos professores acerca da natureza de problemas no campo aditivo, possibilitando uma compreensão maior das relações envolvidas nos conceitos.

Etcheverria et al (2015) realizaram um estudo com quatro professoras dos anos iniciais do ensino fundamental, cujo objetivo era identificar e compreender, no contexto de um grupo de discussão, as contribuições de um estudo do Campo Conceitual Aditivo nas aprendizagens matemáticas de professoras dos anos iniciais do ensino fundamental.

Com o propósito de diagnosticar a realidade do contexto educacional envolvido, no que concerne ao ensino e aprendizado da solução de problemas aditivos as pesquisadoras utilizaram dois instrumentos. O primeiro consistiu em teste com dez problemas aditivos pertencentes à categoria de composição, transformação e comparação, aplicados em 248 estudantes do 2º ao 5º ano das 11 turmas dos anos iniciais.

Paralelamente, foi solicitado às professoras desses estudantes que elaborassem seis problemas de adição e subtração. Além disso, foi coletado junto as professoras um exemplar do livro didático adotado pela escola de cada ano escolar (2º ao 5º ano).

Destaca-se que um mês após o término do estudo com as professoras, houve uma segunda aplicação de ambos os instrumentos e após seis meses, foi realizada uma terceira aplicação.

Ao todo foram realizados oito encontros de estudos e para fomentar as discussões e reflexões dos processos de ensino e aprendizagem foram utilizados os dados relativos ao desempenho dos estudantes no teste de matemática, as estratégias utilizadas por eles nas soluções dos problemas, os problemas elaborados pelas próprias professoras e os do livro de matemática.

Ao longo dos encontros foram abordados vários aspectos presentes na Teoria dos Campos Conceituais, tais como: as categorias propostas por Vergnaud, assim como as subcategorias; forma de apresentação das situações e das relações nelas contempladas.

Com o propósito de buscar indícios que revelassem alguma contribuição do estudo e a discussão acerca do Campo Aditivo no que se refere à forma como as professoras compreendem o ensino da solução de problemas desse tipo, as autoras realizaram análises comparativas dos problemas elaborados pelas professoras e do desempenho dos estudantes.

A análise comparativa do desempenho geral dos estudantes mostrou um avanço gradativo e, quando analisado por categorias, observou-se que o maior avanço foi na categoria transformação e o menor na categoria comparação.

Consequentemente, os resultados mostraram ainda que, em 2011, antes do estudo, e em 2012, após o encerramento dos encontros de estudos com as professoras, o maior número de problemas elaborados por elas foi na categoria transformação. As pesquisadoras apontaram duas possíveis razões para esse resultado, a primeira é que as situações de transformações são as que as professoras mais dominam e pode ser também, que sejam os tipos de situações que elas costumam trabalhar.

Por outro lado, na reaplicação do instrumento, após seis meses do término do estudo, os resultados apontaram um equilíbrio entre os índices de problemas elaborados em cada categoria, a saber, composição, transformação e comparação. Etcheverria et al (2015) destacaram que isso foi muito positivo, pois evidenciou que, com o auxílio do

material disponibilizado nos encontros, bem como das reflexões, provavelmente, foram ampliados os conhecimentos dos professores sobre o Campo Aditivo, revelando a necessidade de trabalhar com problemas de todas as categorias.

Similarmente, Santana, Alves e Nunes (2015), realizaram um estudo como o propósito de analisarem as reflexões de professores dos anos iniciais do ensino fundamental a respeito da Teoria dos Campos Conceituais, durante um processo de formação continuada, com ênfase nos conceitos das estruturas aditivas nos anos iniciais.

O processo de formação continuada teve a duração de oito meses e nesse período foram realizados oito encontros. O último encontro tinha por objetivo refletir e avaliar o processo formativo. Para tanto, os professores preencheram um relatório final, composto de duas partes: uma consistiu de dez questões a respeito do perfil profissional atual e, outra, de sete questões a título de reflexões sobre o processo formativo realizado.

A análise qualitativa dos dados mostrou que para as professoras a utilização dessa teoria, durante o processo formativo, promoveu reflexões frutíferas a respeito da forma como se desenvolve o processo de ensino, como também, deu suporte para a construção de atividades significativas à operação matemática, permitindo compreender as relações envolvidas nos conceitos.

As autoras concluíram ainda que esses resultados revelaram caminhos para possíveis soluções das dificuldades de aprendizagem dos estudantes, entre eles, destacaram a inserção da formação de professores, tanto na formação inicial como na continuada, instigando os professores a constantes reflexões sobre sua prática docente e seu processo formativo.

Ainda sobre a influência da formação continuada na melhoria do desempenho de escolares, Justo e Dorneles (2010) com o propósito de aperfeiçoar o desempenho dos estudantes dos anos iniciais na solução de problemas matemáticos aditivos, implementaram um programa de formação continuada junto a um grupo de professores de duas escolas, uma pública e outra privada.

O programa de formação continuada tinha como meta fornecer subsídios ao professor, para que, em parceria com as pesquisadoras pudessem elaborar e paralelamente, implementar um programa de ensino sobre solução de problemas aditivos, junto aos seus alunos. Para tanto, o programa de formação continuada se constituiu pela realização de quatro oficinas a respeito do ensino e aprendizagem de problemas aditivos,

acrescentando-se ainda o acompanhamento do planejamento do programa de ensino e observações de aulas pelas pesquisadoras.

Justo e Dorneles (2010) com o intuito de verificar a eficácia do programa de formação continuada que culminou na elaboração de um programa de ensino para os alunos, submeteram 320 estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental a um teste matemático com 20 problemas aditivos.

Os estudantes foram divididos em dois grupos, sendo: um grupo experimental e outro controle. As turmas em que as professoras aceitaram participar da formação continuada compuseram o grupo experimental, perfazendo um total de 167 sujeitos. Nessas turmas as professoras aplicaram o programa de ensino que foi planejado conjuntamente com as pesquisadoras. O grupo controle, por sua vez, foi composto de 153 sujeitos das turmas das professoras que não participaram do programa de formação continuada.

Os testes foram realizados em três momentos sendo um pré-teste (antes do trabalho realizado com os professores); pós-teste 1 (logo após a aplicação do programa de professores) e pós-teste 2 (no inicio do ano letivo seguinte para verificar a estabilidade da aprendizagem).

Os resultados mostraram que os estudantes da escola pública e da escola privada apresentaram uma melhora no desempenho na solução de problemas aditivos, de uma forma geral, tanto as turmas controle quanto as turmas experimentais. Todavia, as turmas experimentais tiveram uma taxa de acertos mais elevada que as turmas controle em ambas as escolas, pública e privada.

As pesquisadoras apontaram ainda que a taxa de acerto mais acentuada das turmas experimentais pode ser explicada pelo programa de formação continuada de suas respectivas professoras e pelo programa de ensino proposto a esse grupo de estudantes por intermédio delas. Os resultados evidenciaram, ainda, a relevância de políticas e de ações de formação continuada de professores em exercício no próprio ambiente escolar, garantindo, dessa forma, a participação do coletivo de professores.

Outras pesquisas têm se preocupado em investigar o papel e a importância das diferentes representações simbólicas no desenvolvimento do campo conceitual das estruturas aditivas.

Nessa perspectiva, Selva, Falcão e Nunes (2005) investigaram a representação gráfica como uma ferramenta simbólica útil para o desenvolvimento de conceitos inerentes ao campo conceitual das estruturas aditivas envolvendo dois estudos.

O primeiro estudo caracterizado como clínico-exploratório envolveu 24 estudantes de seis a sete anos, agrupados em díades e estes foram submetidos a um conjunto de situações que consistia em construir e organizar pilhas de tijolos (como os desenvolvidos por Lego ™) para representar quantidades. A partir dessas, os estudantes eram questionados pelo pesquisador que os acompanhou por sete sessões de sessenta minutos. Um exemplo de situação proposta era uma na qual os estudantes deveriam construir uma pilha de tijolos representando três pintinhos, e em outra cinco sapos. Neste contexto, eram questionados se existiam mais pintinhos ou sapos. Quantos mais pintinhos eram necessários para se obter a mesma quantidade. Além de outros questionamentos pertinentes ao campo das estruturas aditivas. Paralelamente, as duplas solucionaram questões com representações gráficas impressas. A análise dos protocolos mostrou que os sujeitos podiam passar da representação através da construção de tijolos para de gráficos.

Consequentemente, com a finalidade de testar mais efetivamente a importância didática da construção com tijolos, isto é, ferramentas simbólicas e manipulativas combinadas com gráficos que são ferramentas de representação úteis no desenvolvimento de conceitos no campo conceitual das estruturas aditivas, os pesquisadores desenvolveram o segundo estudo.

No segundo estudo participaram 27 crianças da pré-escola e 30 da 1ª série, com idades variando entre 6 e 8 anos. Os sujeitos foram divididos em três grupos: grupo experimental 1, submetidos a atividades similares ao primeiro estudo; grupo experimental 2, submetidos a atividades relacionadas apenas ao uso de gráficos, sem qualquer material manipulativo; e finalmente, um grupo controle, submetido apenas a atividades com cálculos numéricos envolvendo os mesmos números e operações exploradas pelos grupos experimentais. Os três grupos foram submetidos a um mesmo pré-teste, pós-teste 1 e pós-teste 2 (oito semanas após a intervenção de ensino). Os resultados mostraram que os sujeitos dos grupos experimentais apresentaram desempenho significativamente melhor do que os sujeitos do grupo controle. Em consequência disso, os pesquisadores evidenciaram que as representações simbólicas combinadas de ferramentas simbólicas

são relevantes no desenvolvimento de conceitos em matemática. E estas se tornam mais eficazes com os alunos mais novos, da pré-escola, aqueles para quem o uso de ferramentas concretas são especialmente relevantes para o desenvolvimento de conceitos.

Um estudo que também se ocupou de discutir os diferentes modos de representação da solução de problemas foi desenvolvido por Gagatsis e Elia (2004).

Com o objetivo de explorar e comparar os diferentes modos de representação da solução de problemas de estrutura aditiva, bem como o efeito dessas representações nos procedimentos de solução de problemas, foi desenvolvido um estudo por Gagatsis e Elia (2004), levado a efeito com 1447 alunos das 1ª, 2ª e 3ª séries do ensino fundamental em Chipre, com idades variando entre 6 e 8 anos. Os estudantes foram submetidos a um instrumento com 16 problemas de estrutura aditiva, tendo sido instruídos a usar as representações que julgassem necessárias para a solução do problema. Os autores categorizaram quatro diferentes modos de representação, a saber: descrição verbal, imagem decorativa, imagem informativa e reta numérica. Além das categorias os autores ainda fizeram uma distinção entre representações auxiliares e autônomas. As representações auxiliares não são necessárias para a solução do problema, todavia, podem ajudar no processo.

Por outro lado, as representações autônomas ocupam um papel essencial na solução de problemas, uma vez que, quaisquer informações relacionadas ao problema podem ser expressas por intermédio delas. Nesse contexto, os autores definiram que a reta numérica e a imagem decorativa fariam parte do grupo das representações auxiliares, enquanto a descrição verbal (texto escrito) e a imagem informativa, do grupo das representações autônomas.

Os resultados mostraram que a maior parte dos estudantes envolvidos na pesquisa ao solucionar os problemas propostos negligenciaram a presença da reta numérica, assim como das imagens, sendo elas decorativas ou informativas e deram exclusiva atenção apenas ao texto escrito do problema, ou seja, a descrição verbal. Os autores argumentaram que esse tipo de comportamento em relação à reta numérica pode ser atribuído às dificuldades causadas pelo descompasso da concepção de número dentro do contexto do problema, como uma quantidade de itens.

Os autores, baseados nos estudos de Miller (2000) concluíram que cada sistema de representação tem suas próprias regularidades, e o fato dos estudantes, em sua maioria atentarem-se somente para a descrição verbal, de certa forma, sinaliza para a necessidade de práticas de ensino que privilegiem as diferentes formas de representação.

A literatura revista mostrou, dentre outros aspectos, que as dificuldades apresentadas pelos estudantes, no que concerne a solução de problemas de estruturas aditivas, estão relacionadas a vários fatores e de diferentes natureza, dentre elas cabe citar: o ensino centrado nos problemas protótipos das estruturas aditivas (SANTANA ET AL, 2009); as diferentes formas de apresentação dos dados de um problema, isto é, números no contexto espacial ou temporal, reta numérica, imagens informativas e decorativas, entre outros (SANTANA ET AL, 2007; MAGINA E CAMPOS, 2004; GAGATSIS E ELIA, 2004); as diferentes formas de representação utilizadas pelos estudantes (SELVA, FALCÃO E NUNES, 2005; MORO E SOARES, 2006; KOCH E SOARES, 2005) e a incongruência semântica (MORETTI E BRANDT, 2014; MENDONÇA ET AL, 2007).

II- FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Em que pese a amplitude da discussão acerca da solução de problemas, a proposta é apresentar um panorama perpassando, primeiramente, pelas concepções de solução de problemas e, após, discorrendo acerca das diferenciações e classificações entre problemas, propostas pela literatura da área.

Na sequência buscou-se explanar acerca das etapas pelas quais passa o pensamento durante a solução de problemas, assunto este tratado por diversos autores e que nesta pesquisa são representados por Dewey (1910); Krutestskii (1976); Polya (2006); Mayer (1992); e Sternberg (2008), compondo a base teórica.

Acrescenta-se a esses estudos a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gerárd Vergnaud que fornece elementos para a análise das dificuldades dos estudantes, no que diz respeito, aos problemas de estruturas aditivas.

Partindo de uma abordagem cognitiva de solução de problemas, este "*é tratado como uma habilidade cognitiva complexa que caracteriza uma das atividades humanas mais inteligentes"* (CHI e GLASER, 1992, p.250), ou seja, refere-se a uma atividade mental superior ou de alto nível que implica no uso de conceitos e princípios necessários para atingir uma determinada solução (BRITO, 2006).

A análise da literatura concernente mostrou que as diferentes teorias ao longo dos anos utilizaram diferentes nomenclaturas para o mesmo constructo. Portanto, trata-se de solução ou resolução de problemas? (BRITO, 2006).

Segundo Proulx (apud BRITO, 2006), a solução está mais dirigida ao resultado, ao produto final, a resposta propriamente dita, logo, seria melhor empregar o termo "solução". De acordo com Mello (2015) o termo resolução pode ser entendido como "solucionar novamente", se considerar o significado do prefixo "re", confundindo-se com a aplicação de um exercício. Echeverria e Pozo (1998) enfatizaram ainda que uma situação somente pode ser concebida como um problema se existe um reconhecimento dela como tal e, para tanto, o sujeito não pode dispor de procedimentos automáticos que o permita solucioná-la de forma imediata, sem demandar um processo de reflexão que implique em uma tomada de decisões acerca da sequência de passos a serem seguidos. Logo, um problema se distingue de um exercício na medida em que, neste último, há uma

disponibilidade imediata de mecanismos que conduzem à solução. Sternberg (2008) ressalta que quando se recupera rapidamente uma resposta da memória, não temos um problema.

Gagné (1974) apontou que a solução de problemas está relacionada a um tipo de atividade de alto nível de aprendizagem do indivíduo, valendo-se dos princípios aprendidos e permitindo a elaboração de novos.

Ainda nessa linha, cabe destacar que por vezes a “solução de problemas” é confundida com situações problema. A “situação problema” é estática, refere-se ao espaço do problema, e tornar-se-á um problema à medida que o indivíduo que se depara com ela é motivado a transformá-la, a buscar o estado final (BRITO, 2006).

Sendo assim, em uma perspectiva mais abrangente podemos definir a solução de problemas como:

> [...] um processo que se inicia quando o sujeito se defronta com uma determinada situação e necessita buscar alternativas para atingir uma meta; nesses casos, o sujeito se encontra frente a uma situação-problema e, a partir daí desenvolve as etapas para atingir a solução. A solução de problemas é, portanto, geradora de um processo através do qual o aprendiz vai combinar, na estrutura cognitiva, os conceitos, princípios, procedimentos, técnicas, habilidades e conhecimentos previamente adquiridos que são necessários para encontrar a solução com uma nova situação que demanda uma re-organização conceitual cognitiva. Trata-se, portanto, de re-organização dos elementos já presentes na estrutura cognitiva, combinados com os novos elementos trazidos (BRITO, 2006, p.19).

Comparando as definições apresentadas pelos diferentes autores, nota-se que, com maior ou menor detalhamento, a essência acerca do que se caracteriza como um problema se mantêm em todos, ou seja, se a priori já se tem a resposta, ou se rapidamente a recuperamos da memória, não estamos diante de um problema.

A literatura que abarca a temática propõe algumas diferenciações entre os problemas, ou melhor, uma classificação, tais como as propostas por Echeverria e Pozo (1998); Diniz (2001); Chi e Glaser (1992); e Sternberg, (2008).

Echeverria e Pozo (1998) apontaram que os problemas podem ser classificados tanto em função da área a qual pertencem e do conteúdo, quanto como considerando o tipo de operações e processos necessários para solucioná-los, além de outras características. Nesta perspectiva, seria possível diferenciar problemas do tipo dedutivo daqueles do tipo indutivo, e isso seria definido a partir do tipo de raciocínio que o sujeito necessita utilizar para solucioná-los.

Segundo Sternberg (2008, p.436) "*o raciocínio dedutivo é um processo pelo qual uma pessoa tenta extrair uma conclusão específica e logicamente certa, a partir de um conjunto de proposições gerais".* Em comparação, "*o raciocínio indutivo é um processo pelo qual uma pessoa tenta alcançar uma provável conclusão geral, com base em um conjunto de fatos ou de observações específicas".* Echeverria e Pozo (1998), apresentaram, respectivamente, dois exemplos: Fazer a demonstração de uma fórmula matemática poderia ser um exemplo de problema dedutivo, enquanto que estabelecer regularidades no comportamento dos objetos em função do seu peso seria um problema do tipo indutivo.

A classificação com o enfoque nas características da tarefa tem sido proposta por vários estudiosos, dentre eles Sternberg (2008), que apresenta os problemas bem-estruturados e os problemas mal-estruturados. Os primeiros, também conhecidos como "problemas bem definidos" (frequentemente presentes em provas na escola), apresentam caminhos claros, ainda que não necessariamente fáceis. Echeverria e Pozo (1998) descrevem que o problema bem definido é aquele no qual é mais fácil de identificar em que momento foi alcançada uma solução, isto é, neste tipo de problema tanto o ponto de partida do problema (proposição) quanto o ponto de chegada (solução), bem como o tipo de operações que devem ser feitas estão especificados de forma mais clara, quando comparado aos problemas mal-estruturados. Um exemplo clássico de problema bem definido poderia ser qualquer problema da matemática escolar. Com relação ao segundo tipo, problemas mal-estruturados, tanto o ponto de partida, quanto os passos necessários para solucioná-los são muito menos claros e específicos.

Os autores – Sternberg (2008) e Echeverria e Pozo (1998) – consideraram que tanto os problemas bem-estruturados, como os problemas mal-estruturados são duas categorias que podem representar um *continuum* de clareza na solução de problemas, pois, as categorias são úteis para a compreensão de como as pessoas solucionam problemas. A este respeito Echeverria e Pozo (1998), sublinharam que certamente não existem problemas totalmente bem definidos, salvo as tarefas escolares que denominamos *exercícios.* Semelhantemente, também não existem problemas totalmente mal definidos, exceto que sejam propostos alguns cuja solução seja impossível.

Dentro da categoria de problemas bem-estruturados, Chi e Glaser (1992) propõem subcategorias, como "problemas de quebra-cabeças", "problemas do mundo real" e os

“problemas escolares” (os mais encontrados frequentemente). Os problemas quebra-cabeças exigem muito pouco conhecimento anterior, o que pode tornar sua solução deveras difícil. Os “problemas do mundo real” são os mais importantes e difíceis que encontramos para solucionar, pois, geralmente são os da vida cotidiana, fora da sala de aula. Os problemas escolares, por sua vez, exigem razoável quantidade de conhecimento de uma determinada matéria, e sua aprendizagem demanda uma boa parte do tempo dos estudantes em sua vida escolar.

Acerca disto, Diniz (2001) chama a atenção para os problemas contidos nos livros didáticos, classificando-os como “problemas convencionais”, em razão de sua estrutura, bem como o tratamento que se tem dado a eles. Salienta as características destes problemas: texto na forma de frases; parágrafos curtos; sempre apresentados após determinado conteúdo; os dados necessários para a resolução aparecem explicitamente no texto e, por vezes, na ordem que devem ser utilizados.

Com esta breve explanação percebemos que existem inúmeras classificações das possíveis estruturas dos problemas, que ora se mostram como bem-estruturados ou mal-estruturados, sejam problemas escolares ou problemas da vida cotidiana, ora problemas convencionais e não convencionais, chega-se a conclusão de que não é possível um aprofundamento que abarque tantas outras possibilidades que possam existir.

A seguir, são apresentadas as etapas da solução de problemas. Para tanto, o presente trabalho se servirá das propostas de Dewey (1910); Krutestskii (1976); Polya (2006); Mayer (1992) e Sternberg (2008).

Quando se trata das etapas da solução de problemas podemos tomar como referência a proposta de John Dewey, publicada em 1910 no livro *How We Think* [6]. As referidas etapas ao longo do tempo foram reescritas e adaptadas por diversos estudiosos da área da Educação Matemática. As etapas propostas por Dewey são:

[6] No Brasil, a primeira versão foi publicada em 1933, com tradução de Godofredo Rangel, e a segunda, em 1952, traduzida por Haydée Camargo Campos, ambas pela Editora Nacional, coleção “Atualidades Pedagógicas”

> a. Reconhecimento de um problema ou “sentir dificuldade” frente a uma situação;
> b. Análise, que compreenderia a percepção, a delimitação do problema e o “isolamento” das principais características do problema (daquilo que é necessário para a solução);
> c. Hipótese, formulação das possíveis alternativas de solução;
> d. Dedução, significando “remoer” ou raciocinar sobre as várias possibilidades, buscando chegar às soluções mais prováveis;
> e. Verificação ou “testagem” das possibilidades de solução. (BRITO, 2006, p.22)

Em 1945, Polya publicou aquela que seria considerada sua obra mais conhecida “How to Solve It”. O autor desenvolveu um processo de solução de problemas em quatro passos, sendo esses convergentes às etapas propostas por Dewey, a saber: Compreensão do Problema; Estabelecimento de um Plano; Execução do Plano e Retrospecto.

A *Compreensão do problema* refere-se à necessidade do enunciado verbal do problema ficar bem entendido - Esta etapa prevê também que o estudante identifique as partes principais do problema, a incógnita, os dados, as condicionantes. Com relação ao *Estabelecimento de um plano*, o autor, afirma que conceber um plano exige, de um modo geral, que conheçamos quais as contas, os cálculos ou desenhos que precisamos executar para obter a incógnita, ou seja, quais os procedimentos para a obtenção da solução. No tocante à *Execução do plano*, o autor ressalta que a dificuldade maior consiste no estabelecimento do plano, pois este exige conhecimentos anteriores, bons hábitos mentais e de concentração. Por outro lado, a execução do plano exigirá do estudante muita paciência para checar todos os detalhes, de forma a não ocultar um erro. Por fim, o *Retrospecto* é caracterizado como uma fase importante e instrutiva do trabalho da solução, pois o objetivo é fazer com que o estudante realize um retrospecto da solução completa, de forma a reexaminar o caminho que o levou até a resposta, favorecendo a consolidação do seu conhecimento e aperfeiçoando sua capacidade de resolver problemas.

Um outro autor que estudou as etapas da solução de problemas foi Vadim Andrevich Krutestskii que no ano de 1968, publicou o livro *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren* originalmente em russo e traduzida para o inglês por J. Tellller, editado por Jeremy Kilpatrick e Wirszaup em 1976. O estudo é resultado de uma pesquisa longitudinal desenvolvido pelo autor e sua equipe. Foi realizada uma ampla investigação sobre habilidades matemáticas dos estudantes. A partir dos resultados, o

autor sugeriu a existência de três estágios básicos na atividade mental durante a solução de problemas matemáticos:

1. Obtenção da informação matemática;
2. Processamento matemático da informação;
3. Retenção da informação matemática.

Neumann (1995) apontou que, para Krutetskii o primeiro estágio refere-se à habilidade para formalizar a percepção do material matemático e para compreender a estrutura formal do problema, por exemplo, na leitura e compreensão do enunciado de um problema.

O segundo estágio que trata do processamento da informação, corresponde a várias habilidades matemáticas, a saber: habilidade para pensar logicamente na área das relações espaciais e quantitativas e a habilidade para pensar em símbolos matemáticos; habilidade para generalizar de forma abrangente e rápida conteúdos matemáticos; habilidade para resumir os processos matemáticos e os sistemas correspondentes de operações, além da habilidade para pensar através de estruturas reduzidas; flexibilidade dos processos mentais nas atividades matemáticas; inclinação pela clareza, simplicidade, economia e racionalidade da solução, e por fim a habilidade para uma rápida e livre reconstrução do processo mental (Neumann, 1995)

Krutetskii (apud Neumann, 1995) destacou ainda que, com relação à retenção da informação matemática, essa, refere-se à existência de uma memória matemática (memória generalizada para relações matemáticas, tipos característicos, esquemas de argumentos e provas, métodos de resolução de problemas e princípios de abordagem).

Além dos três estágios de obtenção da informação matemática, processamento e retenção da informação, Krutetskii (citado em Neumann, 1995) estabeleceu ainda a existência de um outro elemento, que identificou como componente geral sintético, associado à existência de um tipo de “mente” matemática.

Destaca-se ainda que, os três estágios básicos da atividade mental na solução de um problema proposto por Krutetskii (1976) estão, de certa forma, relacionados às etapas de solução propostas por Dewey, conforme sintetizado no quadro a seguir.

Figura 8 - Quadro de comparação entre os estágios básicos da atividade mental na solução de problema propostos por Krutetskii (1976) e as etapas do pensamento elaboradas por Sternberg (2008)

Estágios propostos por Krutetskii (1976)	**Etapas propostas por Dewey (BRITO, 2006, p.22)**
1. Obtenção da Informação matemática.	a. Reconhecimento de um problema ou "sentir dificuldade" frente a uma situação; b. Análise, que compreenderia a percepção, a delimitação do problema e o "isolamento" das principais características do problema (daquilo que é necessário para a solução);
2. Processamento matemático da informação.	c. Hipótese, formulação das possíveis alternativas de solução; d. Dedução, significando "remoer" ou raciocinar sobre as várias possibilidades, buscando chegar às soluções mais prováveis;
3. Retenção da informação matemática.	e. Verificação ou "testagem" das possibilidades de solução.

Fonte: Elaborado pela autora.

A cada um desses estágios propostos por Krutetskii corresponde uma ou várias habilidades matemáticas e nesse sentido podemos estabelecer algumas relações ao pensarmos que, à medida que as etapas propostas por Dewey são executadas exigirá do sujeito as habilidades apontadas por Krutetskii. Por exemplo, as etapas *a* e *b* propostas por Dewey relacionam-se com o primeiro estágio, a saber, *Obtenção da Informação matemática,* que trata da habilidade de formalizar a percepção do material matemático com o propósito de compreender a estrutura formal do problema. Ainda sobre esse estágio Pirola (2000) apontou que, Krutetskii considerou de fundamental importância que as informações, ao serem utilizadas na solução de um determinado problema, sejam bem compreendidas. Acrescentando-se ainda que a compreensão inicia-se na identificação dos componentes matemáticos presentes no enunciado.

Mayer (1992), pautado em uma abordagem do processamento da informação, e através da análise da tarefa, apontou que a solução de problemas matemáticos pode ser analisada em quatro passos principais: tradução, integração, planejamento e execução. A tradução do problema refere-se à capacidade do sujeito de traduzir cada proposição em um problema de matemática ou de estória. A integração se dá à medida que ocorre a interligação entre as proposições de um problema em formato de estórias e uma representação coerente. O planejamento da solução, em outras palavras, consiste na idealização de um plano de solução, e neste aspecto, as pessoas podem diferir umas das outras na capacidade de elaborar corretamente planos de solução, pois, essa está relacionada ao conhecimento estratégico. No que diz respeito à execução da solução,

esta exige que o solucionador seja capaz de realizar operações, quer dizer, os cálculos que os problemas assim o requerer.

Considerando os quatros passos principais apontados por Mayer (1992) entendemos que são convergentes aos passos propostos por Polya (2006) e avançam no sentido de estabelecer uma relação direta com os conhecimentos exigidos em cada passo.

Acrescentando-se aos passos para a solução de problemas, o autor também apresenta cinco tipos de conhecimento que podem ser relevantes para a representação e solução de problemas, sendo eles:

> 1. O conhecimento linguístico - refere-se ao conhecimento sobre a língua inglesa[7], tal como sobre a análise de uma sentença em partes da fala, ou sobre o que várias palavras significam.
> 2. O conhecimento factual - refere-se ao conhecimento sobre o mundo, tal como o conhecimento de unidades de medida.
> 3. Conhecimento do esquema - refere-se ao conhecimento de tipos de problemas, tais como a diferença entre problemas de força e problemas de movimento.
> 4. Conhecimento de estratégias - refere-se ao conhecimento sobre como desenvolver e monitorar um plano de solução.
> 5. O conhecimento algorítmico - refere-se ao procedimento para a realização de uma operação planejada, tal como saber calcular uma longa divisão. (MAYER, 1992, p.147-148)

Nesta perspectiva pode-se estabelecer as seguintes relações: no que concerne ao primeiro passo – a tradução do problema seria a representação do mesmo –, o solucionador precisa de algum conhecimento linguístico, bem como de conhecimento factual. O próximo passo, integração do problema, exigirá do solucionador o conhecimento de esquema, pois este será utilizado para fazer julgamentos acurados sobre qual é a informação relevante em um problema e qual informação é inútil. O próximo componente é a idealização de um plano e, para tanto, é indispensável o conhecimento estratégico. Já na execução da solução, o solucionador precisa de algum conhecimento acerca dos procedimentos para a solução, ou seja, de um conhecimento algorítmico.

[7]Na tradução manteve-se língua inglesa como no texto original, mas entende-se que se refira ao conhecimento sobre a língua mãe/materna.

Consequentemente, as etapas descritas pelos estudiosos não representam uma receita a ser seguida. Estas têm sua importância à medida que, de certa forma, sinalizam para algumas diretrizes no trabalho com a solução de problemas. Nesta perspectiva, acrescenta-se também as etapas de solução de problemas, propostas por um grupo de autores (BRANSFORD e STEIN (1993); HAYES, (1989); PRETZ, NAPLES e STERNBERG e GRIGORENKO, (2003); STERNBERG, (1986) – como citados em STERNBERG, 2008) que apontaram que o processo de pensamento durante a solução de problemas tem o seguinte ciclo:

1. Identificação do problema;
2. Definição do problema;
3. Construção de uma estratégia para resolver o problema;
4. Organização de informações sobre o problema;
5. Alocação de recursos;
6. Monitoramento da solução;
7. Avaliação da solução

Destaca-se que o ciclo é descritivo e não implica que toda a solução de problemas prossegue sequencialmente através de todas as etapas nesta ordem. Considera-se ainda que o conceito de ciclo perpassa o princípio da continuidade, pois uma vez concluídas as etapas, elas geralmente dão origem a um novo problema, e então precisam ser repetidas (DAVIDSON e STERNBERG, 2003).

A identificação do problema é caracterizada por Sternberg (2008) como uma etapa difícil, pois, é necessário identificar uma situação como problemática, quer dizer, o que pode ser identificado como um problema para um sujeito, para outro pode não ser. Pretz, Naples e Sternberg (2003) evidenciaram que essa etapa também é tida como reconhecimento do problema, e neste ponto, cabe uma retomada acerca da discussão proposta por Brito (2006) ao tratar da “situação problema” tida como estática e, à medida que o indivíduo se depara com ela e é motivado a transformá-la, tornar-se-á um problema. Nesta perspectiva é passível compreender os problemas que são apresentados como situação problema.

Ao descrever as etapas do ciclo de solução de problemas os autores acrescentaram ao item definição, a representação do problema. No que se refere à definição do problema, trata-se do aspecto da solução de problemas em que o escopo e

os objetivos são claramente indicados, e a representação, por sua vez, refere-se à maneira como as informações conhecidas sobre o problema são mentalmente organizadas. Destaca-se ainda que um problema pode ser representado de várias maneiras, verbalmente ou visualmente e por vezes, um problema pode exigir a geração de uma nova representação para ser resolvido. Com efeito, destaca-se que a, respectiva, etapa que consiste na definição e representação do problema são cruciais, pois caso o problema seja definido e representado de forma imprecisa, o solucionador terá menor capacidade para resolvê-lo (PRETZ, NAPLES E STERNBERG, 2003; STERNBERG, 2008).

O exemplo a seguir ilustra a importância da representação no processo de solução de problemas, bem como a necessidade de promoção das mudanças necessárias na representação, de modo que seja possível a solução.

Imagine que você tem uma jarra cheia de limonada e uma jarra cheia de chá gelado. Simultaneamente você despeja ambos em uma jarra grande, e ainda assim a limonada permanece separada do chá gelado. Como isso pode acontecer? Inicialmente este enigma é difícil, uma vez que imaginamos duas jarras com refresco derramadas em uma jarra maior e ficamos imaginando como não se misturam. Porém, se a representação mental da limonada e do chá gelado é mudada, percebe-se que bebidas geladas podem estar no mesmo recipiente sem se misturar. Ainda que o problema em si não faça menção ao estado das bebidas, a maioria das pessoas assumem que eles são líquidos, como geralmente podemos vê-los (PRETZ, NAPLES E STERNBERG, 2003).

Os autores destacaram ainda que a identificação, definição e representação da solução de problemas são interativos, e muitas vezes é difícil dividi-los em uma situação real de solução de problemas, ou seja, um aspecto está imbricado ao outro, pois à medida que o problema é redefinido, também exigirá uma nova representação.

Ressalta-se ainda que os bons solucionadores de problemas dedicam mais tempo às fases iniciais do ciclo, que compreendem a identificação e/ou reconhecimento do problema, e a definição imbricada com a representação, o que faz com que levem menos tempo posteriormente, durante a solução do problema (STERNBERG e GRIGORENKO, 2003).

No que tange à construção de uma estratégia para solucionar o problema, considera-se que, após o problema ter sido identificado, o próximo passo é traçar uma

estratégia para resolvê-lo. Segundo Sternberg (2008), a formulação de estratégia pode envolver a análise que se refere ao desmembramento de um problema complexo em partes menores, mais fáceis de gerenciar. Neste sentido, Echeverria (1998) tem posição parecida ao apontar que as estratégias incluiriam o planejamento e a organização de diferentes técnicas para atingir as submetas e as metas traçadas.

Um processo complementar à análise é a síntese, que consiste em juntar vários elementos e organizá-los em algo útil, ou seja, podemos denominá-las como “par de estratégias”, uma vez que se complementam (STERNBERG, 2008).

O autor ainda apontou para outro par de estratégias complementares, que consiste no pensamento divergente e pensamento convergente. O primeiro se refere à tentativa de gerar um conjunto diversificado de soluções possíveis para um dado problema, posteriormente, encaminha-se para o pensamento convergente, haja vista que após a análise das possibilidades, deve-se afunilar naquela que pareça a melhor para solucionar o problema em questão. Um exemplo é quando um estudante incumbido pelo seu professor de realizar uma pesquisa sobre um determinado assunto, primeiramente usará o pensamento divergente, para produzir muitos assuntos possíveis, e posteriormente usará o pensamento convergente, para selecionar o tema mais adequado que lhe interessou.

É importante destacar que as estratégias aqui apresentadas compõem uma gama de possibilidades dentre as empregadas durante a solução de problemas. Considerando tal fato, não há uma única estratégia ideal que corresponda à solução de todos os problemas.

No que diz respeito à organização da informação, Sternberg (2008) concluiu que nesta etapa o sujeito deve organizar a informação disponível, de tal modo que o capacite a concretizar a estratégia formulada. Geralmente, por todo o ciclo, o solucionador constantemente organiza e reorganiza a informação disponível, sempre visando encontrar a representação adequada para a execução da estratégia. Procura integrar todas as informações que julga serem necessárias para realizar a tarefa com sucesso. Uma vez que o solucionador integre estas informações excedentes e descarte as relevantes, as chances de obter êxito na tarefa são mínimas. Por vezes, a solução se torna difícil e as pessoas não conseguem solucionar um problema em virtude de não organizarem de maneira eficaz as informações que tem em mãos.

Pode-se dizer que a organização da informação está em consonância com a representação do problema e a formulação de estratégias, sendo que esta última determina a ordem sequencial dos processos em que o solucionador agirá na representação. Logo, o sequenciamento ineficaz de passos pode resultar em um desperdício de tempo e esforço (STERNBERG e GRIGORENKO, 2003).

A alocação de recursos pode se referir ao tempo, dinheiro, equipamento, espaço, entre outros. Todavia, nesta proposta em especial, a ideia é ater-se aos recursos mentais. Os estudos apontam que, na solução de problemas, os especialistas tendem a dedicar mais de seus recursos mentais ao planejamento global, pois assim têm menos probabilidades de trilharem caminhos tortuosos e cometerem diversos erros. Por outro lado, os solucionadores novatos tendem a ater-se mais ao planejamento local, ou seja, despendendo mais tempo aos detalhes, ficando mais suscetíveis às frustrações posteriores (LARKIN et al; STERNBERG; BLOOM e BRODER apud STERNBERG, 2008).

Nesta perspectiva é possível traçar uma hipótese entre o par de estratégias que consiste na análise e na síntese e a alocação de recursos realizada de maneira distinta pelos especialistas e os novatos na solução de problemas. Pelo contexto, os novatos demonstram ter dificuldades na realização da síntese, ou seja, uma vez que realizam a análise por meio do desmembramento, tendem a centrar-se nesta etapa (principalmente no que concerne à alocação de recursos), e pouco avançam em direção à síntese.

Ainda que ocorram em momentos distintos, as duas últimas etapas (que consistem no monitoramento e avaliação) de certa forma se propõem ao mesmo objetivo, visto que na medida em que se monitora o processo da solução de problemas é indispensável a avaliação da solução ao final do processo.

O monitoramento implica nas verificações ao longo do processo da solução, garantindo a aproximação do seu objetivo, do contrário o solucionador tem a possibilidade de reavaliar e prosseguir por um caminho mais promissor. Por fim, Sternberg (2008) destacou que a fase da avaliação garantirá o recomeço do ciclo, uma vez que através desse processo o problema pode ser redefinido. Há ainda a possibilidade de emergir novas estratégias, logo, a alocação de novos recursos. O ciclo se completa quando se leva a novas ideias, ou seja, uma vez concluídas as etapas elas geralmente dão origem a um novo problema.

Ao estabelecer um paralelo entre as propostas apresentadas, salvo um pormenor ou outro, todas preservam os passos essenciais. No entanto, somente seguir as etapas propostas não garante o êxito na solução, tampouco garantirá a formação e aprimoramento para bons solucionadores de problemas, tidos na literatura como “experts” na solução de problemas, uma vez que são vários e de diferentes naturezas os fatores que influenciam na solução de problemas.

Neste sentido, Carpenter e Moser (apud PUIG e CERDÁN, 1995) que se dedicaram ao estudo dos problemas apontam que parte das dificuldades apresentadas pelos estudantes decorre da posição da incógnita, ou seja, onde se encontra a quantidade desconhecida.

Puig e Cérdan (1995) ressaltaram que, no processo de solução de problemas, há de se considerar duas variáveis que podem ser concebidas como fatores que geram dificuldades: as dimensões sintáticas e as semânticas. As dificuldades de ordem sintática compreendem o formato de apresentação do problema, o comprimento do enunciado, sua estrutura gramatical, a posição da pergunta no enunciado, a presença ou não de dados em questão e o tamanho dos números, além de considerar a ordem de apresentação dos dados. Por outro lado, as dificuldades de ordem semântica estão relacionadas aos argumentos, adjetivos, tempos verbais, entre outros.

Nesse sentido, buscando também compreender as dificuldades apresentadas pelos estudantes na solução de problemas, em particular, os problemas de estruturas aditivas, Vergnaud (2009) desenvolveu a Teoria dos Campos Conceituais. Com relação ao campo conceitual das estruturas aditivas, Vergnaund (1986) destacou que esta diz respeito a uma série de competências observáveis em crianças e em alunos do ensino secundário ao superior, e que vai além do conjunto de conceitos envolvidos, ou seja, há por trás destas estruturas um problema de conceituação absolutamente essencial, e que compreende várias outras complexidades.

A teoria dos campos conceituais é uma teoria cognitivista que foi desenvolvida pelo psicólogo, professor e pesquisador francês Gerárd Vergnaud. Ela oferece um arcabouço para o estudo do desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem de competências complexas pelos estudantes, levando em conta os próprios conteúdos do conhecimento e a análise conceitual de seu domínio (VERGNAUD, apud MOREIRA, 2009).

Para Vergnaud o conhecimento está organizado em campos conceituais, cujo domínio, por parte do sujeito ocorre a longo prazo, através de experiência, maturidade e aprendizagem. E neste contexto “longo prazo” estende-se a uma perspectiva de desenvolvimento, ou seja, não basta alguns dias ou algumas semanas para que uma criança adquira uma nova competência ou compreenda um novo conceito, mas sim, vários anos de vida escolar atrelado a experiência do sujeito. E é exatamente sobre esse processo que a teoria dos campos conceituais ocupa-se entre as primeiras competências adquiridas pelas crianças entre quatro ou cinco anos concernentes ao espaço e aos raciocínios sobre grandezas, por exemplo, até as competências que ainda trazem dificuldades à parte dos adolescentes (VERGNAUD, apud MOREIRA, 2009; 2011).

Nota-se que Vergnaud faz uso do termo competências para explicitar vários pontos em sua teoria. O autor afirma que “*as competências dos estudantes são ferramentas de essencial importância para a descrição e a análise de conquistas denominadas complexas, que ocorrem durante um longo período de tempo*” (VERGNAUD, apud SANTANA, 2010, p.48).

Santana (2010) explicita ainda que no tocante à solução de situações-problema a competência dos estudantes surge ante a escolha certa dos dados e das operações, e conclui que a habilidade é a ação real, enquanto que, a competência é o que conduz o estudante a ter aquela ação.

Do mesmo modo, o documento oficial do MEC/INEP (BRASIL, 1999) acerca das matrizes curriculares de referência para o SAEB traz a seguinte distinção entre competência e habilidade.

> Entende-se por competências cognitivas as modalidades estruturais da inteligência - ações e operações que o sujeito utiliza para estabelecer relações com e entre os objetos, situações, fenômenos e pessoas que deseja conhecer. As habilidades instrumentais referem-se, especificamente, ao plano do “saber fazer” e decorrem, diretamente, do nível estrutural das competências já adquiridas e que se transformam em habilidades. (BRASIL, 1999, p. 9).

Comério (2012), no entanto, elucida que não há consenso sobre a definição dos termos competência e habilidades. Em adição Primi et.al (apud COMÉRIO, 2012) apontam que os dois termos se sobrepõem nas áreas da psicologia do desenvolvimento e aprendizagem, psicometria e avaliação educacional e que, recorrentemente, são tidos e usados como sinônimos, e por vezes, como complementares.

Krutetskii (1976) que em seus estudos abordou as habilidades matemáticas, em especial, as que contribuem para a solução de problemas matemáticos define a habilidade como uma característica mental que possibilita executar uma tarefa bem e rapidamente. Com efeito, são consideradas características psicológicas individuais, correlatas a atividades mentais, que contribuem ou não para o sucesso escolar dos sujeitos em determinada disciplina.

Por conseguinte, feito os esclarecimentos que julgamos necessários acerca desses constructos, outrossim, na constituição da teoria dos campos conceituais temos a colaboração de Piaget e Vygotski. No que diz respeito à teoria de Piaget, sobretudo, ressalta-se o conceito de esquema, fundamental para a teoria dos campos conceituais.

Vergnaud (1998) pautado nas contribuições de Piaget definiu esquema como a organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situações, e ressalta ainda que não é o comportamento que é invariante, mas sim a organização do comportamento.

Pensando que os gestos são um bom protótipo do que são os esquemas, há uma organização invariante de comportamento em muitos tipos de gestos como andar, correr, sentar-se, pegar um pequeno objeto sobre uma mesa ou no chão. Dentre estes, destacam-se os esquemas perceptivos-gestuais, que em matemática consistem em contar um conjunto de objetos, desenhar a imagem simétrica de uma figura plana feita de linhas retas com papel quadriculado, etc (VERGNAUD, 1998).

O autor aponta que a maior parte da nossa atividade cognitiva é composta de esquemas e, pensando nisso, a educação deve contribuir para que o sujeito desenvolva um repertório amplo e diversificado de esquemas, uma vez que os estudantes são frequentemente confrontados com situações em que não dispõem dos esquemas necessários. Ante isto, não há outra alternativa senão procurar por esquemas “na vizinhança”, na tentativa de decompor e recombinar os já existentes a fim de formar novos esquemas – contando ou não com a ajuda do professor ou dos colegas.

No que diz respeito ao legado de Vygotsky à teoria dos campos conceituais, nota-se, por exemplo, a importância atribuída à interação social, à linguagem e à simbolização presente no progressivo e gradativo domínio de um campo conceitual pelo sujeito (Vergnaud apud MOREIRA, 2009). Ressalta-se, ainda, a ênfase na proposta teórica de Vygotsky acerca da zona de desenvolvimento proximal, que caracteriza o

desenvolvimento mental prospectivamente, quer dizer, trata da distância entre as práticas que uma criança já domina e as atividades nas quais ela ainda depende de ajuda. Para Vygotsky, é no caminho entre esses dois pontos que ela pode se desenvolver mentalmente através da interação e da troca de experiências (VYGOTSKY, 2009). Nesse sentido, o professor auxilia o sujeito a realizar algo que este, sozinho, não poderia fazer, ou seja, nesta perspectiva o professor é tido como mediador (VERGNAUD, 2009).

Dada toda a complexidade que perpassa a teoria dos campos conceituais, cabe destacar ainda os conceitos chave presentes na mesma, além do próprio conceito de campo conceitual, os conceitos de esquema, situação, invariante operatório e a concepção de conceito do autor.

Para Vergnaud (apud MOREIRA, 2009), um campo conceitual significa um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição. Nesse sentido o detalhamento de um campo conceitual exige sincronicamente a análise das situações (ou problemas), dos procedimentos de tratamentos empregados pelos alunos, bem como os propósitos que eles têm e suas argumentações, além das representações simbólicas que utilizam (VERGNAUD, 1986).

Vergnaud (1986) apresenta ainda três argumentos essenciais que o levaram ao conceito de campo conceitual, bem como as razões pelas quais acredita ser necessário estudá-los: I – um conceito não se forma dentro de um só tipo de situação; II- uma situação não se analisa com um só conceito; III – a formação e apropriação de todas as particularidades de um conceito é um processo que ao longo dos anos perpassa por analogias, mal-entendidos entre situações, concepções, procedimentos e representações simbólicas.

Destaca-se ainda que há vários campos conceituais não se restringindo à matemática, por exemplo, na Física temos os campos conceituais da mecânica, eletricidade, na Biologia, os campos conceituais da reprodução em vegetais, que se distingue da reprodução em animais. Naturalmente, esses campos conceituais não são independentes, mas interagem entre si, uma vez que, uns podem ser relevantes para a compreensão de outros, mas, ainda assim o autor pondera ser útil falar em distintos

campos conceituais se eles puderem ser consistentemente descritos (VERGNAUD, 1986).

Assim sendo, Vergnaud (apud MOREIRA, 2009) presume que é praticamente impossível estudar as coisas separadamente, mas, por isso mesmo enfatiza a necessidade de fazer recortes, e é nesta perspectiva que os campos conceituais tornam-se unidades de estudos produtivas e capazes de dar sentido aos problemas, bem como às observações feitas em relação à conceitualização.

A base da Teoria dos Campos Conceituais é a concepção de conceito elaborada pelo autor. Vergnaud (2009) definiu que a construção de um conceito envolve uma terna de conjunto que, de acordo com a teoria dos campos conceituais, foi denominada simbolicamente de (S,I e R), onde S é um conjunto de situações; I um conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações); e R um conjunto de representações simbólicas. O conjunto de situações é que dá sentido ao conceito. Por sua vez, o conjunto de invariantes é responsável por acomodar a operacionalidade do conceito. Por último, o conjunto de representações simbólicas, que envolve a linguagem natural, gráficos, diagramas, sentenças formais, dentre outras, é usado para indicar, bem como representar, o conjunto de invariantes e, consequentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

O conjunto de invariantes operatórios, também designados por Vergnaud (1998) pelas expressões *conceito-em-ação* e *teorema-em-ação*, referem-se aos conhecimentos contidos nos esquemas. *Teorema-em-ação* é uma proposição tida como verdadeira sobre o real, e *conceito-em-ação* é um objeto, um predicado, ou uma categoria de pensamento tida como pertinente.

Para elucidar melhor ambos os conceitos se toma a ciência como referência, em que os conceitos e teoremas são explícitos e pode-se discutir sua pertinência e sua veracidade – ao contrário dos invariantes operatórios, uma vez que um *conceito-em-ação* não se constitui em um verdadeiro conceito científico, assim como um *teorema-em-ação* não é teorema no sentido convencional do termo, é subjacente ao comportamento do aluno, aparece de modo intuitivo na ação do aluno e sua esfera de validade é normalmente menor que a esfera de um teorema no sentido estrito (VERGNAUD apud MOREIRA, 2009; MAGINA, 2008).

Todavia, o autor destaca que conceitos-em-ação e teoremas-em-ação podem progressivamente tornarem-se verdadeiros conceitos e teoremas científicos. Neste sentido, essencialmente o ensino deve consistir em ajudar o aluno a construir conceitos e teoremas explícitos (e cientificamente aceitos) partindo de conhecimento implícito, e eis aí um dos problemas do ensino e da didática que consiste em encontrar maneiras de favorecer tal transformação (VERGNAUD, 1986; 1998).

O conceito de situação proposto por Vergnaud (apud MOREIRA, 2009), não abrange o de situação didática, mas é colocado no sentido de tarefa, uma vez que toda situação complexa é passível de ser analisada como uma combinação de tarefas. Destaca ainda duas ideias principais em relação ao sentido de situação: variedade e história, ou seja, em um determinado campo conceitual há uma grande variedade de situações e o conhecimento dos alunos ganha forma em consonância com as situações que se encontram e, progressivamente, dominam. É importante ressaltar que, segundo este teórico, muitas de nossas concepções decorrem das primeiras situações que fomos capazes de dominar ou de nossa experiência na tentativa de modificá-las.

Em síntese, a teoria dos campos conceituais é uma teoria complexa, haja vista a necessidade de abranger em uma única perspectiva teórica todo o desenvolvimento de situações progressivamente dominadas; dos conceitos e teoremas necessários para operar de modo eficiente nessas situações; das palavras e símbolos que podem representar eficazmente esses conceitos e operações para os estudantes, dependendo de seus níveis cognitivos (VERGNAUD apud MOREIRA, 2009).

Acrescenta-se também que a teoria dos campos conceituais não é uma teoria exclusiva da matemática, considerando que a noção conceitual não se restringe somente a esta área. Contudo, o autor apresenta especial interesse pelos campos conceituais das estruturas aditivas e das estruturas multiplicativas e, para fins deste trabalho, serão enfocadas as estruturas aditivas.

De acordo com Vergnaud (apud SANTANA, 2010), o Campo Conceitual das Estruturas Aditivas é, simultaneamente, o conjunto das situações das quais o tratamento implica uma ou várias adições e subtrações, e o conjunto de conceitos e teoremas que permite analisar essas situações como tarefas matemáticas.

Nesta perspectiva, o delineamento das estruturas aditivas é muito mais complexo do que se possa imaginar, pois não se restringe a execução dos cálculos numéricos em

si, seja a adição e/ou a subtração. A este respeito Vergnaud (1986) destacou que considerar a complexidade do campo conceitual das estruturas aditivas, que compreende uma diversidade de situações de adição e subtração, implica no entendimento da progressiva e lenta compreensão, pelas crianças, das propriedades das relações em jogo (VERGNAUD, 1986).

Vergnaud (2014) descreveu que a noção de relação é uma noção absolutamente geral, e que o conhecimento consiste, em grande parte, em estabelecer relações e organizá-las em sistemas. Acrescenta-se que as relações são, às vezes puras constatações que podemos fazer da realidade. Constantemente essas não são constatáveis e devem ser deduzidas ou aceitas. Mas as relações nada seriam se fossem apenas constatações. Nesse sentido, [...] "*O trabalho da inteligência conduz igualmente a deduções ou inferências e a construções."* (VERGNAUD, 2014, p.33)

Vergnaud (2014) cita três exemplos de relações, sendo elas as binárias, ternárias e quartenárias, respectivamente, que ligam dois elementos entre si, três elementos entre si e, por fim, quatro elementos entre si.

Ante o exposto, Vergnaud (2014) destacou que existem vários tipos de relações aditivas e, consequentemente, vários tipos de adições e subtrações. Ressalta ainda que as relações aditivas são relações ternárias, isto é, são relações que ligam três elementos entre si. Por exemplo: *cinco* mais *quatro* é igual a *nove*.

Outro aspecto indispensável para a compreensão das estruturas aditivas é a noção de cálculo relacional proposto pelo autor. No que se refere ao cálculo relacional, o autor faz uma distinção entre os cálculos "relacional" e "numérico". O cálculo numérico está implicado às operações usuais de adição, subtração, multiplicação e divisão, por outro lado, o cálculo relacional compreende as operações do pensamento necessárias para que haja a manipulação das relações envolvidas nas situações (MAGINA, 2008).

Nunes e Bryant (1997) descreveram o seguinte exemplo: *Joe tinha cinco bolinhas de gude. Então Tom lhe deu mais algumas bolinhas. Agora Joe tem oito bolinhas. Quantas bolinhas Tom deu para Joe?* – os autores apontaram diferentes formas para a solução desse problema. Uma seria usar blocos (material manipulativo) ou os dedos. Nessa proposta a criança poderia contar cinco blocos (ou dedos), memorizar onde este conjunto de cinco terminou, mas seguir em frente contando até oito e então contar novamente apenas os elementos que foram acrescentados ao cinco para chegar a oito.

A outra forma de solucionar o problema seria por subtração, isso representaria elaborar que a solução pode ser atingida subtraindo o estado inicial, 5, do estado final, 8. Por certo, que para fazer isso, os autores evidenciaram que a criança precisaria perceber a relação inversa da adição/subtração e também efetuar uma operação de pensamento que consistira na aplicação dessa transformação inversa antes de calcular o resultado da operação aritmética. Resumindo" [...] antes do cálculo, a operação mental de inverter a transformação deve ser efetuada para conectar a situação aditiva com uma solução subtrativa" (NUNES E BRYANT, 1997, p.119).

Vergnaud (2014) ainda apresentou dois exemplos, destacando que em uma variedade de problemas de estruturas aditivas o mesmo cálculo numérico pode exigir cálculos relacionais distintos. Na primeira situação: *"Eu tinha 13 bolinhas, perdi 4; quantas tenho agora?.* A segunda proposição era: *"Ganhei 4 bolinhas. Agora tenho 13. Quantas eu tinha antes de jogar?.* Em ambos os problemas era necessário subtrair 4 de 13, no entanto, na primeira situação o cálculo relacional correspondente era o cálculo do estado final pela aplicação da transformação (-4) ao estado final 13. Já para solucionar o segundo problema o cálculo relacional correspondente era o cálculo do estado inicial pela inversão da transformação direta (+4) e a aplicação da transformação inversa (-4) ao estado final 13. Embora nos dois casos a solução consistia em uma simples subtração, a dificuldade desses problemas não é a mesma, sendo que para algumas crianças, pode ocorrer um intervalo de dois anos entre o êxito na solução do primeiro problema e o sucesso no segundo.

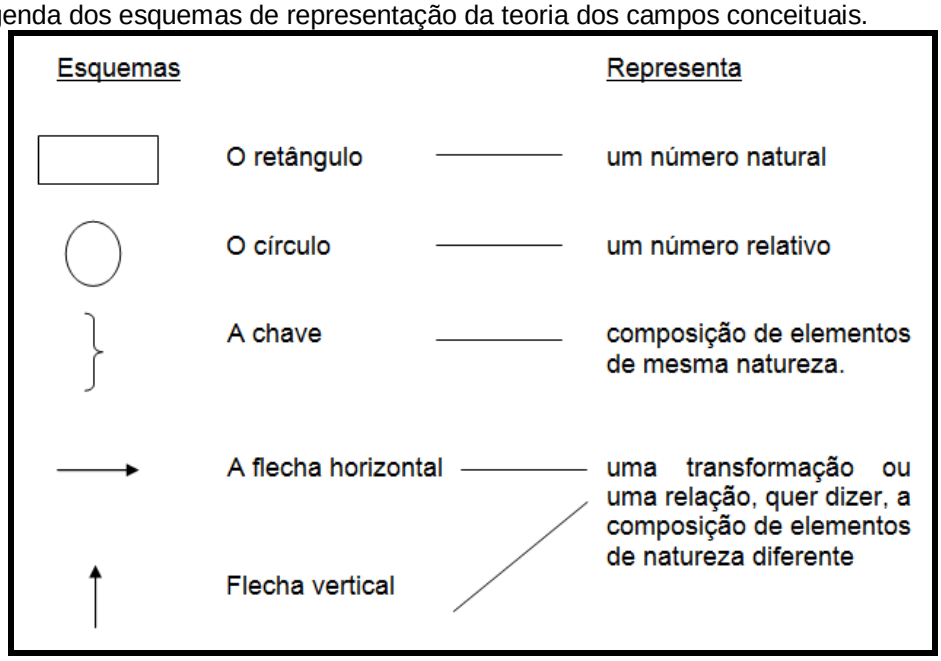
Consequentemente a noção de cálculo relacional é fundamental, e se aplica a todos os tipos de relações, binárias, ternárias, quartenárias, e assim segue.

Vergnaud (2014,1986), restringiu a análise das relações aditivas a seis relações ternárias fundamentais, pois, essas podem ser encadeadas de diversas maneiras e resultar em uma grande variedade de estruturas aditivas. O autor as nomeou da seguinte maneira: composição de medidas; transformação de uma medida; comparação de medidas; composição de transformações; transformação de uma relação; e composição de duas relações.

Na sequencia, buscamos esclarecer a ideia de definição apresentada pelo autor para cada uma das seis categorias. Além disso, recorreremos aos desenhos esquemáticos com o propósito de ilustrar os elementos de cada uma das categorias.

Salienta-se que tais esquemas são apenas ilustrativos e não se constituem em diagramas de solução. A Figura 9 (VERGNAUND, 2014, p.201) apresenta uma legenda que contribuirá para a compreensão dos esquemas.

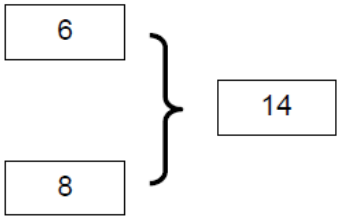
Figura 9 - Legenda dos esquemas de representação da teoria dos campos conceituais.



Fonte: Vergnaud, 2014, p.201

1- Composição de medidas: duas medidas se compõem para resultar em uma terceira (VERGNAUD, 2014, p. 202)

Exemplo: Paulo tem 6 bolinhas de gude de vidro e 8 bolinhas de gude de metal. Ele tem ao todo 14 bolinhas.



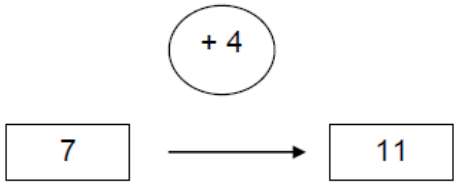
Nesta primeira categoria temos a composição de duas medidas, isto é, a composição de dois números de mesma natureza. Neste cenário, os números 6/8/14 são, como descrito por Vergnaud (2014), números naturais. Em outras palavras, são números que correspondem as medidas e não as transformações, consequentemente, não são

nem positivos nem negativos, são números sem sinais que não podem representar transformações dado que estas sejam necessariamente positivas ou negativas.

Em consequência disso, o autor introduz outro conjunto de números, dotados de sinais, que o intitulou de números relativos, esses por sua vez representam devidamente as transformações aditivas. Em suma "(...) *os números naturais representam medidas dos conjuntos de objetos isoláveis. Os números relativos representam as transformações que essas medidas sofrem*" (VERGNAUD, 2014, p.199).

2- Transformação de uma medida: uma transformação opera sobre uma medida para resultar em uma medida (VERGNAUD, 2014, p. 203).

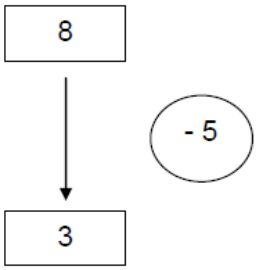
Exemplo: Paulo tinha 7 bolinhas de gude antes de jogar. Ganhou 4 bolinhas. Ele tem agora 11.



Observa-se que nesta segunda categoria não se trata apenas da composição de duas medidas. Nesta temos a transformação (+4) operando sobre uma medida para resultar em outra, quer dizer, a adição de um número natural (7) a um número relativo (+4).

3- Comparação de Medidas: uma relação liga duas medidas. (VERGNAUD, 2014, p. 203).

Exemplo: Paulo tem 8 bolinhas de gude. Tiago tem 5 a menos que Paulo. Então Tiago tem 3.

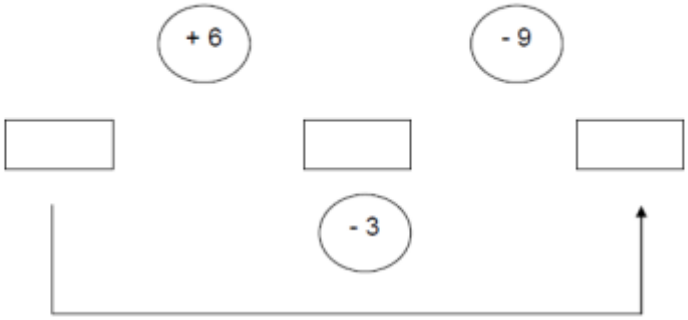


Vergnaud (2014) explicita que nesta categoria temos um número relativo (-5) que liga dois números naturais 8 e 3, todavia, argumenta que este exemplo corresponde a

uma relação estática, pois não se opera em termos de adicionar, tirar, etc. Neste caso especifico, como descrito por Moro (apud Lopes, 2002, p.25), há “(...) a comparação quantificada entre duas grandezas”.

4- Composição de transformações: duas transformações se compõem para resultar em uma transformação (VERGNAUD, 2014, p.204).

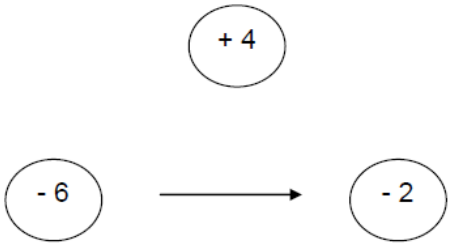
Exemplo: Paulo ganhou ontem 6 bolinhas de gude e hoje perdeu 9 bolinhas. Em tudo, ele perdeu 3.



Esta quarta categoria ocupa-se, puramente, à composição de transformações, uma vez que, (+6) (-9) (-3) são todos números relativos, quer dizer, números que expressam transformações.

5- Transformação de uma relação: uma transformação opera sobre um estado relativo (uma relação) para resultar em um estado relativo. (VERGNAUD, 2014, p.204).

Exemplo: Paulo devia 6 bolinhas de gude para Henrique. Ele devolveu 4. Agora, ele lhe deve somente 2 bolinhas.

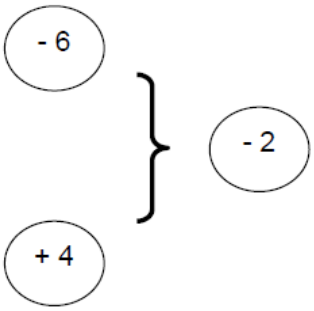


Examinando atenciosamente o esquema correspondente a esta categoria, nota-se a semelhança com o esquema apresentado na categoria anterior, que caracteriza a adição de duas transformações. Contudo, tanto um estado relativo, assim como uma transformação são ambos representados por números relativos, esta categoria

corresponde à adição de dois números relativos, e não há como empregar um símbolo diferente (VERGNAUD, 2014).

6- Composição de relações: dois estados relativos (relações) se compõem para resultar em um estado relativo (VERGNAUD, 2014, p.205).

Exemplo: Paulo deve 6 bolinhas de gude a Henrique, mas Henrique lhe deve 4. Então, Paulo deve 2 bolinhas a Henrique.



Esta categoria é naturalmente próxima da quarta categoria, contudo, ao invés de transformações são as relações-estado que são compostas entre si. Vergnaud (2014, p.205) utiliza-se do seguinte argumento: "(...) *a diferença entre estado e transformação justifica, em nosso entender, que se tenha uma categoria à parte."*

Vergnaud (2014) observa ainda que a complexidade dos problemas de estruturas aditivas varia não apenas em relação as diferentes categorias, mas variam também em função das diferentes classes de problemas possíveis para cada uma delas. Neste contexto, conta-se com mais de vinte subcategorias.

De um modo geral, considerando as características de cada categoria, pode-se dividi-las em três grupos básicos de problema, que consistem em composição, transformação e comparação, e cada qual apresenta suas subcategorias, bem como seus respectivos graus de complexidade. Por vezes, a prática docente privilegia uma das categorias e, consequentemente, não abrange as subcategorias, ou seja, além de limitar a oferta no âmbito da categoria, extrapola para as subcategorias.

Nesta perspectiva Mendonça et al (2007) destacaram que os professores costumam ensinar as estruturas aditivas nas duas primeiras séries do Ensino Fundamental. Nesse caso, trabalha-se com problemas aditivos do tipo protótipo de composição e transformação, tal como: *"Mário tinha uma coleção de 5 bolinhas de gude. Ganhou 8 bolinhas de seu avô. Quantas bolinhas ele tem agora?"*. Já nas 3ª e 4ª séries,

o professor tende a ampliar o valor dos números envolvidos no problema em detrimento da oferta de outros tipos de situações pertencentes a essa estrutura. Na maioria das vezes, os problemas propostos exigem os mesmos tipos de raciocínio, como por exemplo: "*João tinha uma coleção de 56 bolinhas de gude. Foi jogar com um colega e perdeu 17. Depois seu pai lhe deu de presente 25. Ele ainda jogou com outro colega e ganhou 28 bolinhas. Quantas bolinhas ele tem agora?"*. As autoras ressaltaram a importância de se trabalhar essas situações-problema, contudo, observaram a necessidade de ir além dessas situações possibilitando a ampliação do campo aditivo dos estudantes.

À vista do exposto neste capítulo, vale destacar a similaridade existente entre diferentes estudos abordados na presente pesquisa. Krutetskii (1976) fundamentado na psicologia soviética, em seus estudos destacou as habilidades matemáticas e seus componentes, principalmente no que diz respeito às habilidades de solução de problemas matemáticos. Sternberg (1992, 2008), por sua vez realizou seus estudos sobre a solução de problemas dentro da tradição da psicologia cognitiva procurando compreender a forma através da qual as pessoas processam e representam mentalmente as informações.

Vergnaud (1979, 1986, 2009) sublinhou que o estudo da solução de problemas se dá dentro de um campo conceitual, que por sua vez se caracteriza como um conjunto de problemas ou situações cuja análise e tratamento exigem vários tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, os quais se encontram em conexão uns com os outros.

Como resultado percebemos que para esses teóricos a temática da solução de problemas registra certas aproximações, à medida que a compreendem como um campo privilegiado para a investigação do desenvolvimento cognitivo.

Ainda com relação à solução de problemas tanto Krutetskii (1976) como Sternberg (2008) apontaram em seus estudos respectivamente, estágios e etapas inerentes ao processo da solução de problemas. O primeiro autor estabeleceu uma relação entre os três estágios e um conjunto de habilidades para a solução de problemas matemáticos.

Sternberg (2008) descreveu as etapas do ciclo de solução de problemas destacando a importância da flexibilidade no seguimento das várias etapas, isto é, as etapas não devem ser rigorosas a ponto de comprometer o processo de solução. Ao contrário, é possível avançar ou recuar ao longo das etapas, alterando sua ordem quando for necessário ou até mesmo omitindo etapas quando a situação lhe parecer apropriada.

A este respeito, Vergnaud (1979, 1986, 2009) em seus estudos parece não ter dado a ênfase dada pelos outros dois teóricos acerca das etapas da solução de problemas. Em uma passagem o autor abordou brevemente esse aspecto nomeando-o de *procedimento* como segue:

> [...] por problema entenda-se (...) qualquer situação em que é necessário descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, hipótese e verificação, para produzir uma solução: este procedimento não é necessariamente o mais geral ou o mais econômico; pode mesmo ser falso, o que nem por isso deixa de ser procedimento a estudar em pé de igualdade com os outros (VERGNAUD, 1986, p.76)

Além desse excerto, mediante a literatura consultada para essa pesquisa não foi possível localizar indícios de aprofundamento da discussão acerca das etapas e/ou estágios durante a solução de problemas. Destaca-se que o foco deste autor foi descrever as categorias e subcategorias de problemas inerentes a determinados campos conceituais, por exemplo, campo conceitual de estrutura aditiva, bem como as dificuldades presentes em cada uma delas.

Vale a pena destacar ainda um aspecto presente na metodologia de avaliação dos procedimentos de solução de problemas utilizada por Krutetskii (1976), que se faz presente na proposta de Vergnaud (1979) ainda que de maneira implícita, estamos nos referindo ao “pensar em voz alta”.

Pirola (2000) descreveu que, para que Krutetskii pudesse acompanhar o procedimento de solução e o progresso mental dos alunos era solicitado dos mesmos que “pensassem em voz alta”, pois, o teórico acreditava que os problemas matemáticos podiam ser solucionados de diversas maneiras, no entanto, isto não era evidenciado por meio dos resultados dos testes psicológicos. A este respeito Brito (2002) salientou ainda:

> (...) Nos testes tipo “lápis e papel”, o resultado, em termos de análise de pensamento, é restrito, sendo possível verificar apenas o desempenho; nessa maneira de analisar o pensamento durante a solução de problemas, os processos internos, isto é, as intenções, os objetivos, o planejamento e a avaliação são, de certa forma, perdidos (BRITO, 2002, p.22).

Nesse sentido, Vergnaud (1979) ao discorrer sobre a complexidade das representações afirmou a importância de compreendê-las não somente através dos símbolos pelos quais o sujeito tenta representar as coisas, mas especialmente por meio *da ação na solução de problemas*. Podemos perceber que, à medida que a ênfase foi colocada na *ação* do sujeito, permite-se pensar que um dos recursos possíveis é o “pensar em voz alta”

O autor acrescentou ainda que, podemos aprender muito mais sobre o significado de subtração para uma criança ao estudarmos a maneira como ela lida com problemas que exigem o uso de uma subtração. Ao invés, de estudarmos apenas o uso das palavras e sinais referentes à subtração.

Observamos que a preocupação com o ato de investigar a ação da criança durante a solução de problemas se faz presente tanto nos estudos de Krutetskii como também em Vergnaud.

III- PROCEDIMENTOS, MATERIAIS E MÉTODO

Visando compreender melhor a temática da solução de problemas matemáticos, que envolvem estruturas aditivas, bem como verificar as dificuldades dos estudantes durante a solução deste tipo de problema, a presente pesquisa buscou responder à seguinte questão:

Quais as relações entre desempenho e etapas da solução de problemas de estrutura aditiva?

Considerando esse questionamento inicial, o presente estudo buscou *identificar e compreender as dificuldades dos alunos dos anos iniciais do ensino fundamental durante a solução de problemas matemáticos de estruturas aditivas.*

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Verificar os procedimentos que os estudantes utilizam para solucionar problemas matemáticos de estruturas aditivas;
- Analisar se existe diferença de desempenho entre as crianças na solução de problemas de estrutura aditiva relacionada ao ano de escolaridade;
- Identificar dentre as etapas da solução de problemas, proposta por Polya, em quais delas os estudantes apresentam maior dificuldade;

SUJEITOS

Foi selecionada uma amostra de conveniência, composta por uma turma de estudantes matriculados no terceiro, quarto e quinto anos de uma escola pública da rede municipal de Limeira- SP.

A escolha da escola também ocorreu por conveniência, pelo fato da pesquisadora lecionar na instituição há pelo menos oito anos. Isso favoreceu o contato com a direção da unidade escolar para a realização da pesquisa. A referida escola atende a cerca de 520 alunos do 1º ao 5º ano do ensino fundamental. Situa-se em uma região de grande vulnerabilidade social, e considerando os resultados apresentados nas avaliações em larga escala, bem como seu Índice de Desenvolvimento da Educação Básica[8] (IDEB) em

[8] Ideb é o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica, criado em 2007, pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), formulado para medir a qualidade do aprendizado nacional e estabelecer metas para a melhoria do ensino.

2010, a unidade escolar deu início ao atendimento em período integral, a princípio atendendo uma parcela dos estudantes e gradativamente atingindo a todos através da parceria com o governo federal pelo Programa Mais Educação[9].

Desde o ano de 2015 aproximadamente 520 alunos do 1º ao 5º ano estudam em período integral, com uma jornada de trabalho pedagógico de 8 horas diárias, recebendo três refeições ao dia.

A jornada dos alunos do período integral é dividida entre as disciplinas das áreas obrigatórias para o currículo (Português, Matemática, História, Geografia, Ciências, Artes e Educação Física), e complementada com atividades extracurriculares, dentre elas cabe citar aulas de judô, robótica, música, jogos matemáticos, jogos de leitura, informática, entre outras, a maioria com carga horária de 2 horas/ aula semanais.

Destaca-se ainda que a partir do ano de 2016 a unidade escolar se organizou no trabalho por área de ensino, isto é, Língua Portuguesa, Matemática e Ciências Naturais e Humanas (História, Geografia e Ciências). No período da manhã são ministradas as aulas de Língua Portuguesa e à tarde as aulas de Matemática. As disciplinas referentes ao bloco de Ciências Naturais e Humanas ocorrem uma vez por semana, sendo que para 10 das 20 turmas existentes na escola são ministradas no período da manhã e para o restante das turmas no período da tarde.

Cabe ressaltar que apesar da unidade escolar atender os estudantes no período integral, a jornada de trabalho dos docentes não é integral e para atender aos objetivos propostos no trabalho por área, a gestão escolar fez o seguinte arranjo na grade escolar: o professor do período da tarde ministra aulas de matemática para duas turmas do mesmo ano de escolaridade em dias alternados, por exemplo, admitamos duas turmas do 1º ano: A e B. Na segunda-feira das 12:30h às 16:15h lecionará para os estudantes da turma A, e na terça-feira para os estudantes da turma B, seguindo dessa forma, na quarta e quinta-feira. Na sexta-feira esse professor será responsável por lecionar o bloco de Ciências Naturais e Humanas para a turma A no período da tarde. Dessa forma, os

[9] O Programa Mais Educação, criado pela Portaria Interministerial nº 17/2007 e regulamentado pelo Decreto 7.083/10, constitui-se como estratégia do Ministério da Educação para indução da construção da agenda de educação integral nas redes estaduais e municipais de ensino que amplia a jornada escolar nas escolas públicas, para no mínimo 7 horas diárias, por meio de atividades optativas nos macrocampos: acompanhamento pedagógico; educação ambiental; esporte e lazer; direitos humanos em educação; cultura e artes; cultura digital; promoção da saúde; comunicação e uso de mídias; investigação no campo das ciências da natureza e educação econômica.

estudantes possuem 8 horas/aula semanais destinadas exclusivamente às disciplinas de Língua Portuguesa e 8 horas/aula de Matemática, 1 hora/aula semanal de História, 1 hora/aula semanal de Geografia e 2 horas/aula semanais de Ciências.

A idade dos sujeitos selecionados para a pesquisa varia de 8 a 10 anos.

A escolha das respectivas turmas levou em consideração o fato de que os três anos iniciais do Ensino Fundamental são considerados como um ciclo sequencial sem interrupção, e ao final deste, no 3º ano é aplicado um teste de desempenho – Avaliação Nacional da Alfabetização (ANA).

Para os estudantes do 5º ano do ensino fundamental é aplicada a Prova Brasil que compõe o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb).

Desse modo, o terceiro e o quinto anos foram selecionados por já serem avaliados em um exame em larga escala, e o resultado destas avaliações destacarem as dificuldades dos estudantes na solução de problemas. A escolha do quarto ano foi feita por esta representar uma série intermediária, que poderá fornecer dados que contribuam no processo de compreensão das dificuldades apresentadas pelos estudantes.

Em relação à amostra, destaca-se ainda que os estudantes do 5º ano de escolaridade tiveram a oportunidade de cursar do 3º ao 5º ano de escolaridade no período integral; os estudantes do 4º ano cursaram desde o 2º ano de escolaridade no período integral. Enquanto que os estudantes do 3º ano estão matriculados no período integral desde o ingresso no Ensino Fundamental.

INSTRUMENTOS

Visando atingir os objetivos descritos nesse projeto foram utilizados como instrumentos um questionário informativo para caracterizar os sujeitos, e um teste matemático composto por seis problemas de estruturas aditivas.

INSTRUMENTO I – QUESTIONÁRIO INFORMATIVO (ANEXO I)

O presente instrumento é composto por dez questões, sendo que as sete primeiras auxiliaram a compor o perfil dos estudantes, e as demais foram elaboradas com o intuito de extrair dados que pudessem colaborar no processo de compreensão das dificuldades apresentadas pelos estudantes.

INSTRUMENTO II – TESTE DE MATEMÁTICA (ANEXO II)

Um instrumento, tipo lápis e papel, composto por seis problemas de estruturas aditivas, adaptados pelo Grupo de Pesquisa de Psicologia da Educação Matemática da Unicamp tendo como referência os exemplos apresentados por Vergnaud (2014), na obra *L'enfant, La mathématique et La réalité,* traduzido por Maria Lúcia Faria Moro com o título *A criança, a matemática e a realidade: problemas de ensino da matemática na escola elementar.*

Os problemas compreenderam as seis categorias de relações ternárias fundamentais propostas por Vergnaud (2014), e considerando que o objetivo principal da pesquisa é identificar e compreender as dificuldades apresentadas pelos estudantes das séries iniciais na solução de problemas matemáticos de estruturas aditivas foram utilizados valores numéricos pequenos, de forma, que o sujeito durante a solução dos problemas propostos pudesse centrar toda sua atenção para as relações ternárias em jogo.

O problema 1*: "A coleção de Marcelo tem 6 tampinhas azuis e 8 tampinhas verdes. Quantas tampinhas ele tem ao todo?"* pertence a categoria de *composição de medidas,* isto é, duas medidas se compõem para resultar em uma terceira. De acordo com Santana et al (2007) esse problema caracteriza-se em um protótipo de composição, em que se conhecem as partes e se procura o todo, através da operação de adição. Mendonça et al (2007), Santana et al (2009), Magina e Campos (2004) afirmaram que os estudantes em sua maioria não apresentaram dificuldades na solução de problemas deste tipo, mesmo os das séries inicias do ensino fundamental.

Consideramos esse problema o de maior possibilidade de acerto, pois o único raciocínio exigido é a adição de duas quantidades.

O segundo problema proposto era: *" Gabriel tinha 9 cartinhas antes de jogar. Perdeu 4 cartinhas. Quantas cartinhas ele tem agora?"* De acordo com a classificação proposta por Vergnaud (2014) o problema P2 corresponde a segunda categoria que envolve a *transformação de uma medida*, quer dizer, trata-se de um protótipo de estrutura aditiva de transformação, com o estado inicial (9) e transformação negativa (-4) conhecidos, e solicita-se o estado final (F), pela operação da subtração.

A resposta correta esperada é: Gabriel tem agora 5 cartinhas. E para obter essa resposta, o estudante necessita dominar os conceitos de transformação e de subtração.

Santana et al (2007) destacaram uma taxa de acerto de 70% para um problema similar aplicado em seus estudos. Dessa forma, por se tratar ainda de uma situação protótipo acredita-se que a maioria dos estudantes conseguirão solucionar esse problema sem maiores dificuldades.

Vergnaud (2014) classificou o problema 3: *"Maria tem 8 bonecas. Laura tem 5 a menos que Maria. Quantas bonecas Laura tem?"* como um problema pertencente a categoria de comparação, quer dizer, uma relação que liga duas medidas. A este respeito Nunes et al (2009) destacaram que a dificuldade dos estudantes concentra-se em quantificar a comparação. Os autores apontaram que, dentre uma série de fatores que justificaria essa dificuldade o mais relevante deles parece ser o fato "(...) *de que os alunos identificam as ideias de adição e subtração com mudanças nas quantidades*" (Nunes et al, 2009, p.54). Dessa maneira, considerando que nos problemas comparativos não ocorre mudanças nas quantidades, os estudantes não conseguem raciocinar de imediato sobre as relações quantitativas envolvidas no problema.

Por essa razão esperamos um índice de acerto inferior aos dois primeiros, por ser um problema que envolve um raciocínio mais aprimorado, visto que exige da criança operações de pensamento mais elaboradas (VERGNAUD, 1986; NUNES e BRYANT, 1997).

Moretti e Brandt (2014) salientaram ainda que nesse tipo de problema, o referente é conhecido (Maria tem 8 bonecas). O aluno precisará "subtrair 5 de 8" porque o valor 5 trata-se do referido (Laura tem 5 bonecas a menos) e a solução poderá ser obtida a partir do valor conhecido 8. Nesse contexto, a não congruência semântica entre a expressão "5 a menos" e a forma de solucionar "-5" não se manifestará. Todavia, ressaltaram que isso ainda dependerá do procedimento utilizado para a realização dessa subtração.

O quarto problema (P4): "*Bruno jogou duas partidas de bolinha de gude. Na primeira partida ele ganhou 16 bolinhas. Na segunda partida perdeu 9. Ao final, o que aconteceu? "* foi categorizado por Vergnaud (2014) como de *composição de transformações* que consiste em duas transformações que se compõem e resultam em uma transformação. Em outras palavras são duas transformações, uma positiva (+16) e a outra negativa (-9), e se procura uma terceira (ganhou 7) que é resultado direto da composição feita entre as duas que foram dadas.

O autor destacou ainda que nesse caso é necessário juntar dois números de sinais contrários, o que, de fato se traduz por uma subtração: retira-se do valor absoluto da primeira transformação, o valor absoluto da segunda transformação, que é menor.

Ainda que esse problema apresente um grau de complexidade maior em relação aos três anteriores, acredita-se que uma parcela considerável dos estudantes consigam realizar com êxito, pois a proposição do problema traz de forma explícita a expressão "perdeu", que de certa forma, poderá induzi-los para o uso da operação de subtração.

O quinto problema (P5): "*Rian devia 12 cartinhas para Henrique. Ele devolveu 7. Quantas cartinhas ele ainda deve para Henrique?*" pertence à categoria da *transformação de uma relação.* De acordo com Santana (2010) nessa categoria é dada uma relação estática e uma transformação e se busca outra relação que é exatamente gerada quando a transformação dada opera sobre a relação estática dada (relação-transformação-relação).

Nesse problema são dadas uma relação estática negativa (devia 12) e uma transformação positiva (devolveu 7). Por meio da transformação dada se busca uma nova relação estática (ficou devendo?). Apesar da estrutura da situação apresentar um nível de complexidade mais elevado que as anteriores, torna-se mais simples à medida que denota uma situação do cotidiano das crianças. Acredita-se que por essa razão os estudantes poderão ter mais facilidade no processo de compreensão do problema e, consequentemente um bom desempenho.

Por último, o sexto problema (P6): *"Isabeli deve 8 figurinhas a Giovana, mas Giovana lhe deve 5. Então qual é a quantidade de figurinhas que Isabeli deve a Giovana?",* refere-se à categoria *composição de relações.* Santana (2010) apontou que nessa categoria são dadas duas relações estáticas e se busca uma terceira decorrente da composição dessas duas.

No problema proposto temos: "deve 8" como a primeira relação estática; a segunda evidenciada pela expressão "lhe deve 5" (no sentido de ter em haver 5) e a terceira que é caracterizada por "deve?", ou seja, o quanto ainda deve.

Segundo Santana et al (2009) a categoria da composição de relações é muito pouco trabalhada em sala de aula, atrelando ao fato de esse ser o problema mais complexo do instrumento, esperamos um baixo índice de acertos.

PROCEDIMENTO DE COLETA DE DADOS

A coleta de dados foi realizada pela pesquisadora, e para a autorização da mesma inicialmente a direção da escola foi contatada e, na ocasião, foram explicitados os objetivos da pesquisa. Após a direção escolar ter demonstrado interesse em que a escola participasse da pesquisa foi encaminhado um pedido por escrito solicitando a autorização para a coleta de dados.

Com o documento de autorização para a coleta de dados emitido pela unidade escolar, o presente projeto foi submetido ao Cômite de Ética da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), que emitiu a aprovação para a coleta de dados (número CAAE 73265517.7.0000.5404).

Antes da aplicação dos instrumentos, foi realizada uma breve apresentação e um esclarecimento à equipe gestora, professoras e aos estudantes acerca do propósito central da pesquisa. Nesta, cabe destacar que um dos pontos evidenciados foi o anonimato dos participantes.

Previamente à aplicação dos instrumentos foi solicitada aos pais/responsáveis a autorização para participação do (a) filho (a) no estudo. Ressaltando que a participação do estudante ficaria vinculada à assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (ANEXO III) pelos responsáveis legais, bem como à assinatura do Termo de Assentimento pelo estudante (ANEXO IV).

Os instrumentos foram aplicados na mesma ordem em que são apresentados nesse projeto de pesquisa. O tempo estimado para aplicação dos instrumentos foi de 2 horas e 40 minutos divididos em dois dias, considerando que a escola selecionada para a coleta de dados funciona em período integral, e nesta proposta a grade é composta por diversas atividades extracurriculares, denominadas pela unidade escolar de “Oficinas”[10]. Esta organização da coleta de dados foi realizada no momento das oficinas, e desta forma, não acarretou prejuízo no que diz respeito às aulas ministradas pelo professor responsável pelas áreas de Língua Portuguesa, Matemática, Geografia, Ciências e História.

[10] Segundo instruções obtidas junto à Direção Escolar as oficinas são ministradas para os estudantes em um período de 1h e 20 minutos, e a coleta de dados deveria ocorrer neste momento, sem interferir nas aulas ministradas pelos docentes responsáveis por cada turma.

O primeiro dia da coleta de dados consistiu no esclarecimento e assinatura do termo de assentimento pelos estudantes que tiveram a autorização dos seus respectivos responsáveis para a participação na pesquisa mediante a assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Neste dia foi aplicado também o questionário informativo. Destaca-se que ambos os documentos contaram com a leitura realizada pela pesquisadora de forma a garantir a compreensão para todos os sujeitos.

No segundo dia previamente agendado com a direção, a pesquisadora retornou para a aplicação do instrumento II que consistiu no teste de matemática. A aplicação deste instrumento foi no coletivo, a pesquisadora *a priori* retomou com os estudantes a finalidade do teste que seria aplicado, ressaltando que o desempenho deste não estaria atrelado ao seu desempenho escolar. Esclareceu-se ainda para os estudantes que a pesquisadora não realizaria a leitura do teste em voz alta, de forma, que cada um deveria fazê-la, acrescentando-se ainda a importância de realizá-lo individualmente. Posto isto, e após garantir que todos os estudantes possuíssem os materiais escolares necessários para a realização do teste, deu-se o seu início.

PROCEDIMENTO DE CORREÇÃO E ANÁLISE

O teste foi corrigido de duas maneiras: a primeira considerou as questões “certas” ou “erradas” atribuindo pontos de zero a dez, tendo sido dada uma nota, obtida pela pontuação em cada problema.

A atribuição dos pontos de cada problema baseou-se na análise das seis categorias de estruturas aditivas apresentadas por Vergnaud (2014), além da revisão de literatura. Os pontos foram atribuídos de acordo com a ordem crescente do grau de complexidade característico a cada categoria, quer dizer, partimos do menos para o mais complexo. Consequentemente, os pontos foram conferidos da seguinte forma: o primeiro e segundo problema um ponto para cada; para o terceiro e quarto um ponto e meio para cada; para o quinto problema foi atribuído dois pontos, e por fim três pontos para o sexto problema.

Na segunda forma de correção se atribuiu uma pontuação de acordo com o conjunto de procedimentos desenvolvidos pelo sujeito, variando entre 0 e 30 pontos, de acordo com o sistema elaborado por Charles (apud LIMA 2001), a saber:

Figura 10 - Sistema de pontuação elaborado por Charles variando entre 0 e 30 pontos.

PONTUAÇÃO	DESCRIÇÃO
0	Devolve o problema “em branco” (sem solução). Números copiados do problema; não entendimento do problema evidenciado. Resposta incorreta, sem evidenciar o desenvolvimento da solução.
1	Iniciou usando estratégia inapropriada; não concluiu a solução do problema. Abordagem sem sucesso; não tentou abordagem diferente. Tentativa falha de alcançar um sub-objetivo.
2	Estratégia apropriada foi usada; não encontrou a solução ou alcançou um sub-objetivo, mas não terminou a solução. Estratégia inadequada, que revele algum entendimento do problema. Resposta correta e procedimento de solução não mostrado.
3	Estratégia apropriada, porém o sujeito: Ignorou a condição do problema. Deu uma resposta incorreta sem razão aparente. Falta de clareza no procedimento empregado.
4	Estratégia (s) apropriada (s) Desenvolvimento da solução reflete entendimento do problema. Resposta incorreta por um erro de cópia ou de cálculo.
5	Estratégia (s) apropriada (s) Desenvolvimento da solução reflete entendimento do problema. Resposta correta.

Fonte: LIMA, 2001.

Os dados coletados no questionário informativo e no teste de matemática foram submetidos à análise exploratória de dados (estatística descritiva), sendo que esta, de acordo com Vendramini (2007, p.77) “é utilizada para organizar, medir, analisar e apresentar os dados referentes às variáveis de uma pesquisa”. Ressalta-se ainda que esta análise pode ser aplicada a qualquer conjunto de dados de origem qualitativa ou quantitativa.

Além disso, algumas análises estatísticas foram realizadas com o software IBM SPSS, com nível de significância de 0,05.

IV- ANÁLISE DE DADOS

Este capítulo apresenta a descrição e análise dos dados obtidos, em três partes. Na primeira parte, traçamos o perfil dos estudantes segundo as variáveis demográficas como gênero e idade e as variáveis relativas a reprovação anterior, hábito de estudo e autopercepção sobre dificuldade e resolução de problemas matemáticos. Na segunda parte apresentamos o desempenho global dos estudantes nos problemas matemáticos, a partir da variável "Nota" e da pontuação obtida na escala de Charles. Na terceira parte apresentamos uma análise dos problemas: num primeiro momento uma análise comparativa das taxa de acerto global, obtida a partir do desempenho do estudantes em cada um dos seis problemas e, a outra esmiuçando o desempenho dentro do problema por ano escolar e tipo de solução, representação etc.

4.1 Perfil dos sujeitos

A presente pesquisa foi realizada com 23 estudantes do 3º ano, 21 do 4° ano e 20 do 5º ano, totalizando 64 estudantes, do primeiro ciclo do ensino fundamental de uma escola municipal, situada no interior do estado de São Paulo. A distribuição dos sujeitos por idade e gênero e segundo ano escolar, se encontra na Tabela1, onde podemos verificar que as idades variaram de 8 a 12 anos, sendo 36 (56,3%) do gênero masculino e 28 (43,8%) do gênero feminino.

Tabela 1 - Distribuição da amostra por idade e gênero, segundo ano escolar

Idade	3º ano			4º ano			5ºano			Total
	Mas.	Fem.	Total	Mas.	Fem.	Total	Mas.	Fem.	Total	
8	4	6	10							10
9	8	5	13	1	2	3				16
10				11	6	17	1	4	5	22
11				1		1	8	5	13	14
12							2		2	2
Total	12	11	23	13	8	21	11	9	20	64

Fonte: Dados da Pesquisa.

Quanto à relação idade/ano podemos verificar uma ligeira defasagem para o ano escolar. As médias das idades por gênero mostraram-se próximas no 3º ano, 4º ano e no

total, apenas no 5º ano, as meninas são um pouquinho mais jovens conforme resultados do teste *t-student*, constantes na Tabela 2.

Tabela 2 – Relação Idade/ano escolar por gênero segundo ano escolar

Ano	Masculino			Feminino			t-student		
	n	Média	*DP*	n	Média	*DP*	gl	valor	p-valor
3º	12	8,67	0,492	11	8,45	0,522	21	1,003	0,327
4º	13	10,00	0,408	8	9,75	0,463	19	1,296	0,250
5º	11	11,09	0,539	9	10,56	0,527	18	2,231	0,039
Total	36	9,89	1,090	28	9,50	1,036	62	1,447	0,153

Fonte: Dados da Pesquisa *gl: graus de liberdade

Foi questionado aos estudantes sobre o seu histórico de aprovação escolar. Do total de 64 estudantes, 07 (sete) crianças informaram que já haviam sido reprovadas, sendo que a maioria reprovou no 3º ano, conforme Tabela 3.

Tabela 3 - Distribuição da amostra por ano que reprovou segundo o ano cursando

Que ano reprovou	Ano escolar cursando			Total
	3º ano	4º ano	5º ano	
1º ano	0	0	1	1
3º ano	1	2	1	4
5º ano	0	0	2	2
Não reprovou	22	19	16	57
Total	23	21	20	64

Fonte: Dados da Pesquisa

A maior incidência de reprovações no 3º e 5º anos pode estar relacionada ao sistema de progressão continuada. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), de 1996 propõe a progressão continuada organizada em forma de ciclos, tendo em vista o conhecimento como processo e vivência ininterruptos, mas sim de construção contínua de significados a partir das relações dos homens com o mundo entre si. Ressalta-se ainda que um dos objetivos da adoção desse regime é eliminar a defasagem idade/série (MENEZES e SANTOS, 2001). E nesta perspectiva a reprovação do estudante ocorre nos anos finais de cada ciclo, por exemplo, no caso do ensino fundamental I que compreende

do 1º ao 5º ano de escolaridade, os alunos poderão ser retidos no 3º e no 5º ano de escolaridade.

Em relação ao estudo da matemática em outros contextos, além do ambiente escolar, foi questionado aos participantes se estes recebem alguma ajuda durante o seu estudo ou a realização de tarefas de matemática. Do total, 44 (68,8%) participantes responderam que recebem alguma ajuda quando realizam suas tarefas em casa, sendo isto mais frequente no 5º ano conforme Tabela 4.

Tabela 4 – Ajuda que recebe no estudo de matemática, em função do ano de escolaridade

Recebe	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
ajuda?	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Sim	16	69,6	9	42,9	19	95,0	44	68,8
Não	7	30,4	12	57,1	1	5,0	20	31,3
Total	23	100,0	21	100,0	20	100,0	64	100,0

Fonte: Dados da Pesquisa.

Quando questionado aos estudantes quem são as pessoas que mais lhe ofertam auxílio durante os estudos dos conteúdos matemáticos, 48,4% (n=31) dos sujeitos informaram que são os pais que lhes ajudam, isto é, os resultados mostram os pais como sendo os maiores apoiadores. Os tios e irmãos também foram citados como pessoas que ofertam auxílio durante seus estudos. Esses dados indicam que há uma preocupação por parte da família no que diz respeito às realizações das tarefas escolares das crianças.

Com relação à frequência com que os alunos estudam os conteúdos de matemática, 50% respondeu que sempre estudam matemática, 39,1% estudam matemática somente na véspera da prova e 10,9% nunca estudam matemática. Observamos que a maioria dos estudantes do 4º ano estudam sempre; já os do 3º, se dividem entre quase sempre e na véspera da prova e os do 5º ano entre na véspera da prova e nunca, conforme Tabela 5.

Tabela 5 – Frequência com que o aluno estuda matemática em função da série

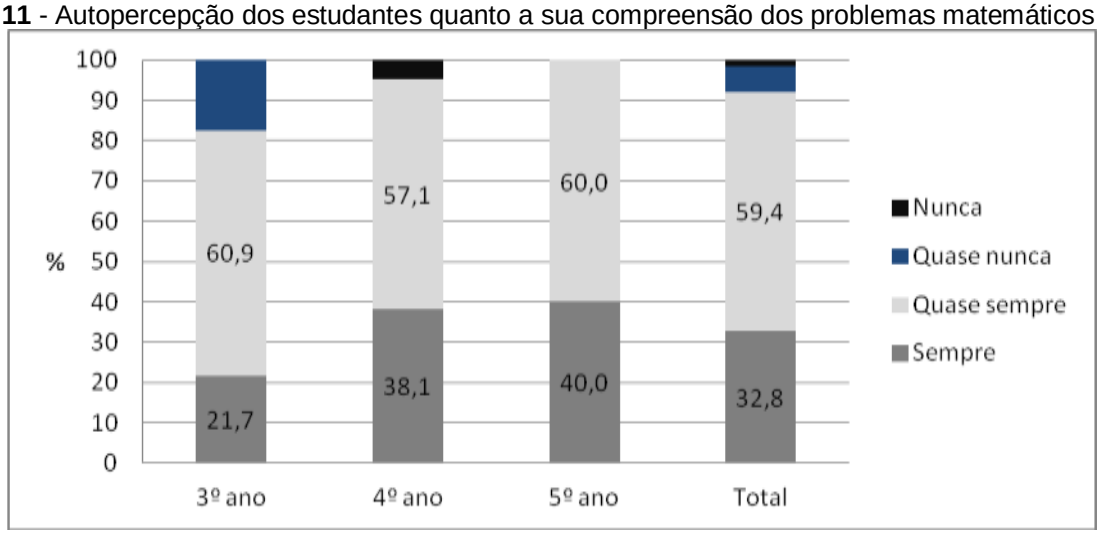
Frequência de estudo	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Sempre	12	52,2	17	81,0	3	15,0	32	50,0
Na véspera da prova	11	47,8	3	14,3	11	55,0	25	39,1
Nunca	0	0,0	1	4,8	6	30,0	7	10,9
Total	23	100	21	100	20	100	64	100

Fonte: Dados da Pesquisa

Pode-se deduzir que para 50% dos estudantes a realização de estudos em casa, não é um hábito, ainda que não tenha sido investigado se isso é decorrente do fato dos professores não enviarem tarefas para serem realizadas em casa ou pelo motivo de não serem estimulados a estudar fora do horário de aula. Essa falta de hábito de um estudo sistemático pode estar relacionada à uma boa compreensão das explicações do professor em sala de aula, dispensando a necessidade de estudos fora do horário das aulas; mas por outro lado, pode indicar a necessidade da escola desenvolver junto aos estudantes hábitos de estudos que não estejam vinculados a situações avaliativas.

Na Figura 11 apresentamos a distribuição dos sujeitos de acordo com sua autopercepção da capacidade de entendimento ou compreensão em relação aos problemas aritméticos dados em sala de aula. De um modo geral, os dados apontam para um alto índice de autopercepção de compreensão dos problemas dados em sala de aula, são poucos os estudantes que assinalaram não compreender os problemas.

Figura 11 - Autopercepção dos estudantes quanto a sua compreensão dos problemas matemáticos



Fonte: Dados da Pesquisa

Analisando a relação entre a frequência de estudo com a autopercepção de compreensão dos problemas matemáticos declarada pelos estudantes (Tabela 6), podemos verificar que a frequência de estudo não interfere na compreensão do problema matemático percebida pelos alunos, conforme os resultados do teste Qui-quadrado ($\chi^2_{(4)}$ = 5,047; p = 0,283).

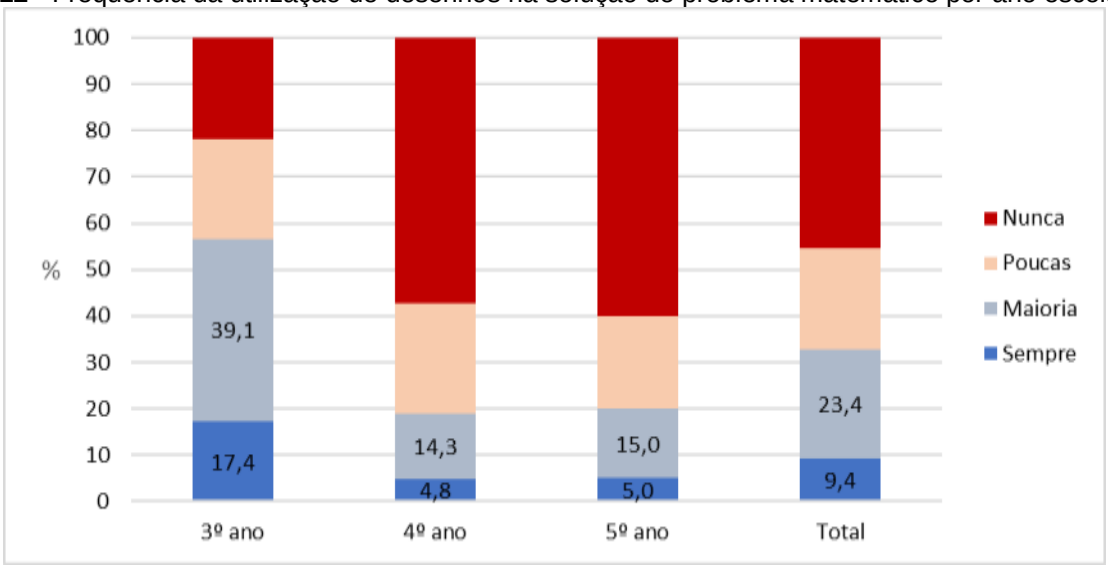
Tabela 6 - Relação entre a autopercepção da compreensão dos problemas matemáticos com a frequência de estudo

Entende problemas matemáticos	Frequência de estudo de matemática						Total	
	Sempre		Quase sempre		Nunca			
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Sempre	12	37,5	5	20,0	4	57,1	21	32,8
Quase sempre	18	56,3	18	72,0	2	28,6	38	59,4
Nunca, quase nunca	2	6,3	2	8,0	1	14,3	5	7,8
Total	32	100,0	25	100,0	7	100,0	64	100,0

Fonte: Dados da Pesquisa

Com relação à utilização de desenhos no momento em que estão resolvendo os problemas de matemática na sala de aula, podemos verificar na Figura 12 que esta prática é mais frequente no 3º ano, e quase abandonada no 4º e 5º anos, embora essa relação não tenha sido significativa conforme teste Qui-quadrado ($\chi^2_{(6)}$ = 10,726; p = 0,097).

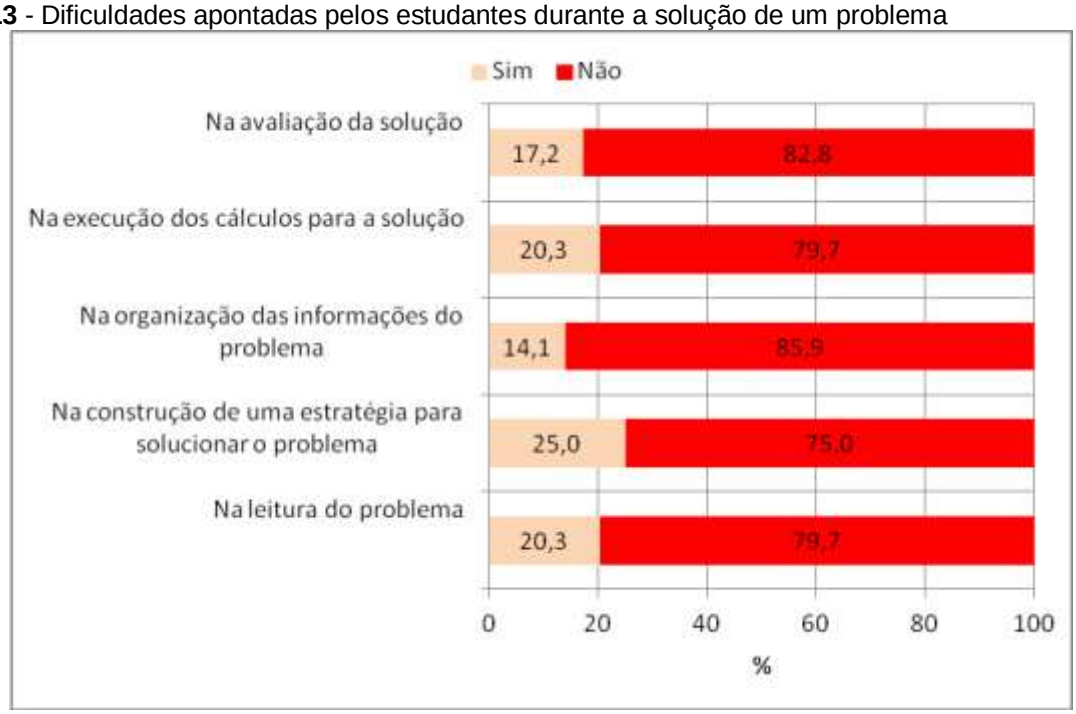
Figura 12 - Frequência da utilização de desenhos na solução do problema matemático por ano escolar



Fonte: Dados da Pesquisa

Na Figura 13 apresentamos as dificuldades percebidas pelos alunos nas diferentes etapas da solução dos problemas matemáticos. A etapa *Construção de uma estratégia* foi a que registrou o maior percentual de dificuldade apontada pelos estudantes (25%), seguido das etapas *Leitura do problema* e *Execução dos cálculos* que registraram 20,3%. O item *Organização das informações do problema* foi o menos apontado pelos estudantes, registrando 14,1%.

Figura 13 - Dificuldades apontadas pelos estudantes durante a solução de um problema



Fonte: Dados da Pesquisa

Considerando as dificuldades apontadas pelos estudantes durante a solução de um problema matemático dado em sala de aula buscou-se estabelecer uma relação com esses dados e as etapas de solução propostas por Polya (2006). Para que pudéssemos traçar esse paralelo a 3ª e a 4ª categorias declaradas pelos estudantes foram agrupadas, respectivamente, *Organização das informações* e *Execução dos Cálculos*, conforme indicados na Figura 14.

Figura 14 - Quadro de comparação entre os passos propostos por Polya (2006) e as dificuldades declaradas pelos estudantes

As quatro fases propostas por Polya (2006)	Dificuldade declarada pelo estudante
1º Compreensão do problema	Leitura do problema
2º Estabelecimento de um plano	Construção de uma estratégia
3º Execução de um plano	Organização das informações e Execução dos Cálculos
4º Retrospecto	Avaliação

Fonte: A autora

Analisando os dados mostrados na Figura 13, apoiado nas informações da Figura 14 é possível observar que os estudantes de um modo geral declararam que a maior dificuldade está relacionada ao terceiro passo proposto por Polya (2006), a saber: *Execução de um plano (*34,4%). Polya (2006) destacou que conceber um plano, uma ideia para a solução não é tarefa fácil, pois exigirá bons hábitos mentais e de concentração no objetivo. Todavia, ressaltou que a execução do plano é mais fácil, no entanto, nessa fase os detalhes não podem passar despercebidos, ou seja, é necessário examiná-los, um após o outro, pacientemente, para que não reste nenhuma dúvida que possa incorrer num erro. Nesta perspectiva, a execução do plano implica na organização das informações, além da execução dos cálculos.

Pozo (1998, p.27) fundamentado em Polya descreveu que a *Execução do Plano* "*consiste em desenvolver o plano que havia sido previamente elaborado e transformar o problema por meio das regras conhecidas*". Desse modo, realizamos o agrupamento das duas categorias conforme mostra a Figura 14, apoiados nas perspectivas apresentadas por Polya (2006).

Sternberg (2008) destacou que a *Organização da Informação* compreende a organização da informação disponível, de um modo que possibilite a execução da estratégia, quer dizer, o sujeito deve organizar as informações encontrando uma representação que o habilite da melhor forma. Acreditamos que uma das representações possíveis para os estudantes possa ser por meio dos cálculos numéricos e caso essa seja a escolha do estudante, de acordo com Mayer (1992) exigirá do solucionador do problema a capacidade de realizar operações, que por sua vez está relacionada ao conhecimento algorítmico. Nas palavras do autor o conhecimento algorítmico refere-se ao procedimento para a realização de uma operação planejada, tal como o cálculo computacional, que no

caso desta pesquisa pode-se traduzir nos cálculos numéricos que os estudantes realizaram para chegar a resposta.

Na Tabela 7 apresentamos a porcentagem de estudantes que afirmaram ter dificuldade em cada etapa, por ano escolar, bem como o resultado do teste Qui-quadrado para verificar se havia alguma relação entre a dificuldade na etapa e o ano escolar. Apenas na primeira etapa *Na leitura do problema* a diferença entre 34,8% dos estudantes do 3º ano, versus o 20% dos estudantes do 4º e 5º ano, que foi significativa, nas outras etapas não houve relação.

Tabela 7 - Dificuldades apontadas pelos estudantes nas etapas da solução de problemas matemáticos por ano escolar

Etapas que encontra mais dificuldade	Ano escolar (%)				Teste qui-quadrado		
	3º ano	4º ano	5º ano	Total	Valor	gl	p-valor
Na leitura do problema	34,8	4,8	20,0	20,3	6,114[a]	2	**0,047**
Na construção de uma estratégia	34,8	14,3	25,0	25,0	2,46	2	0,292
Na organização das informações	21,7	9,5	10,0	14,1	1,753[a]	2	0,416
Na execução dos cálculos	13,0	23,8	25,0	20,3	1,181[a]	2	0,554
Na avaliação da solução	21,7	9,5	20,0	17,2	1,312[a]	2	0,519

Fonte: Dados da Pesquisa

Analisando as dificuldades apontadas pelos estudantes do 3º ano verificamos que essas se concentram nas duas primeiras etapas (34,8%). Já no 4º ano de escolaridade a maior dificuldade declarada pelos estudantes está relacionada à *Execução dos Cálculos*, e para os estudantes do 5º ano a *Construção de uma estratégia* e a *Execução dos Cálculos* aparecem como as mais citadas com 25%.

É possível perceber pelos dados da Tabela 7 que os estudantes do 4º ano, com exceção da etapa *Execução dos Cálculos*, foi o ano de escolaridade que declarou a menor porcentagem de dificuldade nas demais etapas. Observa-se ainda que os estudantes do 3º ano foram os que declararam a menor porcentagem de dificuldade na etapa *Execução dos Cálculos* (13%).

Quando associamos esses dados aos apresentados na Figura 12, embora essa relação não seja estatisticamente significativa, observamos que 32,8% dos estudantes declararam que “sempre” e na “maioria das vezes” utilizam desenhos para solucionar os problemas. Embora, não tenha sido verificado se isso ocorre porque os estudantes apresentam dificuldades na realização dos cálculos, ou porque os alunos preferem utilizar os desenhos como representação na solução dos problemas, ou ainda se eles têm sido incentivados ou não a utilizar os cálculos numéricos como representação na solução de problemas.

A Tabela 8 mostra as dificuldades declaradas pelos estudantes relacionadas às etapas de solução de problemas propostas por Polya (2006).

Tabela 8 - Dificuldades apontadas pelos estudantes nas etapas da solução de problemas matemáticos associadas às etapas propostas por Polya (2006), por ano escolar

	Ano escolar			
As quatro fases propostas por Polya (2006)	3º ano	4º ano	5º ano	Total
Compreensão do problema	34,8	4,8	20,0	20,3
Estabelecimento de um plano	34,8	14,3	25,0	25,0
Execução de um plano	34,7	33,3	35,0	34,4
Retrospecto	21,7	9,5	20,0	17,2

Fonte: Dados da Pesquisa

Em relação aos resultados apresentados para o 3º ano de escolaridade, quando associados às etapas propostas por Polya (2006) percebemos que os índices das três primeiras fases se aproximam, respectivamente, 34,8%; 34,8% e 34,7%.

Para complementar esta análise criamos a variável “Número de etapas com dificuldades percebidas”, que varia de 0 a 4, os resultados se encontram na Tabela 9. Podemos verificar que a maioria dos estudantes dos três anos escolares manifestaram ter dificuldade em apenas uma etapa, sendo que os do 4º ano, 42,9% afirmaram não ter nenhuma dificuldade. Já os estudantes do 3º ano 17,3 afirmaram ter dificuldade em duas ou mais etapas.

Tabela 9 - Distribuição do número de etapas com dificuldades percebidas pelos estudantes, por ano escolar

Nº de etapas com dificuldade	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
0	1	4,3	9	42,9	0	0,0	10	15,6
1	18	78,3	11	52,4	20	100,0	49	76,6
2	2	8,7	1	4,8	0	0,0	3	4,7
3	1	4,3	0	0,0	0	0,0	1	1,6
4	1	4,3	0	0,0	0	0,0	1	1,6
Total	23	100,0	21	100,0	20	100,0	64	100,0

Fonte: Dados da Pesquisa

4.2 Análise do desempenho dos estudantes

Nesta parte analisamos o desempenho dos estudantes nos problemas matemáticos, subdividido em duas seções, uma dedicada ao desempenho do estudante global de cada estudante, a partir da variável “Nota” e da pontuação na escala de Charles, obtida a partir do desempenho dos estudantes nos seis problemas.

O teste matemático (Anexo II) constava de seis problemas de estruturas aditivas de autoria de Vergnaud (2014) e adaptados pelo Grupo de Pesquisa de Psicologia da Educação Matemática da Unicamp para fins desta pesquisa.

A variável “Nota” foi obtida pela soma de pontos atribuídos a cada um dos seis problemas que compunham o teste matemático. Cada problema foi corrigido como certo obtendo a pontuação máxima do problema ou zero caso contrário (Em branco ou errado). Cada problema foi pontuado de acordo com o seu grau de complexidade, conforme segue P1 (1 ponto); P2 (1 ponto); P3 (1,5 pontos); P4 (1,5 pontos); P5 (2 pontos) e P6 (3 pontos). Logo essa variável poderia tomar valores entre zero e dez pontos.

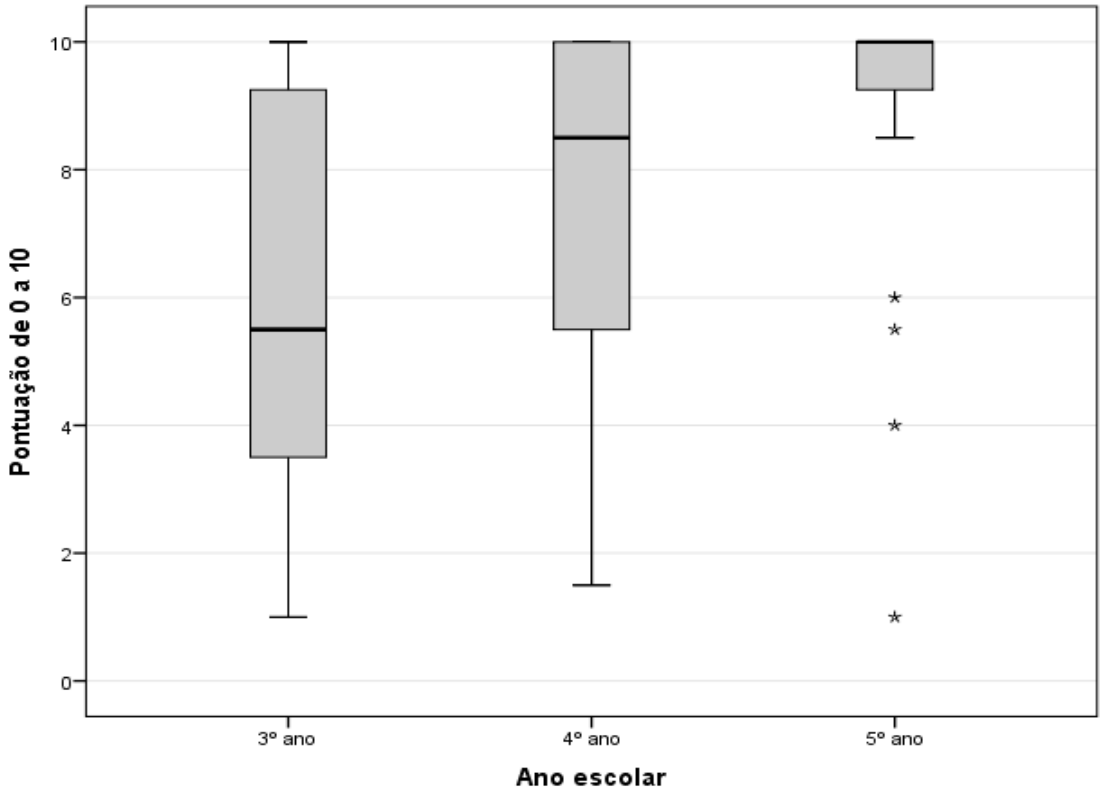
Na tabela 10 e Figura 15 apresentamos o desempenho dos estudantes por ano escolar e verificamos que há um ganho significativo na nota à medida que se progride na escolarização, conforme resultado do Teste F ($F_{(2,61)} = 5,839$; $p = 0,005$).

Tabela 10 - Estatísticas relativas ao desempenho dos estudantes por ano escolar

Ano escolar	Nº de sujeitos	Média (*)	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
3º ano	23	5,74a	3,12	1,00	10
4º ano	21	7,12ab	2,90	1,50	10
5º ano	20	8,75b	2,56	1,00	10
Geral	64	7,13	3,10	1,00	10

(*) Médias com letras iguais não diferem estatisticamente conforme o teste de comparações múltiplas de Tukey.

Figura 15 - Desempenho dos estudantes segundo o ano escolar



Fonte: Dados da Pesquisa

Na Figura 15 podemos ver que no 5º ano há quatro estudantes que obtiveram notas muito abaixo de 8 pontos o que puxou a média para baixo, possibilitando que o teste de Tukey não detectasse um desempenho superior do 5º ano com relação ao 4º ano.

Em relação aos estudantes do 5º ano que obtiveram notas inferiores a 8 pontos verificamos que se tratam de dois meninos (E55 e E64) e duas meninas (E52 e E57),

sendo que os dois meninos já têm um histórico de reprovação, o E55 reprovou o 5º ano, e o estudante E64 já reprovou o 4º e o 5º ano de escolaridade.

Na ocasião os quatro estudantes declararam que recebem ajuda para a realização das tarefas de casa, sendo que são os pais seus maiores apoiadores. Com relação à frequência com que estudam os conteúdos de matemática, dois responderam que estudam matemática somente na véspera da prova e dois responderam que nunca estudam matemática, o que pode ajudar a explicar o mau desempenho deles.

Quanto à autopercepção da capacidade de entendimento ou compreensão em relação aos problemas aritméticos dados em sala de aula os quatro estudantes responderam que quase sempre entendem os problemas dados durante a aula, o que aparentemente é uma autopercepção incorreta da realidade.

Ante esta breve caracterização desses estudantes percebemos que de um modo geral não possuem uma rotina sistemática de estudos fora da sala de aula e neste caso, essa falta de hábito provavelmente não está relacionada à uma boa compreensão das explicações do professor, haja vista, os resultados obtidos no teste matemático.

Acredita-se que dentre os quatro estudantes, provavelmente dois deles também apresentem dificuldades na disciplina de Língua Portuguesa, uma vez que ambos declararam que durante a solução de um problema dado em sala de aula apresentam maior dificuldade na “Leitura do problema”.

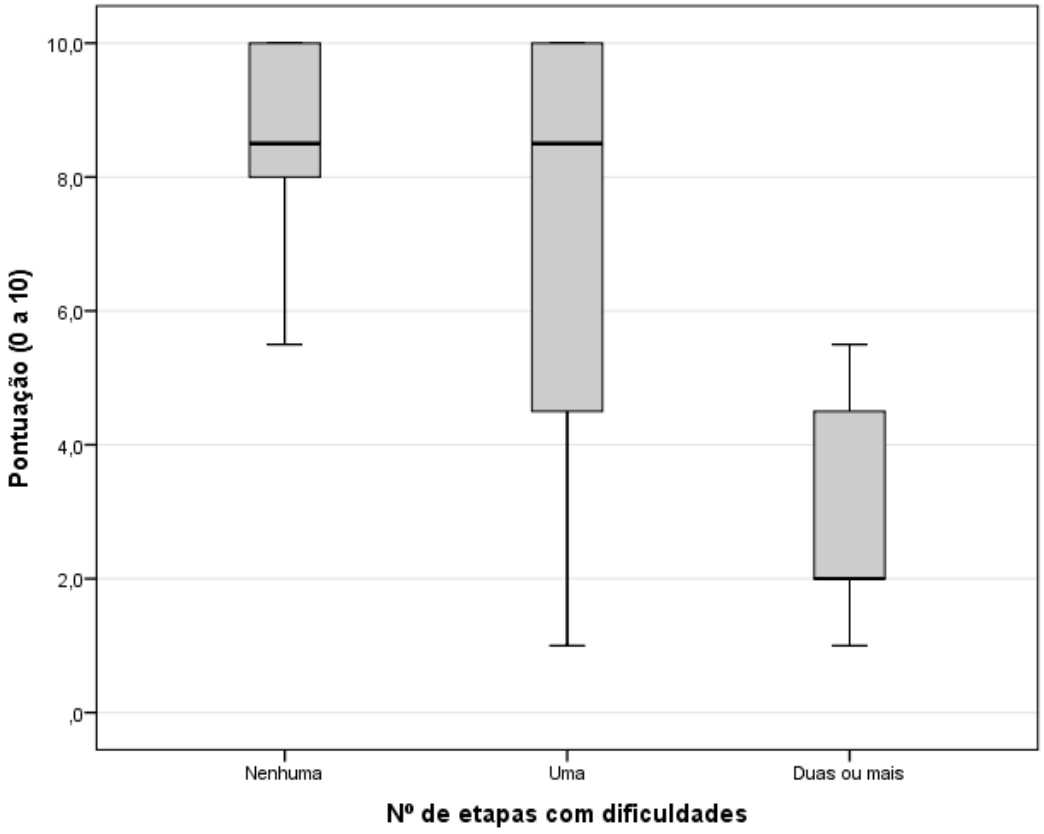
Visando analisar a relação entre o desempenho no instrumento e a autopercepção de dificuldade nas cinco etapas da resolução de problemas, criamos a variável “Número de etapas com dificuldade”, que agrupamos em três classes: nenhuma etapa, uma etapa, duas ou mais etapas. Na Tabela 11 e na Figura 16 apresentamos os resultados e podemos observar que o desempenho está fortemente ligado à autopercepção de dificuldade, conforme o resultado do teste F ($F_{(2,61)} = 6,621$; $p = 0,002$), o desempenho cai de acordo com o número de etapas com autopercepção de dificuldade, sendo que o teste de comparações múltiplas de Tukey sinaliza que apenas o desempenho dos estudantes que indicaram ter dificuldade em duas etapas ou mais se distancia significativamente dos outros.

Tabela 11- Estatísticas relativas ao desempenho dos estudantes por autopercepção de dificuldades

Nº de etapas que sente dificuldade	N	Média (*)	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
Nenhuma	10	8,600 a	1,5055	5,5	10,0
Uma	49	7,255 a	3,0993	1,0	10,0
Duas ou mais	5	3,000 b	1,9039	1,0	5,5
Total	64	7,133	3,0954	1,0	10,0

(*) Médias com letras iguais não diferem estatisticamente conforme o teste de comparações múltiplas de Tukey.

Figura 16 - Desempenho dos estudantes segundo número de etapas que sente dificuldades



Fonte: Dados da Pesquisa

Retomando os resultados da Tabela 11 verificamos que na última categoria (duas etapas ou mais) estão os 4 estudantes do 3º ano e um do 4º ano.

Em relação aos estudantes do 3º ano que declararam dificuldade em duas ou mais etapas durante a solução de um problema, um dele declarou que já reprovou o 3º ano. Os demais não são repetentes e demonstraram estar habituados a estudar matemática, pois, quando perguntados sobre a periodicidade do estudo da matemática esses declararam

sempre estudar matemática. A estudante do 4º ano não registrou reprovação em nenhum ano de escolaridade e declarou estudar somente na véspera da prova.

Pela análise dos protocolos desses sujeitos foi possível constatar que a “Leitura do problema”, a “Organização das Informações” e a “Avaliação da Solução” foram as etapas mais indicadas como fator de dificuldade na solução de problemas para três dos cinco estudantes que apresentaram duas ou mais dificuldades.

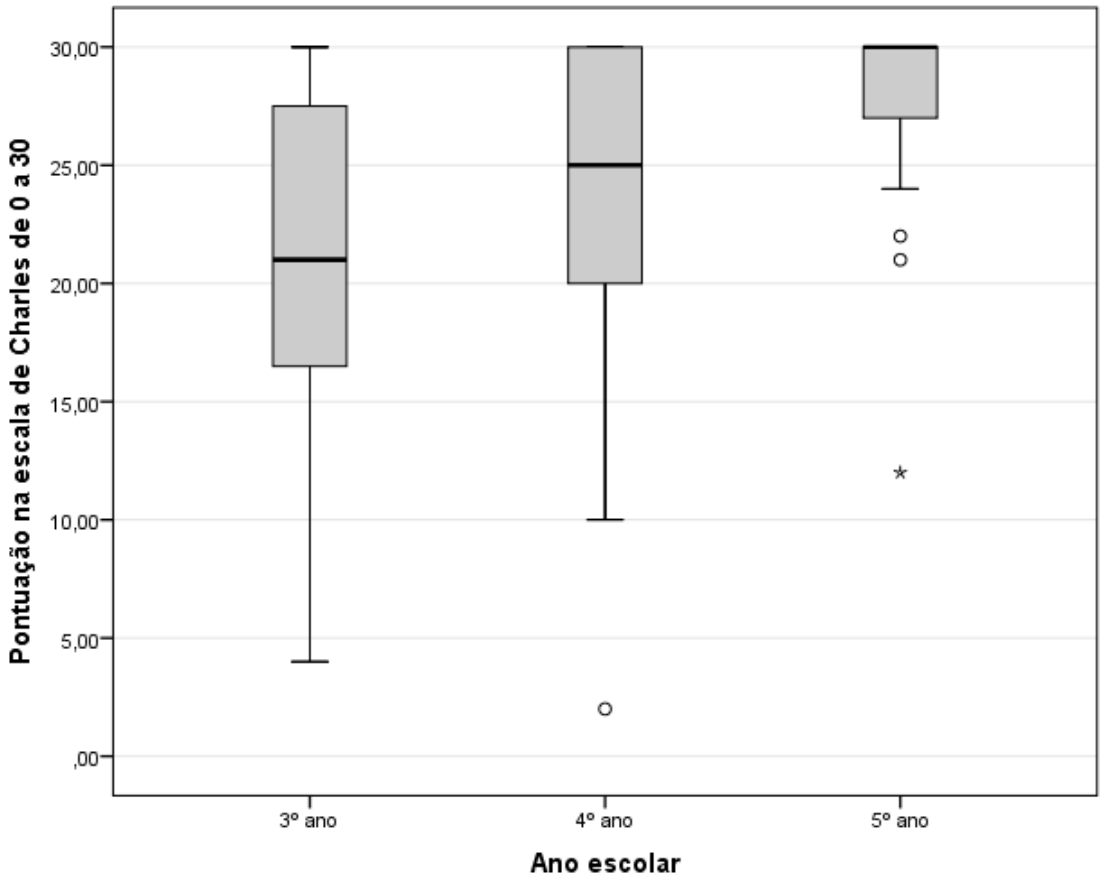
Na Tabela 12 e na Figura 17 apresentamos o desempenho dos estudantes quando corrigimos cada problema pelo critério de Charles. Observamos que a tendência é muito similar à nota obtida, verificamos que há um ganho na pontuação à medida que se progride na escolarização, conforme resultado do Teste F ($F_{(2,61)} = 5,777$; $p = 0,005$).

Tabela 12 - Estatísticas relativas ao desempenho dos estudantes na pontuação total na escala de Charles (0 a 30)

Nº de etapas que sente dificuldade	N	Média (*)	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
3º ano	23	20,22a	8,13	4,00	30
4º ano	21	23,0ab	7,88	2,00	30
5º ano	20	27,6b	4,64	12,00	30
Geral	64	23,45	7,66	2,00	30

(*) Médias com letras iguais não diferem estatisticamente conforme o teste de comparações múltiplas de Tukey.

Figura 17 - Desempenho dos estudantes segundo número de etapas que declarou sentir dificuldades

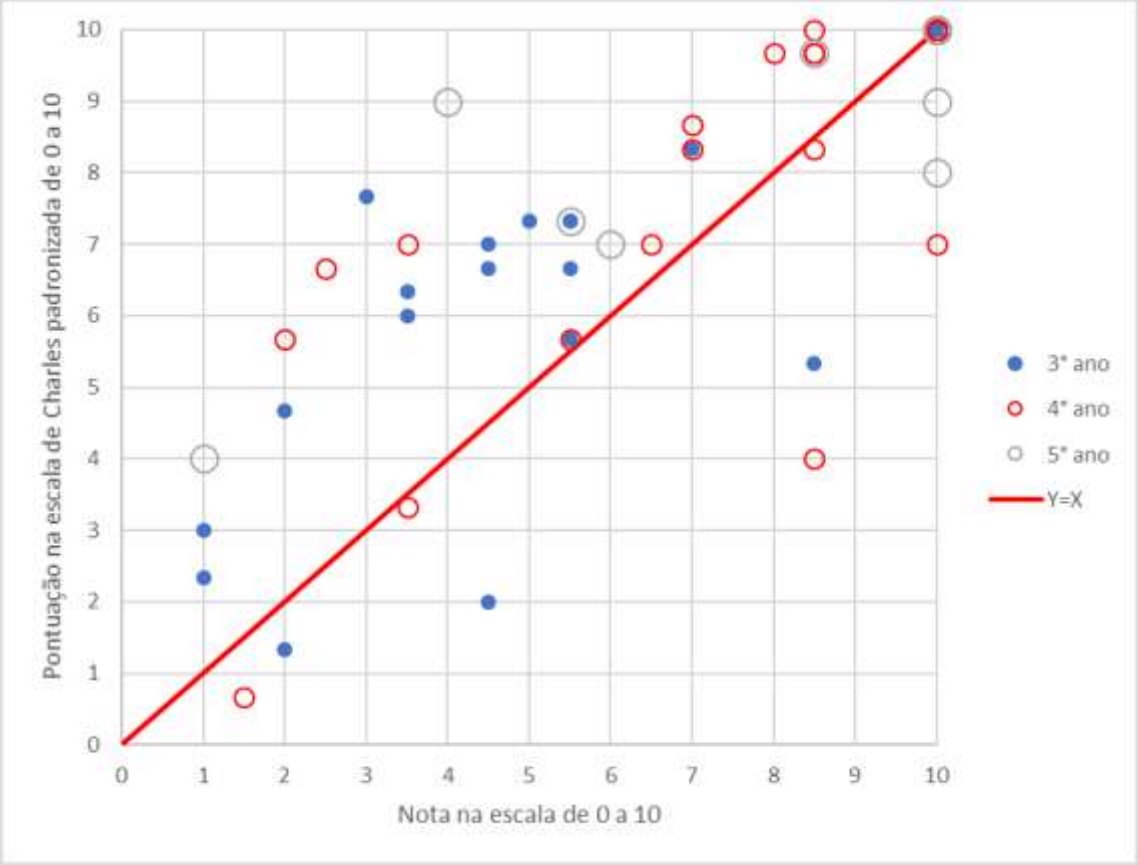


Fonte: Dados da Pesquisa

Na Figura 18 apresentamos a relação entre a Nota e a pontuação na escala de Charles padronizada para uma escala de zero a dez, colorido por ano escolar. Este gráfico nos permite ver alguns padrões. Em geral é esperado que os pontos na escala de Charles caiam acima da reta da igualdade (Y=X), uma vez que na escala de Charles é valorizado todo o procedimento realizado pelo estudante, mesmo que no final tenha errado, já que na nota só foi considerado certo aquela resposta totalmente certa. Contudo, podemos ver alguns pontos abaixo da reta, isto porque se um estudante só colocasse a resposta numérica certa sem o procedimento, na escala de Charles ele ganharia somente metade da pontuação.

Também podemos observar que os estudantes do 3º ano estão concentrados mais para o canto inferior esquerdo e os do 4º e 5º ano mais para o canto superior direito, o que já havíamos detectado com o diagrama da caixa.

Figura 18 - Relação entre as pontuações na Nota e na escala de Charles por ano escolar



Fonte: Dados da Pesquisa

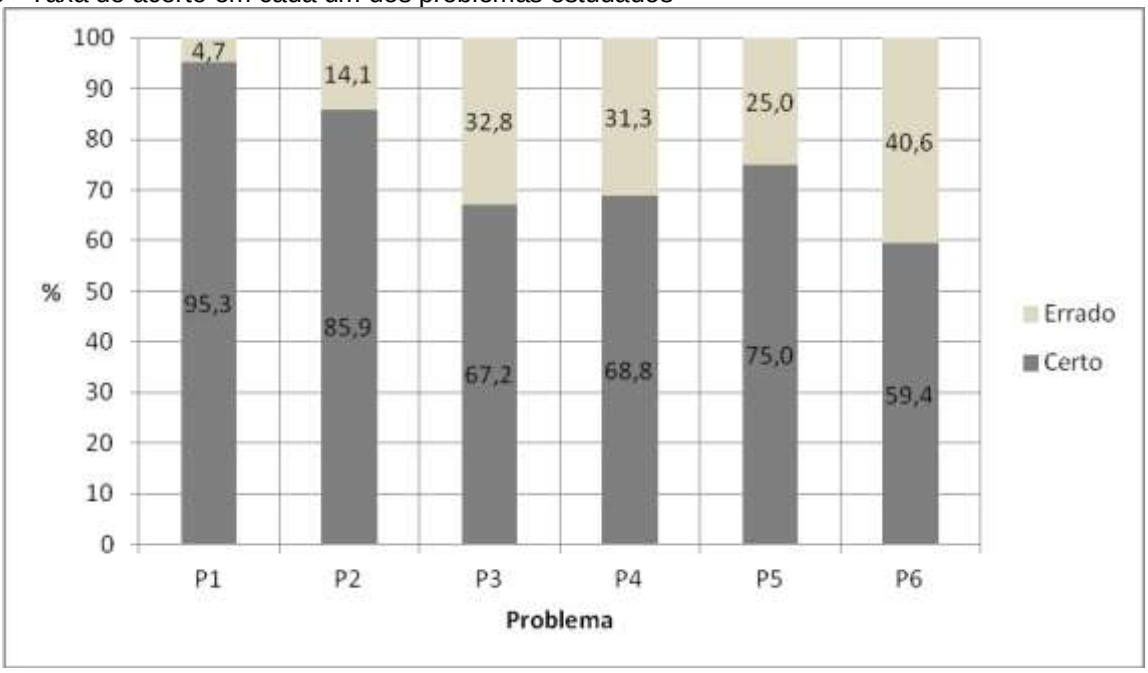
4.3 Análise do desempenho por problema

4.3.1 Análise do desempenho por problema de forma comparativa global

Primeiramente vamos apresentar o desempenho em cada um dos seis problemas de forma global e em um segundo momento faremos a análise de cada problema por ano escolar.

Na Figura 19 apresentamos a taxa de acerto em cada um dos problemas e podemos observar que a taxa de acerto é maior nos primeiros problemas e diminue nos últimos problemas e isto está correlacionado com a maior complexidade dos problemas, observando que a pontuação dada já levava em consideração esse fato.

Figura 19 - Taxa de acerto em cada um dos problemas estudados



Fonte: Dados da Pesquisa

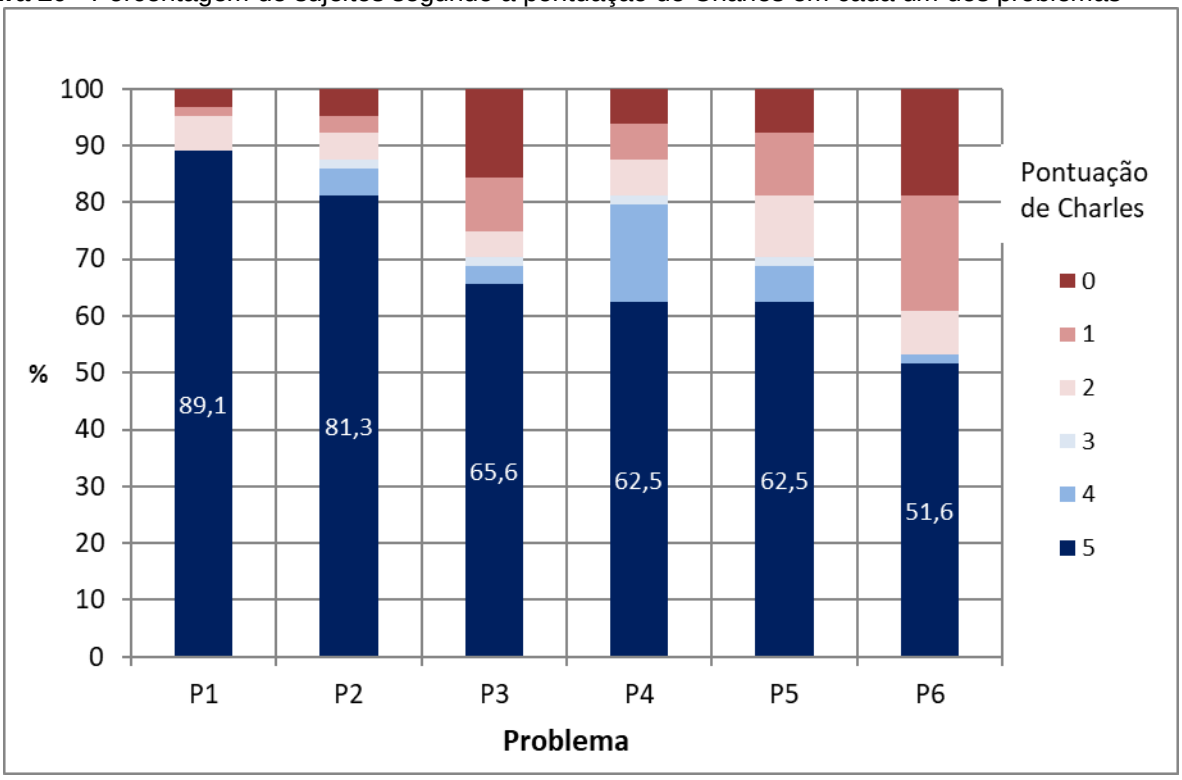
Na Tabela 13 e Figura 20 apresentamos a porcentagem de sujeitos em cada um dos problemas segundo a pontuação de Charles e podemos observar na Figura 20 que a complexidade do problema aumenta gradativamente, visto que a pontuação máxima 5 vai decaindo do P1 ao P6.

Tabela 13 - Porcentagem de sujeitos segundo a pontuação de Charles em cada um dos problemas

Pontuação critério de Charles	P1	P2	P3	P4	P5	P6
0 – Devolve o problema "em branco" (sem solução). Números copiados do problema; não entendimento do problema evidenciado. Resposta incorreta, sem evidenciar o desenvolvimento da solução.	3,1	4,7	**15,6**	6,3	7,8	**18,8**
1 – Iniciou usando estratégia inapropriada; não concluiu a solução do problema. Abordagem sem sucesso; não tentou abordagem diferente. Tentativa falha de alcançar um sub-objetivo.	1,6	3,1	9,4	6,3	10,9	20,3
2 – Estratégia apropriada foi usada; não encontrou a solução ou alcançou um sub-objetivo, mas não terminou a solução. Estratégia inadequada, que revele algum entendimento do problema. Resposta correta e procedimento de solução não mostrado.	6,3	4,7	4,7	6,3	10,9	7,8
3 – Estratégia apropriada, porém o sujeito: Ignorou a condição do problema. Deu uma resposta incorreta sem razão aparente. Falta de clareza no procedimento empregado.	0,0	1,6	1,6	1,6	1,6	0,0
4 – Estratégia (s) apropriada (s). Desenvolvimento da solução reflete entendimento do problema. Resposta incorreta por um erro de cópia ou de cálculo.	0,0	4,7	3,1	17,2	6,3	1,6
5 – Estratégia (s) apropriada (s). Desenvolvimento da solução reflete entendimento do problema. Resposta correta.	89,1	81,3	65,6	62,5	62,5	51,6
Total	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 20 - Porcentagem de sujeitos segundo a pontuação de Charles em cada um dos problemas



Fonte: Dados da Pesquisa

Os dados apresentados na Figura 20 evidenciam que a análise a priori que foi feita sobre as possíveis dificuldades para a atribuição da pontuação que variou de 1,0 até 3,0 pontos por problema, perfazendo um total de 10 pontos, revelou-se inadequada em relação aos problemas 3 (P3) e 5 (P5). Para o P3 classificado por Vergnaud (2014) como um problema da categoria de comparação foi atribuído o valor de 1,5 ponto, no entanto, dado a dificuldade apresentada pelos estudantes acreditamos que deveríamos ter atribuído para este 2,0 pontos. Por outro lado, para o problema P5 pertencente a categoria da *transformação de uma relação* deveria ter sido atribuído a pontuação 1,5 ponto, pois, ainda que apresentasse uma estrutura mais complexa que os problemas anteriores, o seu contexto tratava-se de uma situação do cotidiano das crianças.

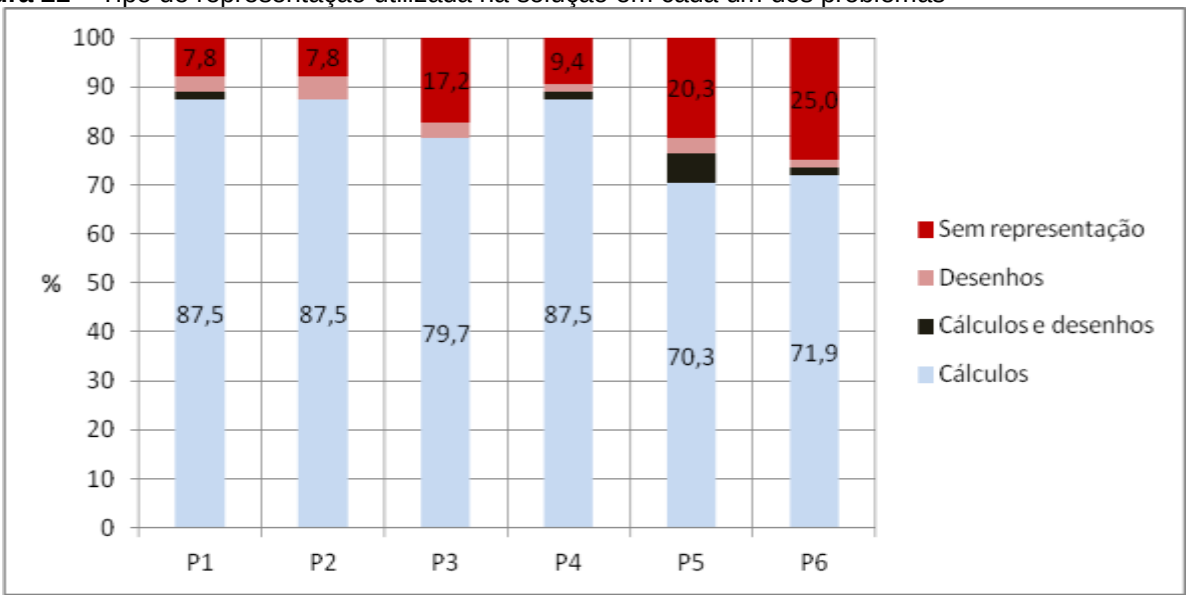
Na Tabela 14 e na Figura 21 podemos ver que a representação mais utilizada foi o cálculo, os desenhos são pouquísimos utilizados não chegando a 5%, nos problemas 5 e 6 teve entre 20 e 25% de soluções sem representação. Destaca-se que na categoria sem representação encontram-se os estudantes que acertaram o problema, no entanto, não demonstraram o procedimento utilizado, apenas registraram a resposta do problema. Neste caso podemos fazer algumas inferências que justifiquem a ausência da representação por parte dos estudantes, acredita-se que alguns deles possam ter realizado o cálculo mental, outros podem ter realizado os cálculos com o auxílio dos dedos, há ainda a possibilidade de alguns deles terem “chutado” a resposta.

Tabela 14 – Tipo de representação utilizada na solução em cada um dos problemas

Representação na solução	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Cálculos	87,5	87,5	79,7	87,5	70,3	71,9
Cálculos e desenhos	1,6	0,0	0,0	1,6	6,3	1,6
Desenhos	3,1	4,7	3,1	1,6	3,1	1,6
Sem representação	7,8	7,8	17,2	9,4	20,3	25,0
Total	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Fonte: Dados da Pesquisa

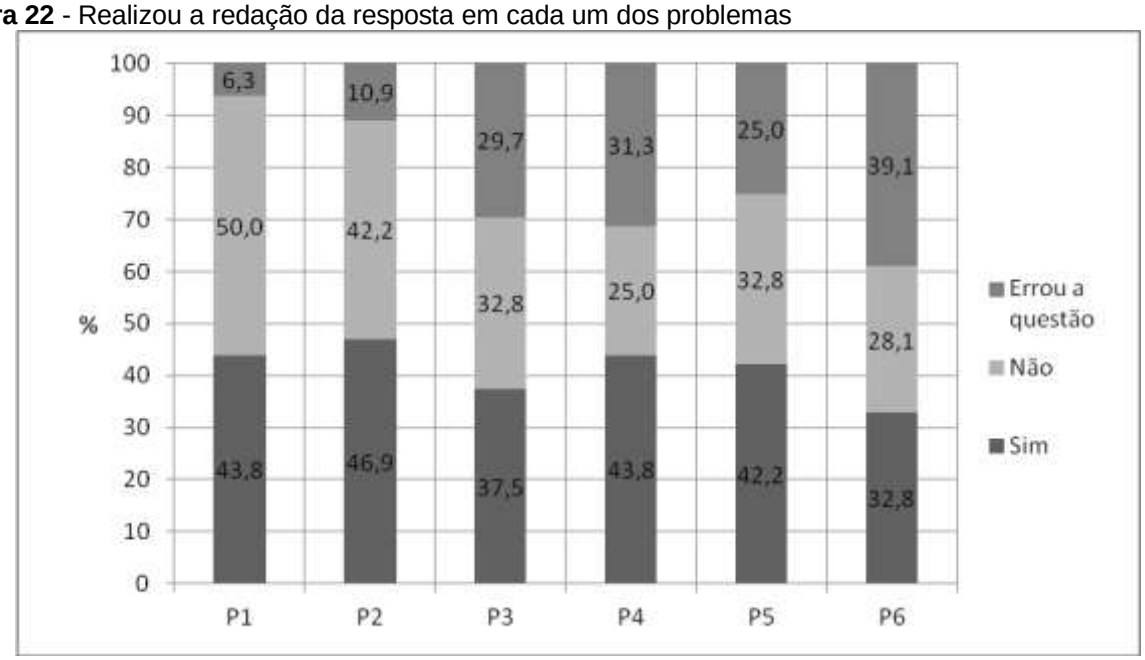
Figura 21 – Tipo de representação utilizada na solução em cada um dos problemas



Fonte: Dados da Pesquisa

A Figura 22 ilustra a porcentagem de estudantes que apresentaram a redação da resposta na solução dos problemas propostos no instrumento. Podemos observar que em torno de 45% dos estudantes realizaram a redação da resposta nos problemas: P1, P2, P4 e P5. Nos problemas P3 e P6 essa porcentagem fica em torno de 35%, sendo que a porcentagem de erros nessas questões foi da ordem de 30%, se destacando o P6, como mostrou a Figura 19.

Figura 22 - Realizou a redação da resposta em cada um dos problemas



Fonte: Dados da Pesquisa

Ao juntarmos a distribuição da pontuação de Charles, a representação utilizada e a realização da redação da resposta vemos que há complexidade diferenciada dos problemas, sendo que os problemas 1 e 2 são menos complexos ou ofereceram menos dificuldade na resolução, já o problema 6 foi o mais complexo.

4.3.2 Análise do desempenho dos estudantes por problema e ano escolar

Nesta seção nos dedicaremos a analisar cada problema, de forma comparativa por ano escolar. Na Tabela 15 apresentamos a porcentagem de acerto em cada problema por ano escolar e geral; bem como o resultado do teste Qui-quadrado que testa a hipótese se a porcentagem de acerto difere por ano escolar.

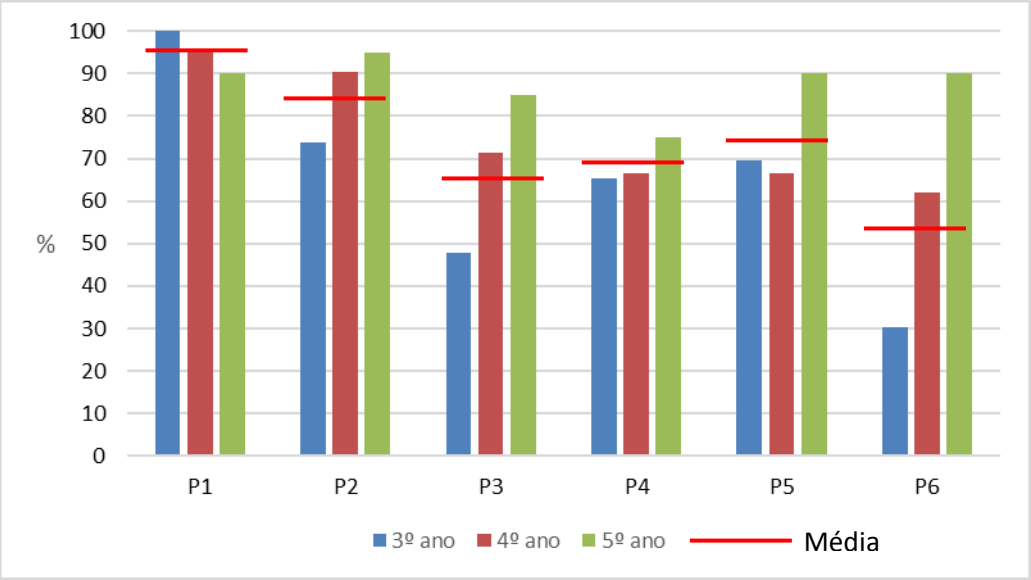
Analisando a Tabela 15 e a Figura 23 verificamos que, com exceção do Problema 1, em todos os outros a porcentagem de acerto aumentou com a escolaridade, sendo que no Problema 3 a diferença foi de 40% entre o 3º e 5º ano e no Problema 6 de 60%, sendo que apenas nestes dois problemas essa diferença foi estatisticamente significativa.

Tabela 15 - Porcentagem de acerto em cada problema por ano escolar e resultado do teste Qui-quadrado

Problema	Ano escolar				Teste Qui-quadrado		
	3º ano	4º ano	5º ano	Total	Valor	gl	p-valor
P1	100,0	95,2	90,0	95,3	2,395[a]	2	0,302
P2	73,9	90,5	95,0	85,9	4,469[a]	2	0,107
P3	**47,8**	**71,4**	**85,0**	**67,2**	**6,961**	**2**	**0,031**
P4	65,2	66,7	75,0	68,8	0,540	2	0,764
P5	69,6	66,7	90,0	75,0	3,540	2	0,170
P6	**30,4**	**61,9**	**90,0**	**59,4**	**15,818**	**2**	**0,000**

Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 23 - Porcentagem de acerto em cada problema por ano escolar



Fonte: Dados da Pesquisa

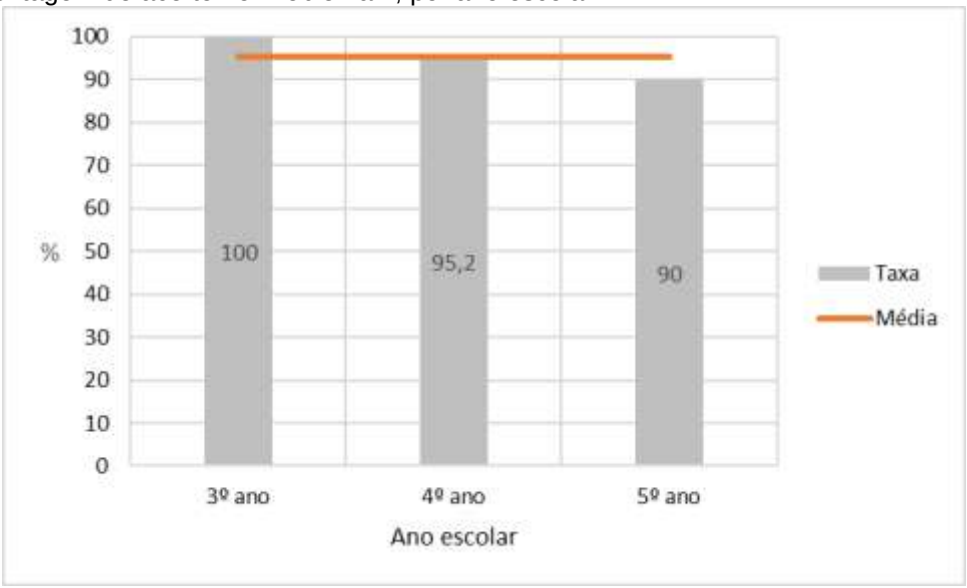
A seguir, apresentamos uma análise do desempenho dos alunos em cada problema contido no teste de matemática, por série.

Análise do Problema 1

O primeiro problema (P1) era da categoria de composição, que mesmo crianças pré-escolares, conseguem resolver. De acordo com Magina (2008) as situações protótipos são intuitivas, pois as mesmas são tratadas pelas crianças em sua vida diária, ou seja, mesmo antes de entrar na escola, favorecendo-as a ter um melhor desempenho em situações desse tipo. O raciocínio exigido nesse problema foi a adição direta de duas quantidades.

Na Tabela 15 e Figura 23 verificamos que a taxa de acerto geral foi de 95,3%, e que há uma queda linear na porcentagem de acertos do terceiro para o quinto ano de 100% no 3º ano, para 95,2% no 4º ano e para 90,0% no 5º ano; embora o esperado era um crescimento linear que ocorresse do terceiro para o quinto ano de escolaridade. Este é o único problema em que a taxa de acerto se inverte com a escolaridade, todavia essas diferenças não foram estatisticamente significativas conforme resultado no teste Qui-quadrado, constantes na Tabela 15.

Figura 24 - Porcentagem de acerto no Problema 1, por ano escolar



Fonte: Dados da pesquisa

Esses resultados são discordantes com os encontrados por Santana et al (2007) em que os estudantes do 3º ano registraram uma taxa de acerto de 84,6%; respectivamente, o 4º e 5º anos de escolaridade registraram 87,6% e 90,9%.

Moretti e Brandt (2014) em sua pesquisa aplicaram um problema similar ao P1 em 132 estudantes do 5º ano, que registraram um índice de acerto de 97%. Os autores apontaram que uma das razões para o alto índice de acerto poderia estar relacionado à congruência semântica, pois a expressão “têm juntas” presente na proposição do problema garantiu a associação com a operação de adição. No nosso caso, supõe-se que o conectivo de ligação “e” possa ter estabelecido essa relação com a operação de adição.

Procurando entender o porquê dessa reversão, analisamos a pontuação na escala de Charles por ano escolar (Tabela 16) verificamos que a um estudante do 4º ano e um do 5º ano foi atribuído zero ponto seguindo os critérios estabelecidos por Charles. Pela análise dos protocolos desses sujeitos observou-se que ambos não entregaram o problema em branco, no caso a estudante do 4º ano (E29) apresentou a resposta incorreta e não evidenciou o desenvolvimento da solução. O estudante do 5º ano (E64) efetuou a operação de subtração (8-6) ao invés de adicionar as duas quantidades.

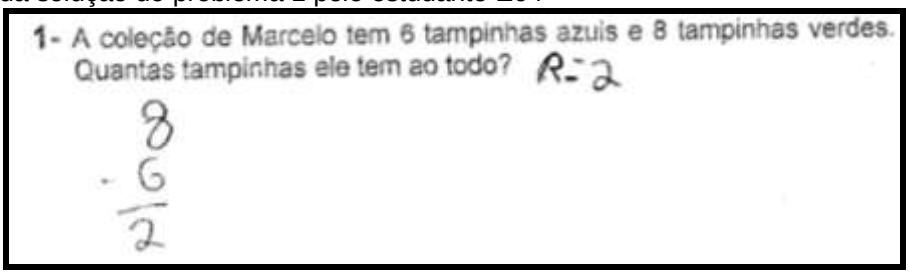
Tabela 16 - Pontuação na escala de Charles no Problema 1, por ano escolar

Pontuação na escala de Charles	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
0	0	0,0	1	4,8	1	5,0	2	3,1
1	0	0,0	0	0,0	1	5,0	1	1,6
2	2	8,7	2	9,5	0	0,0	4	6,3
5	21	91,3	18	85,7	18	90,0	57	89,1
Total	23	100,0	21	100,0	20	100,0	64	100,0

Fonte: Dados da pesquisa

A Figura 25 apresenta a solução do primeiro problema (P1) apresentada pelo estudante E64, estudante do quinto ano.

Figura 25 - Extrato da solução do problema 1 pelo estudante E64



Fonte: Dados da Pesquisa

De acordo com o questionário informativo o referido estudante repetiu o 4º ano, além de ter declarado que durante a solução de um problema a sua maior dificuldade está centrada na leitura do problema.

A este respeito Brito, Fini e Neumann (apud Brito, 2006) verificaram que o raciocínio verbal apresenta alguma ligação com o fator matemático geral, evidenciaram que provavelmente a compreensão verbal do enunciado do problema ocorra antes da compreensão da natureza matemática do problema. Os autores afirmaram ainda que:

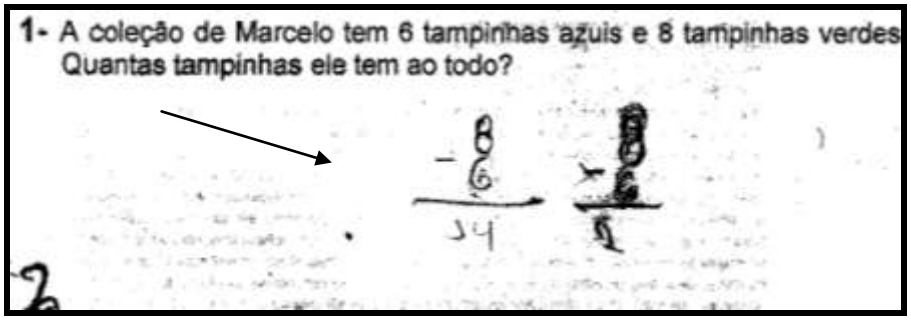
> [...] Na primeira etapa da solução de problemas matemáticos, é requisitada a compreensão verbal da proposição, pois como os problemas são apresentados por escrito (enunciados verbais que encerram problemas matemáticos), o estudante necessita da habilidade verbal (que permite a ele ler e compreender o problema) para compreender a natureza matemática do mesmo (BRITO, 2006, p.29-30).

Nesse sentido, podemos supor que a dificuldade na leitura possa ter interferido no desempenho desse estudante, que realizou corretamente apenas o segundo problema (P2), pois, uma vez que o sujeito não foi capaz de realizar a leitura adequadamente acabou comprometendo a compreensão do enunciado, em outras palavras, o

entendimento daquilo que era solicitado pelo problema. Daí possivelmente decorreu a dificuldade para perceber as relações matemáticas que estavam contidas nos problemas, isto é, os cálculos relacionais e numéricos exigidos por cada situação.

Limitando–se à análise do protocolo apresentada pela estudante E52, que é semelhante ao do estudante E64, poderíamos supor que simplesmente transpôs as quantidades numéricas explicitadas no enunciado e estabelece uma operação discordante da exigida para a solução desse problema. No entanto, pela análise cuidadosa dos procedimentos foi possível verificar que a primeira opção da estudante havia sido a operação de adição (8+6), mas que por algum motivo ela apagou e realizou a operação de subtração. Com um auxilio de um recurso no tratamento de imagens disponível pelo software da impressora *HP Deskjet 2050* foi possível digitalizar o protocolo recuperando o primeiro procedimento realizado pela aluna, conforme ilustra a Figura 26:

Figura 26 - Extrato da solução do problema 1 apresentado pela estudante E52: primeiro procedimento apresentado



Fonte: Dados da Pesquisa

Destaca-se que mesmo com o recurso não foi possível evidenciar o sinal de adição (+) utilizado pela estudante. Analisando os protocolos de solução apresentados por essa estudante, observa-se que realizou com êxito o problema seis (P6) que apresentava um grau de complexidade superior ao primeiro problema, por essa razão acreditamos que o erro apresentado na solução do primeiro problema possa ser decorrente da distração da estudante, e não necessariamente da falta de compreensão da estrutura do problema.

Em relação aos dois estudantes do 3º ano que tiveram dois pontos atribuídos segundo a correção pelos critérios elaborados por Charles eles não demonstraram o procedimento de solução.

Os resultados mostrados na Tabela 16 foram relacionados às etapas de solução propostas por Polya (2006) e na ocasião buscou-se identificar em quais das etapas os

estudantes apresentaram mais dificuldades. Para tanto elaboramos o quadro disposto na Figura 27, com o seguinte paralelo:

Figura 27 – Quadro de comparação entre os passos propostos por Polya (2006) e o Sistema de Correção elaborado por Charles.

As quatro fases propostas por Polya (2006)	**Critérios estabelecidos por Charles**
1º Compreensão do problema	**0** – Devolve o problema "em branco" (sem solução). Números copiados do problema; não entendimento do problema evidenciado. Resposta incorreta, sem evidenciar o desenvolvimento da solução.
2º Estabelecimento de um plano	**1** – Iniciou usando estratégia inapropriada; não concluiu a solução do problema. **2**- Estratégia inadequada, que revele algum entendimento do problema
3º Execução de um plano	**1-** Abordagem sem sucesso; não tentou abordagem diferente. Tentativa falha de alcançar um sub-objetivo. **2** – Estratégia apropriada foi usada; não encontrou a solução ou alcançou um sub-objetivo, mas não terminou a solução. **3** – Estratégia apropriada, porém o sujeito: Ignorou a condição do problema. Deu uma resposta incorreta sem razão aparente. Falta de clareza no procedimento empregado. **4** - Estratégia (s) apropriada (s). Desenvolvimento da solução reflete entendimento do problema. Resposta incorreta por um erro de cópia ou de cálculo
4º Retrospecto	**2-** Resposta correta e procedimento de solução não mostrado. **5 –** Estratégia(s) apropriada (s); Desenvolvimento da solução reflete entendimento do problema. Resposta correta.

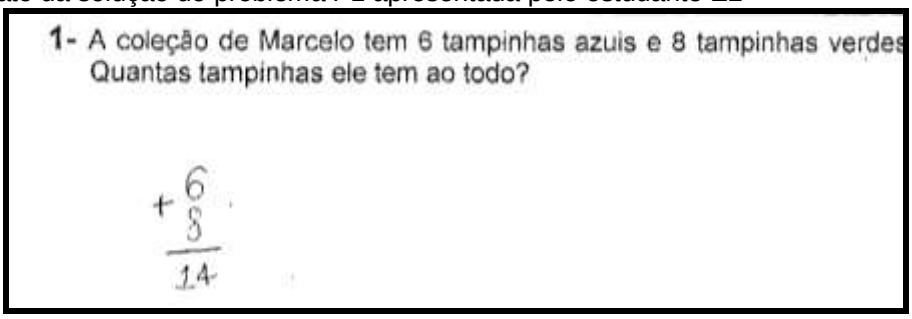
Fonte: A autora

Para a elaboração deste quadro buscou-se esmiuçar os critérios estabelecidos por Charles na tentativa de adequá-los a cada etapa da solução de problemas propostas por Polya (2006). Por exemplo um estudante cuja solução tenha sido atribuída a pontuação 2, somente pela análise de protocolo é que podemos enquadrá-lo em uma das etapas, considerando que ele pode ter respondido corretamente e não ter demonstrado o procedimento. Por outro lado, o estudante pode ter feito uso de uma estratégia inapropriada.

Consequentemente, os estudantes que atingiram a pontuação 5 da escala Charles, e aqueles que obtiveram a pontuação 2 em virtude de apresentarem a resposta correta, porém não demonstraram o procedimento, foram categorizados como apresentando dificuldade na etapa *Retrospecto* desde que não tivessem apresentado a

resposta do problema, ou seja, aqueles estudantes que realizaram a execução do cálculo corretamente, mas não indicaram a resposta, conforme protocolo da Figura 28.

Figura 28- Extrato da solução do problema P1 apresentada pelo estudante E2



Fonte: Dados da Pesquisa

Desta forma, para a elaboração da Tabela 17 a partir da pontuação atribuída seguindo os critérios estabelecidos por Charles realizamos a análise dos protocolos.

Tabela 17 - Distribuição dos sujeitos de acordo com as fases da Solução de Problemas propostas por Polya (2006) em que os estudantes falharam na solução do problema 1

Etapas da solução propostas por Polya (2006)	3º ano	4º ano	5º ano	Total
	Nº	Nº	Nº	Nº
1ª Compreensão do problema	0	1	2	3
2ª Estabelecimento de um plano	0	0	0	0
3º Execução de um plano	0	0	0	0
4º Retrospecto	13	1	5	19
Total	13	2	7	22

Fonte: Dados da pesquisa

É possível perceber pelos dados da Tabela 17 que a etapa da solução de problemas em que os estudantes de um modo geral apresentaram maior dificuldade foi no *Retrospecto*. Destaca-se que neste grupo de 19 estudantes estão incluídos aqueles alunos que apresentaram solução correta e não demonstraram o procedimento adotado, também aqueles que realizaram tudo corretamente e não registraram a redação da resposta.

Foi realizada ainda uma análise a respeito do tipo de procedimento utilizado pelos estudantes para solucionarem os problemas, e esses procedimentos foram categorizados em: Desenho (quando o estudante utilizou uma representação pictório-visual, ou seja, “palitinhos”, “bolinhas” entre outros); cálculos (quando o estudante utilizou as operações

aritméticas de adição e subtração); desenho e cálculo (quando o estudante fez uso de ambas as representações) e sem representação (quando não se conseguia identificar o tipo de procedimento, isto é, quando só havia a resposta correta). Destaca-se que todos os protocolos foram analisados, mesmo aqueles dos estudantes que erraram a questão. A Tabela 18 apresenta a distribuição dos estudantes de acordo com o tipo de representação utilizada na solução do primeiro problema.

Tabela 18 – Tipo de representação utilizada na solução do Problema 1, por ano escolar

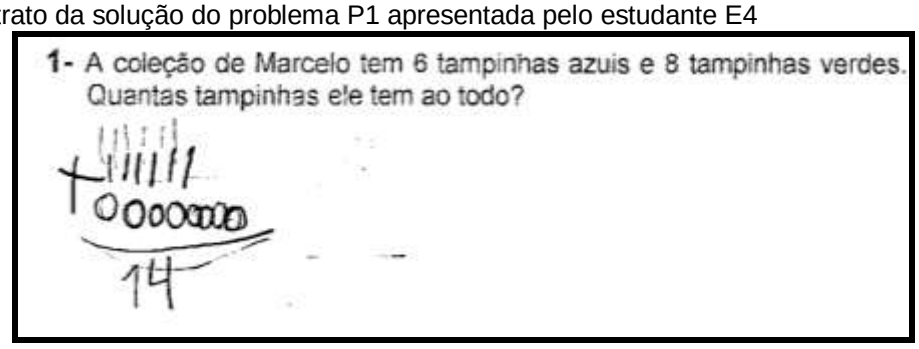
Representação	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Desenho	2	8,7	0	0,0	0	0,0	2	3,1
Cálculos	18	78,3	18	85,7	20	100,0	56	87,5
Desenho/Calc	1	4,3	0	0,0	0	0,0	1	1,6
Sem representação	2	8,7	3	14,3	0	0,0	5	7,8
Total	23	100,0	21	100,0	20	100,0	64	100,0

Fonte: Dados da pesquisa

De um modo geral, o procedimento de cálculo foi o mais utilizado pelos estudantes, 100% dos estudantes do 5º ano utilizaram o cálculo numérico. Observa-se que 8,7% (n=2) dos estudantes do 3º ano utilizaram desenho como procedimento de solução.

A Figura 29 apresenta um exemplo de um estudante (E4) do 3º ano que utilizou o desenho como procedimento para a solução.

Figura 29 - Extrato da solução do problema P1 apresentada pelo estudante E4



Fonte: Dados da Pesquisa

Pela análise do protocolo foi possível observar que *a priori* o estudante havia optado pelo cálculo numérico como procedimento. Por alguma razão, ele apagou o cálculo que havia iniciado e utilizou “palitinhos” e “bolinhas” para auxiliá-lo na solução. Uma das hipóteses que podemos levantar a esse respeito é a dificuldade que o estudante

apresentou na execução dos cálculos numéricos, ou seja, no procedimento deste que envolve o valor posicional, uma das propriedades do Sistema de Numeração Decimal. Ainda que o estudante tenha apagado o cálculo numérico, pelas marcas no protocolo é possível perceber que ele havia registrado o “6” na ordem da dezena e o “8” na ordem da unidade.

A análise dos protocolos permitiu identificar ainda os estudantes que apresentaram redação da resposta do problema. Acerca deste aspecto Mayer (1992) e Brito (2006) destacaram que a escrita da redação da resposta do problema propicia ao estudante uma nova leitura da proposição do problema e a verificação da adequação da resposta ao solicitado no problema. Desta forma, pautado nas etapas propostas por Polya (2006) acreditamos que a escrita da redação da resposta do problema possa estar relacionada à última etapa da solução, que implica no *Retrospecto.*

Tabela 19 - Redação da resposta do Problema 1, por ano escolar

Redação	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Sim	7	30,4	16	76,2	5	25,0	28	43,8
Não	16	69,6	4	19,0	12	60,0	32	50,0
Errou a questão	0	0,0	1	4,8	2	15,0	4	6,3
Total	23	100,0	21	100,0	20	100,0	64	100,0

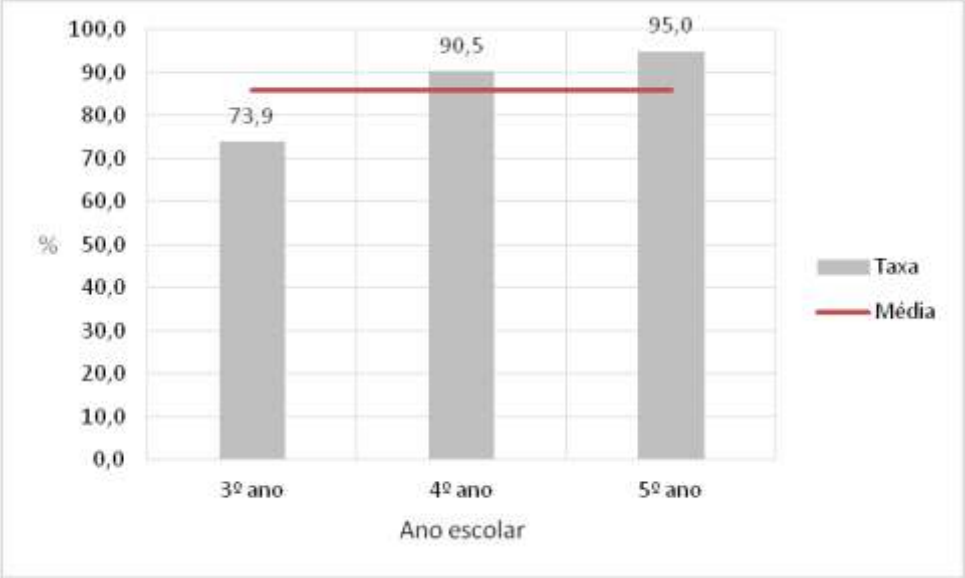
Fonte: Dados da pesquisa

Os dados da Tabela 19 evidenciam que os estudantes do 4º ano foram os que mais apresentaram a redação da resposta, perfazendo um total de 76,2% (n=16), em seguida os estudantes do 3º ano com 30,4% e por último os estudantes do 5º ano com 25%. O índice alcançado pelos estudantes do 4º ano pode ser resultado da maneira como os alunos são ensinados durante a solução de problemas.

Análise do Problema 2

Analisando a Tabela 15 e a Figura 30 observamos que a taxa de acerto geral foi de 85,9, e que há um crescimento linear na porcentagem de acertos do terceiro para o quinto ano de 73,9% no 3º ano, para 90,5% no 4º ano e para 95% no quinto ano, embora essas diferenças não tenham sido estatisticamente significativas conforme resultado no teste Qui-quadrado, constantes na Tabela 15.

Figura 30 - Porcentagem de acerto no Problema 2, por ano escolar



Fonte: Dados da Pesquisa

Esse problema, tal qual o anterior, é considerado por Vergnaud (1986) como protótipo de problemas de estruturas aditivas, é um protótipo de transformação com estado inicial (9) e transformação negativa (-4) conhecidos, cuja operação solicitada era a subtração.

Nunes e Bryant (1997) consideram os problemas de transformação, como o de número 2 (P2) muito fáceis. Na pesquisa realizada constatou-se o que disseram os pesquisadores, em virtude das porcentagens de erros que foram baixas para o quarto e quinto ano de escolaridade, respectivamente, 9,5% e 5%.

Observa-se que os resultados esperados e aqueles obtidos se confirmaram. Além disso, esses resultados são semelhantes aos encontrados por Mendonça et al (2007) com 782 estudantes, que cursavam entre a 1ª e a 4ª série do ensino fundamental. Na ocasião os resultados encontrados foram muito próximos aos achados nesta pesquisa, a saber: 93,2% (3º ano); 93,9% (4º ano) e 94,1% (5º ano).

Segundo Magina (2008) os índices de acerto do P2 podem ser explicados em função da associação da palavra “perdeu” com a operação de subtração. Em adição, Moretti e Brandt (2014) explicitaram que a facilidade apresentada pelos estudantes na solução desse tipo de problema pode estar relacionada à congruência semântica entre os dados do problema e a sentença que representa a solução do mesmo. Ou seja, os dados

numéricos da sentença matemática (9-4) correspondem, na mesma ordem, aos dados apresentados no problema em língua materna.

A correção do teste seguindo os critérios de pontuação estabelecidos por Charles (apud LIMA, 2001) revelaram que três estudantes obtiveram pontuação zero, dois eram do 3º ano e um matriculado no 4º ano, conforme indicado na Tabela 20.

Tabela 20 - Pontuação na escala Charles no Problema 2, por ano escolar

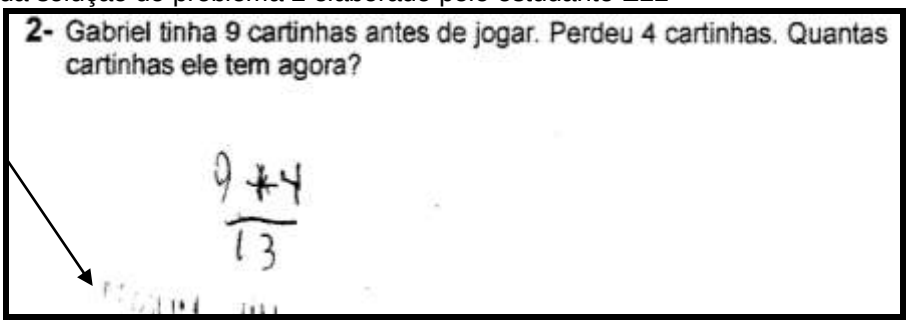
Pontuação na escala de Charles	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
0	2	8,7	1	4,8	0	0,0	3	4,7
1	1	4,3	1	4,8	0	0,0	2	3,1
2	1	4,3	2	9,5	0	0,0	3	4,7
3	1	4,3	0	0,0	0	0,0	1	1,6
4	2	8,7	0	0,0	1	5,0	3	4,7
5	16	69,6	17	81,0	19	95,0	52	81,3
Total	23	100,0	21	100,0	20	100,0	64	100,0

Fonte: Dados da pesquisa

A análise dos protocolos apontou que um deles realizou a operação de adição (9 + 4), o outro realizou a cópia dos números que constavam no enunciado e o terceiro não demonstrou o procedimento utilizado para a solução, apenas a resposta. Pela análise dos protocolos podemos inferir que o estudante que apresentou a operação de adição (9 + 4) como solução, possivelmente pode ter cometido esse erro por distração, ou mesmo em razão do contexto da avaliação ter manifestado certa insegurança, pois, no problema seguinte que dispõe de uma estrutura mais complexa o sujeito o realizou com sucesso tendo sido lhe atribuído a pontuação cinco.

Na sequência, é apresentado o protocolo da questão 2 elaborado por um estudante do terceiro ano, sujeito E22, na Figura 30.

Figura 30 - Extrato da solução do problema 2 elaborado pelo estudante E22



Fonte: Dados da pesquisa

Neste protocolo o estudante ao invés de realizar a operação de subtração soma as duas quantidades apresentadas no enunciado. A estratégia utilizada pelo aluno "palitinhos" conforme consta na parte inferior do protocolo, demonstra que não houve a compreensão do problema, mesmo trazendo de forma tão explicita em sua proposição a expressão "perdeu" o estudante optou pela operação de adição.

No entanto, a julgar somente pela análise do procedimento utilizado não podemos afirmar que esse aluno não apresenta domínio na solução de problemas dessa categoria, uma vez que no problema subsequente, que *a priori* exigia um raciocínio mais elaborado, por se tratar de uma situação de comparação de duas medidas ele logrou êxito.

A este respeito Vergnaud (1979, 1998) destacou a importância dos invariantes operatórios, também chamados de *conhecimentos-em-ação* que designam-se pelas expressões *conceito-em-ação* e *teorema-em-ação*. Retomando que esses *conhecimentos-em-ação* "[...] *são implícitos e praticamente insuscetíveis de explicitação por uma criança nas fases inicias da aprendizagem de competências e conceitos aritméticos*" (VERGNAUD apud MOREIRA, 2009). Neste sentido, na solução do problema proposto existiam diferentes *conceitos-em-ação* envolvidos implicitamente na compreensão do problema: número cardinal, perda, diminuição, transformação e estado, estado inicial e final, transformação negativa e subtração.

Vergnaud (1979) ressaltou ainda que os problemas aritméticos lidam com conceitos matemáticos muito importantes. Acrescentando que seria equivocado restringir as dificuldades relacionadas à solução de problemas em termos de "capacidade de cálculo", ou seja, a maior parte das dificuldades estão relacionadas aos conceitos envolvidos nos problemas, e não nos cálculos. Todavia, esclareceu que isso não significa que o cálculo em si não levanta qualquer problema.

A seguir a Tabela 21 mostra em quais das etapas os estudantes apresentaram maior dificuldade durante a solução do problema 2 (P2), destacando que os dados apontados na tabela se referem a análise dos protocolos dos estudantes que não lograram êxito na solução.

Tabela 21 - Distribuição dos sujeitos de acordo com as fases da Solução de Problemas propostas por Polya (2006) em que os estudantes falharam na solução do problema 2

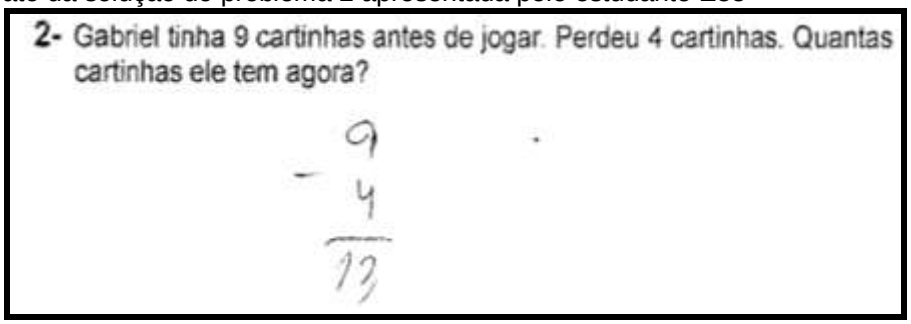
Etapas da solução propostas por Polya (2006)	3º ano	4º ano	5º ano	Total
	Nº	Nº	Nº	Nº
1ª Compreensão do problema	3	2	0	5
2ª Estabelecimento de um plano	0	0	0	0
3º Execução de um plano	3	0	1	4
4º Retrospecto	9	2	4	15
Total	15	4	5	24

Fonte: Dados da pesquisa

A análise dos dados constantes na Tabela 21 evidencia que 13% (n=3) dos estudantes do 3º ano apresentaram dificuldade na etapa de *Compreensão do Problema*, enquanto que dois estudantes do 4º ano apresentaram dificuldade nesta mesma etapa.

Em relação ao estudante do 5º ano de escolaridade que apresentou dificuldade no item *Execução de um plano* que prevê a correção de cada passo executado. A Figura 31 apresenta a solução do estudante (E55).

Figura 31 - Extrato da solução do problema 2 apresentada pelo estudante E55



Fonte: Dados da pesquisa

Pela análise do protocolo observa-se que o estudante não verificou a correção de cada passo. Consequentemente, concluímos que o estudante também não tenha reexaminado a sua solução, pois, acreditamos que a etapa do *Retrospecto* poderia ter lhe ajudado neste sentido, pois ao reexaminar seu resultado final e confrontá-lo à proposição do problema poderia ter identificado a sua falha.

Observa-se ainda que a etapa da solução de problemas em que os estudantes apresentaram maior dificuldade foi a do *Retrospecto*, considerando que do total de 15 sujeitos que apresentaram a dificuldade estão inclusos os que apresentaram a solução correta, porém não demonstraram procedimento, bem como aqueles que fizeram tudo corretamente e não indicaram a redação da resposta para o problema.

Em seguida apresentamos os dados relativos aos procedimentos adotados pelos estudantes na solução do P2, conforme Tabela 22.

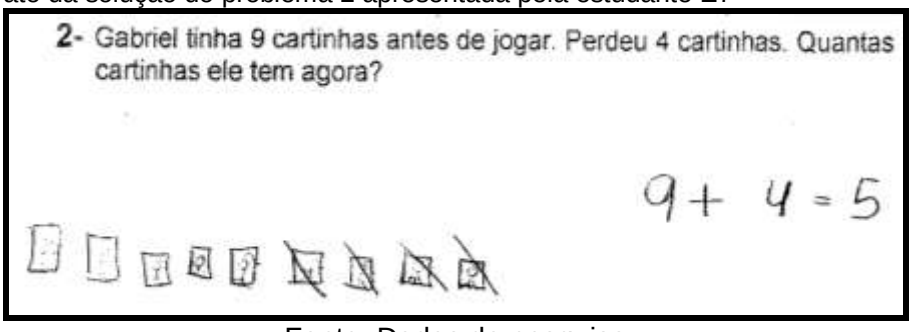
Tabela 22 – Tipo de representação utilizada na solução do Problema 2, por ano escolar

Representação	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Desenho	2	8,7	0	0,0	0	0,0	3	4,7
Cálculos	18	78,3	18	85,7	20	100,0	56	87,5
Desenho/Calc	1	4,3	0	0,0	0	0,0	0	0,0
Sem representação	2	8,7	3	14,3	0	0,0	5	7,8
Total	23	100,0	21	100,0	20	100,0	64	100,0

Fonte: Dados da Pesquisa

Assim como no primeiro problema (P1), o procedimento mais utilizado pelos estudantes também foi o cálculo numérico. O uso do desenho foi registrado em 13% entre os estudantes do 3º ano. Dentre os estudantes do 3º ano de escolaridade que utilizaram o desenho e o cálculo numérico como procedimento de solução destaca-se o protocolo da estudante E7, conforme ilustrado na Figura 32.

Figura 32 - Extrato da solução do problema 2 apresentada pela estudante E7



Fonte: Dados da pesquisa

Analisando o protocolo da estudante identificamos que a dificuldade dela está relacionada à execução dos cálculos, que se enquadra na etapa da *Execução de um*

plano. É possível verificar que contando com o apoio da imagem ela indica a resposta correta “5” ainda que tenha registrado a operação errada (9 + 4= 5) . A este respeito, Palanch (2012) pautado em Vergnaud e Duval destacou a importância do trabalho com os alunos com diferentes maneiras de representar, bem como a passagem de uma maneira para a outra. Neste caso, a passagem do desenho (cartinhas) para o cálculo convencional (9-4).

Os dados da Tabela 23 mostram os estudantes que realizaram a redação da resposta do problema.

Tabela 23 - Redação da resposta do Problema 2, por ano escolar

Redação	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Sim	6	26,1	16	76,2	7	35,0	30	46,9
Não	11	47,8	4	19,0	12	60,0	27	42,2
Errou a questão	6	26,1	1	4,8	1	5,0	7	10,9
Total	23	100,0	21	100,0	20	100,0	64	100,0

Fonte: Dados da Pesquisa

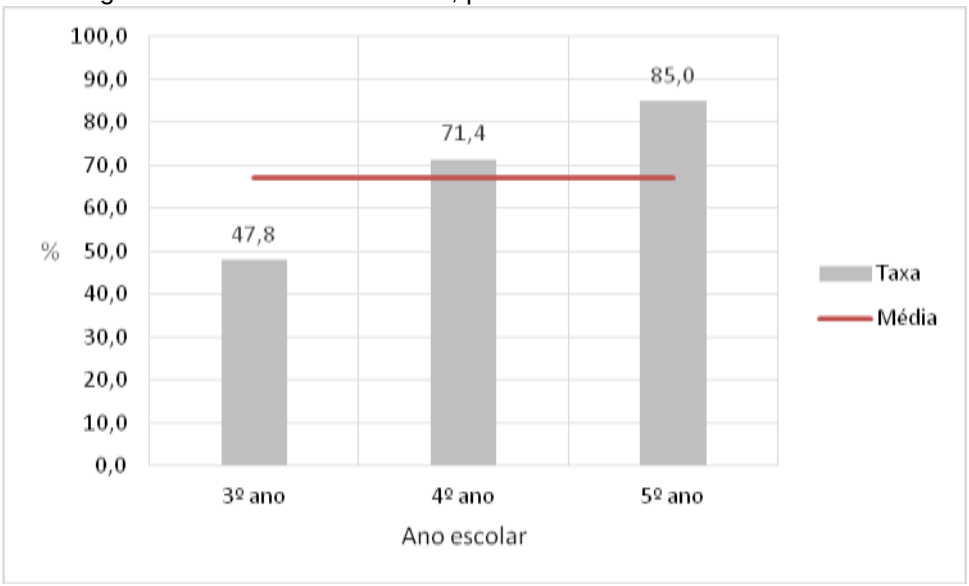
Estes dados permitem observar a predominância da escrita da redação da resposta do problema pelos alunos do 4º ano de escolaridade (76,2%), seguido por 35% dos estudantes do 5º ano e 30,4% do 3º ano. Pelos dados percebemos que a diferença entre o 4º e 5º ano é superior à 50%.

Análise do Problema 3

O terceiro problema (P3) do teste de matemática pertence a categoria de comparação, onde são dados o referente (Maria tem 8 bonecas) e a relação (5 bonecas a menos), e se pede o referido. Nesta situação a relação entre o referente e o referido é negativa. A resposta correta esperada era: Laura tem 3 bonecas e para obter esta resposta era preciso que o estudante dominasse os conceitos de comparação e de subtração. Nesse sentido, Magina (2008) afirmou que os problemas de comparação, cujo referente ou resultado da comparação são dados, como acontece no problema proposto (P3), requerem que a criança perceba a “comparação” como uma relação entre os grupos.

A Figura 33 ilustra o desempenho dos estudantes na solução do terceiro problema (P3).

Figura 33 - Porcentagem de acerto no Problema 3, por ano escolar



Fonte: Dados da Pesquisa

Na Tabela 15 e Figura 33 identificamos que a taxa de acerto geral foi de 67,2% e que há um crescimento linear de acertos do terceiro para o quinto ano, de 47,8% no 3º, para 71,4% no 4º ano e 85% no 5º ano. Destaca-se que essa diferença do terceiro para o quinto ano foi estatisticamente significativa.

Os resultados apresentados na Figura 33 confirmaram a nossa hipótese de que o acerto aqui seria inferior aos dois problemas anteriores, posto que exigiu um raciocínio mais aprimorado. Em comparação aos resultados obtidos nos problemas anteriores, a queda de percentual fica evidente no desempenho do terceiro e quarto anos de escolaridade, respectivamente, 47,8% e 71,4%. Similarmente, em seus estudos Magina e Campos (2004) também registraram uma queda no percentual de acertos em um problema análogo, aplicado em 248 sujeitos, para verificar suas competências em lidar com problemas de estruturas aditivas.

Magina (2008) e Nunes e Bryant (1997) apontaram que esse tipo de problema parece trazer mais dificuldades para os alunos, o que fica evidenciado pelo percentual de erros apresentados pelos estudantes do 3º e 4º anos de escolaridade, respectivamente, 52,2% (n=12) e 28,6% (n=6).

Apesar de os resultados indicarem uma queda no percentual de acertos quando comparado aos problemas anteriores, destaca-se que houve um aumento na porcentagem de acertos das primeiras para as últimas séries, isto é, o percentual de acertos aumentou à medida que o ano de escolaridade também aumentou, a saber: quase 23% do 3º para o 4º ano e quase 14% do 4º para o 5º ano. Dessa forma, os resultados permite acreditar que há uma efetiva contribuição da escola quanto ao desempenho desses alunos em problemas deste tipo, dado que aqueles que obtiveram melhores resultados pertenciam as séries mais avançadas.

Com relação às dificuldades apresentadas pelos estudantes do terceiro e quarto anos com a correção do teste seguindo os critérios definidos por Charles, conforme mostra a Tabela 24, foi possível observar que dos 10 estudantes que obtiveram a pontuação zero, sete desses são estudantes do 3º ano de escolaridade e três matriculados no quarto ano de escolaridade.

Destaca-se ainda que oito desses estudantes demonstraram não ter entendido o problema apresentando como resposta “5”, isto é, um número copiado do problema. Além disso, a análise dos protocolos permitiu verificar que desses oito estudantes com pontuação zero, sete não demonstraram o procedimento de solução e uma estudante do terceiro ano mesmo utilizando o desenho como estratégia de solução não logrou êxito.

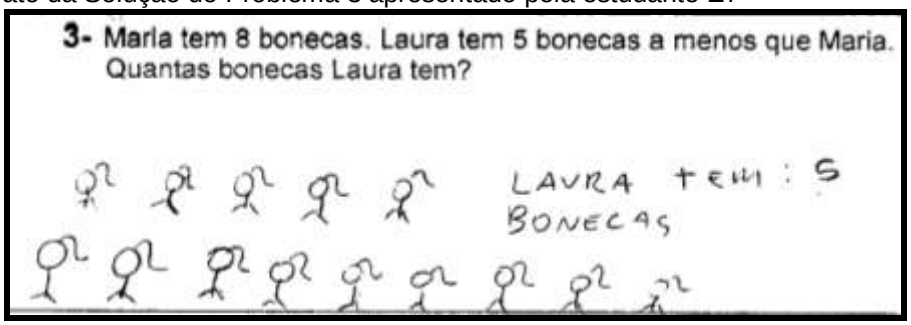
Tabela 24 - Pontuação na escala de Charles no Problema 3, por ano escolar

Pontuação na escala de Charles	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
0	7	30,4	3	14,3	0	0,0	10	15,6
1	3	13,0	1	4,8	2	10,0	6	9,4
2	0	0,0	3	14,3	0	0,0	3	4,7
3	1	4,3	0	0,0	0	0,0	1	1,6
4	1	4,3	0	0,0	1	5,0	2	3,1
5	11	47,8	14	66,7	17	85,0	42	65,6
Total	23	100,0	21	100,0	20	100,0	64	100,0

Fonte: Dados da Pesquisa

A Figura 34 apresenta o protocolo de solução da estudante (E7) que mesmo tendo o auxilio do desenho não solucionou corretamente o problema.

Figura 34 - Extrato da Solução do Problema 3 apresentado pela estudante E7



Fonte: Dados da Pesquisa

Pela análise do protocolo observa-se que a estudante tentou representar as bonecas pertencentes à Maria e as bonecas que pertenciam a Laura, no entanto, ao invés de desenhar oito bonecas desenhou uma a mais. Se ela tivesse entendido com essa representação incorreta a resposta teria sido 4 e não 5 que é cópia de um dado do enunciado.

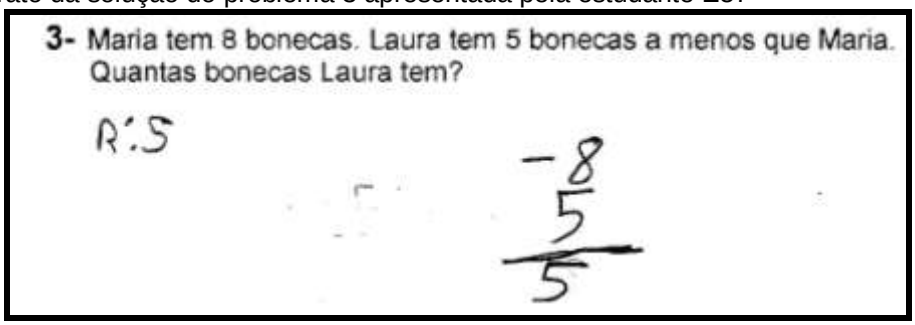
Vergnaud (2014) esclareceu que a relação biunívoca pode ser estabelecida visualmente, por meio da correspondência termo a termo entre as duas coleções, nesse caso, as bonecas de Maria e as bonecas de Laura, para tanto seria suficiente dispor uma boneca exatamente em frente a outra, e perceberia a diferença na quantidade. Ou seja, acreditamos que a estudante identificaria que faltariam três bonecas para que pudesse igualar a quantidade de ambas.

Em relação a este aspecto Nunes et al (2009) destacou que a solução obtida pelo esquema de correspondência, com o apoio do desenho, normalmente leva a respostas certas.

Em relação à alta incidência da resposta 5, principalmente entre as crianças do terceiro ano com 21,7% (n= 5), nos permite supor que além do grau de dificuldade inerente à própria categoria do problema, parte desses estudantes provavelmente realizou uma leitura desatenta levando em conta somente o trecho “Laura tem 5 bonecas”.

Dos três estudantes do quinto ano que erraram esse problema, dois realizaram a operação de adição (8+5) demonstrando, de fato, a falta de entendimento do problema e dos cálculos relacional e numérico exigidos na solução. Uma estudante apresentou um erro de cálculo numérico, como mostra a Figura 35.

Figura 35 - Extrato da solução do problema 3 apresentada pela estudante E57



Fonte: Dados da pesquisa

Como mostra a Figura 35, observa-se que a estudante em questão não apresentou dificuldade no cálculo relacional, isto é, no raciocínio exigido para a solução do problema, mas sim no cálculo numérico. Podemos inferir que a dificuldade da estudante também está relacionada à *Execução do Plano* que consiste na 3ª etapa proposta por Polya (2006). Observa-se que se a estudante tivesse verificado cuidadosamente cada passo da execução, este erro poderia ter sido evitado. Ressalta-se ainda que a dificuldade nesta etapa, de certa forma, também implica na etapa posterior que seria o *Retrospecto*, que além da verificação cuidadosa de cada passo exigiria da estudante o reexame do resultado final.

A Tabela 25 traz os dados acerca das etapas da solução de problemas elaboradas por Polya (2006) em que os estudantes falharam.

Tabela 25 - Distribuição dos sujeitos de acordo com as fases da Solução de Problemas propostas por Polya (2006) em que os estudantes falharam na solução do problema 3

Etapas da solução propostas por Polya (2006)	3º ano	4º ano	5º ano	Total
	Nº	Nº	Nº	Nº
1ª Compreensão do problema	10	4	2	16
2ª Estabelecimento de um plano	0	2	0	2
3º Execução de um plano	2	0	1	3
4º Retrospecto	8	4	4	16
Total	20	10	7	37

Fonte: Dados da pesquisa

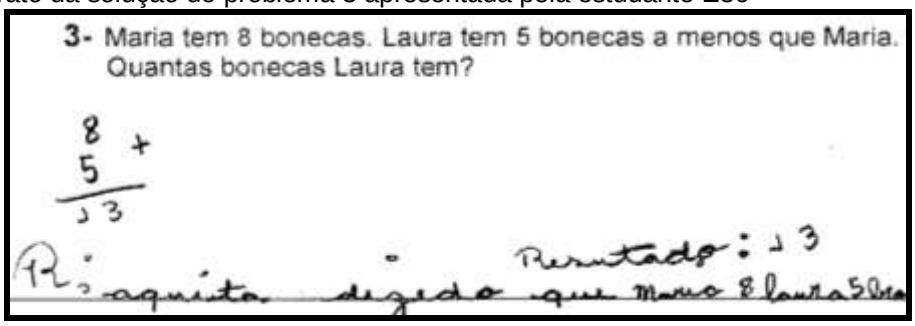
Observando-se os dados da Tabela 25 percebemos que a primeira etapa que consiste na *Compreensão do Problema* foi a etapa que os estudantes do 3º ano de escolaridade, seguido dos estudantes do 4º ano apresentaram um maior número de falhas no processo da solução do problema proposto, respectivamente, 43,4% (n=10) e

19% (n= 4). Nesta mesma etapa contamos com dois estudantes do 5º ano de escolaridade que apresentaram dificuldade.

Pode-se também observar que dos 43 (67,2%) estudantes que acertaram o terceiro problema 16 deles apresentaram dificuldade na última etapa que consiste no *Retrospecto*. Cabe sublinhar que neste total de 16 estudantes estão inseridos os estudantes que apesar de terem solucionado corretamente o problema proposto ou não demonstraram o procedimento utilizado, ou não descreveram a redação da resposta do problema.

A Figura 36 ilustra a solução apresentada por uma estudante do 4º ano (E36) que apresentou dificuldade na etapa de *Compreensão do Problema*.

Figura 36 - Extrato da solução do problema 3 apresentada pela estudante E36



Fonte: Dados da Pesquisa

Pela análise do protocolo podemos perceber que a estudante na tentativa de apresentar a redação da resposta, de certa forma, revela a compreensão que teve do problema por meio da frase: “aquita dizendo que Maria 8 laura 5 bonecas” (*sic*). Pela frase acreditamos que a estudante concluiu que a quantidade de bonecas de Maria era 8 e de Laura era 5, e somando as duas quantidades solucionaria o problema. Ou seja, ela não percebeu a relação de “comparação” presente na proposição do problema, pois, para solucionar o problema deveria estabelecer a comparação entre os grupos. A dificuldade apresentada pela estudante também está ligada ao cálculo relacional.

A Tabela 26 apresenta os dados referentes aos procedimentos adotados pelos estudantes para a solução do problema 3 (P3).

Tabela 26 – Tipo de representação utilizada na solução do Problema 3, por ano escolar

Representação	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Desenho	2	8,7	0	0,0	0	0,0	2	3,1
Cálculos	15	65,2	16	76,2	20	100,0	51	79,7
Desenho/Calc	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0
Sem representação	6	26,1	5	23,8	0	0,0	11	17,2
Total	23	100,0	21	100,0	20	100,0	64	100,0

Fonte: Dados da Pesquisa

Pela análise da Tabela 26 observa-se que os estudantes em sua maioria (79,7%) preferiram os cálculos numéricos como procedimento de solução de problemas. A escolha do desenho como estratégia para auxiliar na solução dos problemas têm ficado restrita a poucos estudantes do 3º ano, como pudemos verificar nos problemas anteriores.

Enquanto uma pequena parcela dos estudantes do 3º ano se utilizaram do desenho como procedimento de solução, a maioria dos estudantes do 4º ano têm apresentado níveis altos em relação à redação da resposta do problema, conforme mostra a Tabela 27.

Tabela 27 - Redação da resposta do Problema 3, por ano escolar

Redação	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Sim	3	13,0	13	61,9	8	40,0	24	37,5
Não	8	34,8	2	9,5	9	45,0	21	32,8
Errou a questão	12	52,2	6	28,6	3	15,0	19	29,7
Total	23	100,0	21	100,0	20	100,0	64	100,0

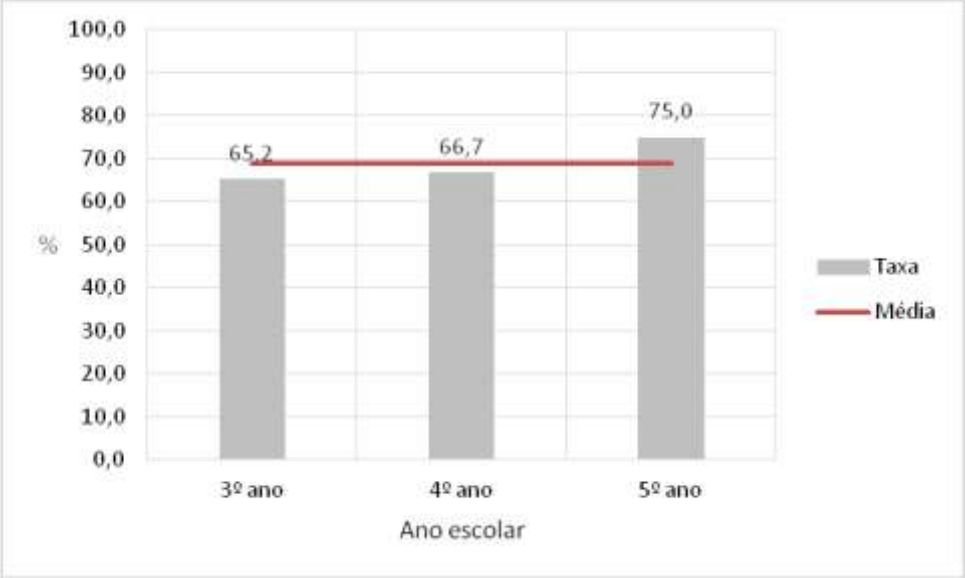
Fonte: Dados da Pesquisa

Pela análise da Tabela 27 podemos concluir que a maior parte dos estudantes do 4º ano não apresentaram dificuldade na etapa de *Retrospecto,* considerando que o ato de ler novamente a proposição do problema para a escrita da redação da resposta do problema pode ser caracterizado com um meio de avaliar a solução.

Análise do Problema 4

O quarto problema (P4) pertencia à categoria de *composição de transformações,* sendo duas transformações, uma positiva (+16) e a outra negativa (-9), e solicitava-se a terceira (+7), pela operação de subtração. A Tabela 15 e Figura 37 apresentam o desempenho dos estudantes nesse problema.

Figura 37 - Porcentagem de acerto no Problema 4, por ano escolar



Fonte: Dados da Pesquisa

Na Tabela 15 e Figura 37 confirmamos que a taxa de acerto geral foi de 68,8%. Os resultados mostram que, para os três anos de escolaridade, há um crescimento linear na porcentagem de acertos, respectivamente, 65,2% (n=15); 66,7% (n=14) e 75,0% (n=15), sendo apenas ligeiramente superior do 3º para o 5º ano, ainda que essas diferenças não tenham sido estatisticamente significativas conforme resultado no teste Qui-quadrado, constantes na Tabela 15.

Resultado similar foi encontrado por Vergnaud e Durand (apud Santana, 2010) em um estudo realizado com estudantes na faixa etária de 10 a 11 anos. Nesse tipo de problema os estudantes obtiveram um índice de acerto acima de 70%. Diferentemente Santana (2010), encontrou uma taxa de acertos abaixo de 50 % com estudantes do 4º ano de escolaridade. Destaca-se que em sua pesquisa Santana (2010) utilizou um problema dessa mesma categoria, todavia, a quantidade de transformações dadas eram superiores ao do problema (P4), isto é, foram três transformações positivas e duas negativas, além de exigir do estudante o domínio dos conceitos de composição, transformação, adição e subtração. Acredita-se que seja essa umas das razões para o percentual encontrado pela autora, e os resultados desta pesquisa que registraram uma taxa de acerto de 66,7% para os estudantes do quarto ano.

A este respeito Vergnaud (2014) apontou que dentro de cada uma das categorias temos as mais diversas classes de situações-problema, cujo cálculos relacionais

necessários para a solução não são da mesma complexidade. Koch e Soares (2005) acrescentaram que dentro de uma mesma categoria de problema ainda que aparentemente semelhantes, é necessário, para aprofundar a compreensão dos conteúdos, retomar ano após ano, em situações e contextos diversos.

Ainda em relação ao índice abaixo de 50% encontrado na pesquisa de Santana (2010), cabe destacar que no estudo comparativo realizado por Mendonça et al (2007) com estudantes do Estado de São Paulo e da Bahia observou-se que o desempenho dos dois grupos partiram, em geral, de patamares muito próximos na primeira série, no entanto, o desenvolvimento foi se distanciando à medida que as séries avançaram. Dessa forma, as autoras salientaram que o contexto socioeconômico e cultural foi um fator relevante para explicar os resultados encontrados.

Nesta perspectiva ao confrontarmos os resultados encontrados na presente pesquisa aos apontados por Santana (2010) ratificamos o apontamento de Mendonça et al (2007) no que diz respeito a variável “contexto socioeconômico e cultural”, pois, a pesquisa de Santana (2010) assim como o estudo comparativo de Mendonça et al (2007) foram realizados na Bahia. A este respeito Vergnaud (apud MENDONÇA ET AL 2007) destacou que os resultados parecem evidenciar que não se trata de um problema ligado às estruturas cognitivas do estudante, mas sim de ensino, isto é, a expansão do campo conceitual aditivo obrigatoriamente passa pelo processo de ensino.

Buscando compreender melhor as dificuldades apresentadas pelos estudantes, analisamos a pontuação na escala Charles por ano escolar (Tabela 28). Identificamos que três estudantes do 3º ano e um do 4º ano tiveram a pontuação zero e um estudante do 5º ano atingiu o nível 1 na pontuação da escala de Charles.

Tabela 28 - Pontuação na escala de Charles no Problema 4, por ano escolar

Pontuação na escala de Charles	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
0	3	13,0	1	4,8	0	0,0	4	6,3
1	3	13,0	0	0,0	1	5,0	4	6,3
2	2	8,7	2	9,5	0	0,0	4	6,3
3	0	0,0	0	0,0	1	5,0	1	1,6
4	2	8,7	6	28,6	3	15,0	11	17,2
5	13	56,5	12	57,1	15	75,0	40	62,5
Total	23	100,0	21	100,0	20	100,0	64	100,0

Fonte: Dados da Pesquisa

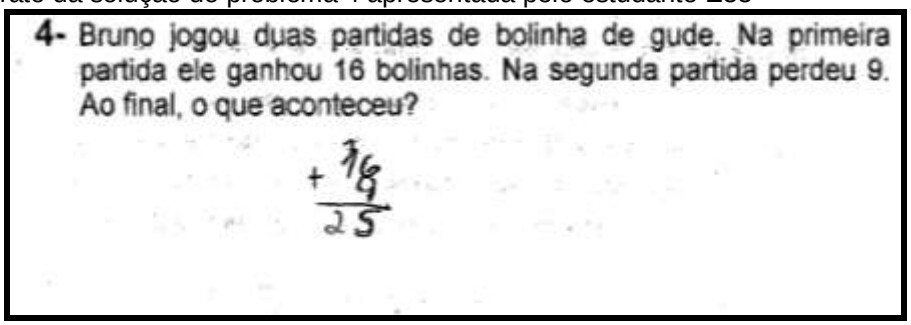
Pela análise dos protocolos dos estudantes foi possível identificar que a maior parte dos erros apresentados pelos estudantes do 4º e 5º anos de escolaridade estão ligados à execução dos cálculos numéricos e apenas um estudante de cada ano, respectivamente, 4º e 5º apresentaram dificuldades inerentes ao cálculo relacional.

Por outro lado, os erros encontrados nos protocolos dos estudantes do 3º ano em sua maioria estão ligados ao cálculo relacional. Os estudantes que erraram, em sua maioria realizaram a soma das duas partes apresentadas no problema “16” e “9” obtendo o resultado 25. Para estes estudantes as expressões “ganhou 16” e “perdeu 9” não os auxiliaram na solução. Acrescentamos ainda que, uma outra possibilidade para tentar justificar essa dificuldade apresentada pelos estudantes pode estar relacionada à proposição do problema.

Brito (2006) observou que quando solicitado aos alunos a proporem problemas verbais, a maior parte deles permaneciam altamente dependentes dos modelos de problemas dados em sala de aula pelo professor, ou dos modelos propostos no livro didático. Desta forma, acreditamos que à medida que o estudante fica dependente dos modelos apresentados em sala para elaborar problemas, isto pode estender-se também para a solução dos mesmos. Ou seja, o estudante por vezes fica condicionado a resolver problemas que apresentam sempre aquele mesmo enredo, que na maioria das vezes, traz a pergunta de forma objetiva: Com quantos ficou? Quantos sobrarão? Quantos ganharam? E neste problema proposto no instrumento (P4) a maneira como a pergunta aparece pode ter sido um fator de dificuldade para algumas crianças.

A Figura 38 apresenta o protocolo de solução do sujeito E55 que apresentou erro no cálculo relacional.

Figura 38 – Extrato da solução do problema 4 apresentada pelo estudante E55



Fonte: Dados da Pesquisa

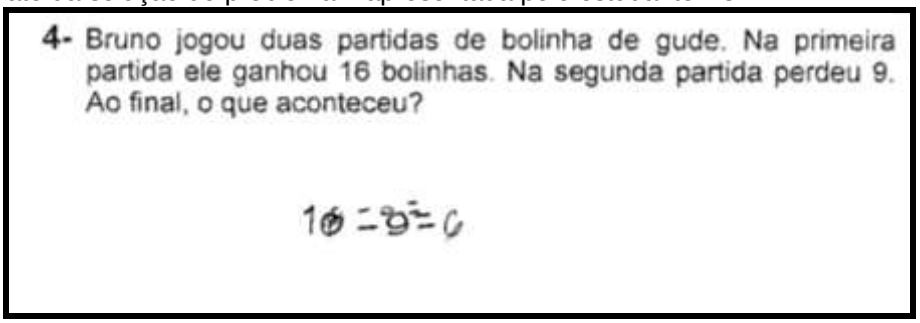
O sujeito E55 era estudante do 5º ano, e na ocasião do preenchimento do questionário informativo declarou que era repetente do 5º ano e quando questionado sobre a periodicidade de estudo o mesmo declarou que nunca estuda matemática fora do ambiente escolar.

A análise do procedimento nos mostrou que o aluno não apresentou dificuldade na execução do cálculo numérico, no entanto, sua dificuldade está ligada ao cálculo relacional exigido na solução do problema. A preocupação torna-se maior ainda, pelo fato desse aluno já ter sido retido no 5º ano e mesmo a proposição do problema trazendo explicitamente a expressão “perdeu” ele não conseguiu relacioná-la a operação de subtração.

Koch e Soares (2005) em seus estudos apontaram que a maioria dos estudantes do 6º ano, embora dominem várias competências matemáticas relativas às situações de estrutura aditiva, ainda não as consolidaram, tanto no que tange aos cálculos relacionais, quanto no que se refere aos diversos sistemas de notação que lhe são pertinentes.

Dentre os estudantes do 3º ano que tiveram a pontuação zero atribuído na escala Charles, destaca-se o protocolo (Figura 39) do estudante E8.

Figura 39 - Extrato da solução do problema 4 apresentada pelo estudante E8



Fonte: Dados da Pesquisa

O estudante em questão quando do preenchimento do questionário informativo declarou que estuda matemática só na véspera da prova e quase sempre entende os problemas dados em aula. Em relação ao procedimento utilizado durante a solução de problemas afirmou que na maioria das vezes utiliza desenho para solucionar problemas, fato este que não foi confirmado pela análise do protocolo, considerando que o estudante não recorreu ao auxilio do desenho em solução alguma dos problemas propostos.

Pela análise do protocolo do estudante a resposta apresentada por ele parece representar uma tentativa frustrada de solucionar o problema por meio do cálculo numérico. Em referência a este aspecto Palanch (2012) destacou que o procedimento didático de ensinar primeira o cálculo numérico "as continhas" e posteriormente propor aos alunos a solução de problemas, por vezes, acaba fazendo com que os cálculos numéricos necessariamente tenham que aparecer nos procedimentos de solução. Pode ser essa uma das razões para a solução apresentada pelo estudante, uma representação confusa, que não o auxiliou a encontrar a resposta certa.

Neste sentido, Nunes et al 2009 (p.68) destacaram a importância dos professores em incentivarem os alunos [...] *"a registrarem suas estratégias de resolução de problemas para que elas possam ser discutidas, validadas, e comparadas entre si"* . Os autores ressaltaram ainda que a explicitação do raciocínio auxilia o aluno a entender melhor suas próprias estratégias, além de ajudar o professor na tarefa de garantir *feedback* e propiciar situações que conduzam os estudantes a novas formar de abordar o problema.

A tabela a seguir mostra a frequência dos estudantes de acordo com as etapas em que falharam durante a solução do quarto problema (P4).

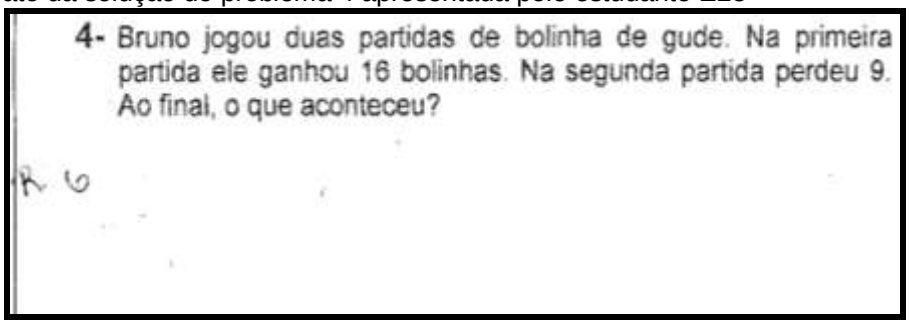
Tabela 29 - Distribuição dos sujeitos de acordo com as fases da Solução de Problemas propostas por Polya (2006) em que os estudantes falharam na solução do problema 4

Etapas da solução propostas por Polya (2006)	3º ano	4º ano	5º ano	Total
	Nº	Nº	Nº	Nº
1ª Compreensão do problema	6	1	1	8
2ª Estabelecimento de um plano	0	0	0	0
3º Execução de um plano	2	6	4	12
4º Retrospecto	8	2	3	13
Total	16	9	8	33

Fonte: Dados da pesquisa

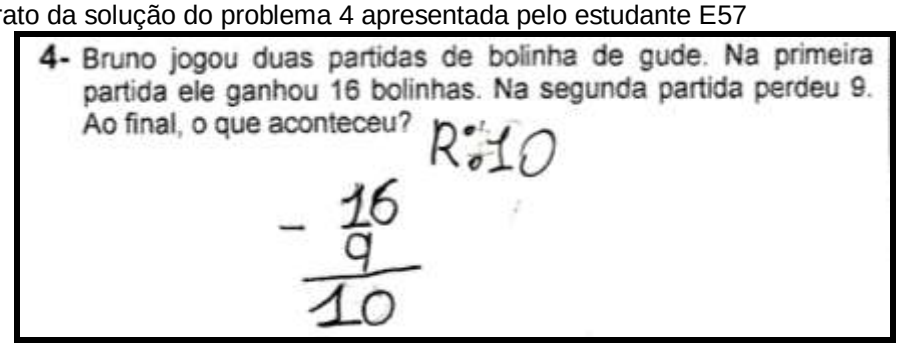
Estes dados permitem observar que entre os estudantes do 4º e 5º ano de escolaridade a maior dificuldade deles estava centrada na terceira etapa da solução de problema proposta por Polya (2006), que compreende a *Execução de um plano.* As Figuras 40 e 41, mostram a solução apresentada por dois estudantes, respectivamente, 4º e 5º anos de escolaridade.

Figura 40 - Extrato da solução do problema 4 apresentada pelo estudante E25



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 41 - Extrato da solução do problema 4 apresentada pelo estudante E57



Fonte: Dados da Pesquisa

A análise de ambos os protocolos permite concluir que assim como os dados revelaram que a diferença do desempenho neste problema não foi estatisticamente significativa, os procedimentos utilizados pelos estudantes também não apresentaram diferenças qualitativas. Ou seja, a estudante do 4º ano de escolaridade apresentou dificuldades na execução do cálculo numérico, ainda que não tenha deixado registrado o procedimento numérico (16-9), além dos “palitinhos” representando as bolinhas. Percebe-se que optou por apagar e manter somente a resposta “6”. Analogamente a estudante do 5º ano também apagou um dos procedimentos utilizados para a solução do problema “palitinhos” e manteve apenas o cálculo numérico (16-9), indicando “10” como resposta.

Em relação às dificuldades apresentadas pelos estudantes na etapa do *Retrospecto,* os estudantes do 3º ano foram os que apresentaram maior dificuldade, ou seja, dos 15 estudantes que acertaram o problema, oito deles não apresentaram a resposta para a solução apresentada.

Analisando o conjunto dos procedimentos adotados pelos estudantes durante a solução do problema (P4) apresentamos os dados na Tabela 30.

Tabela 30 – Tipo de representação utilizada na solução do Problema 4, por ano escolar

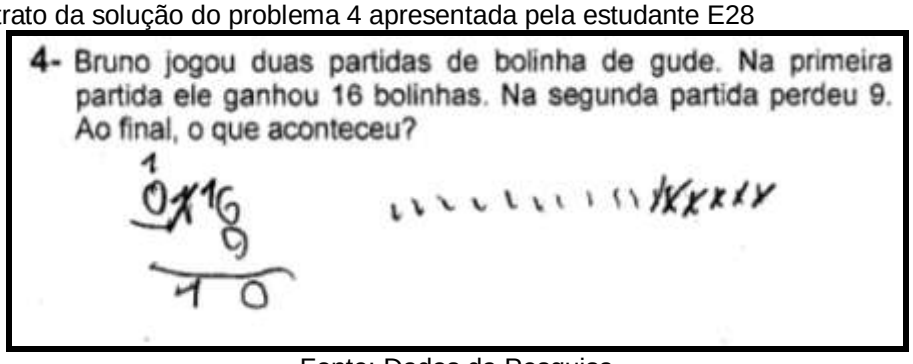
Representação	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Desenho	1	4,3	0	0,0	0	0,0	1	1,6
Cálculos	19	82,6	17	81,0	20	100,0	56	87,5
Desenho/Calc	0	0,0	1	4,8	0	0,0	1	1,6
Sem representação	3	13,0	3	14,3	0	0,0	6	9,4
Total	23	100,0	21	100,0	20	100,0	64	100,0

Fonte: Dados da Pesquisa

O procedimento de cálculo numérico foi o mais utilizado pelos estudantes do 3º, 4º e 5º anos de escolaridade. Uma quantidade pequena de estudantes (n=6) não explicitou seus procedimentos e apenas um estudante do 3º ano recorreu ao desenho como forma de solucionar o problema.

A Figura 42 apresenta a solução do problema realizada por um estudante do 4º ano que apresentou duas estratégias para a solução: o desenho e o cálculo numérico.

Figura 42 – Extrato da solução do problema 4 apresentada pela estudante E28



Fonte: Dados da Pesquisa

O estudante E28 é aluno do 4º ano, e a análise do protocolo nos mostra que mesmo utilizando o desenho como estratégia, executou erroneamente o cálculo numérico. Os números utilizados nos problemas propostos foram pequenos, de forma, que o

estudante pudesse dirigir a sua atenção para os cálculos relacionais exigidos em cada situação. Nesse sentido, Vergnaud (2014) destacou que o cálculo numérico também pode ser considerado um fator que intervêm no processo de solução de problemas. Todavia, enfatizou que os números grandes ocasionam mais dificuldades que os números pequenos, os números decimais, mais dificuldades que os números inteiros, com exceção quando a operação necessária se reduz a uma composição de números pequenos ou a operações mentais simples, do tipo 4.000 + 5.000. Nesse caso, a operação se resumia a números pequenos e por ser estudante do 4º ano acreditamos que já deveria ter superado essa dificuldade.

Tentando compreender melhor em quais das etapas os estudantes apresentaram maior dificuldade durante o processo de solução de problemas, realizamos a análise dos dados em virtude de ter ou não apresentado a redação da resposta do problema, conforme mostra a Tabela 31.

Tabela 31 - Redação da resposta do Problema 4, por ano escolar

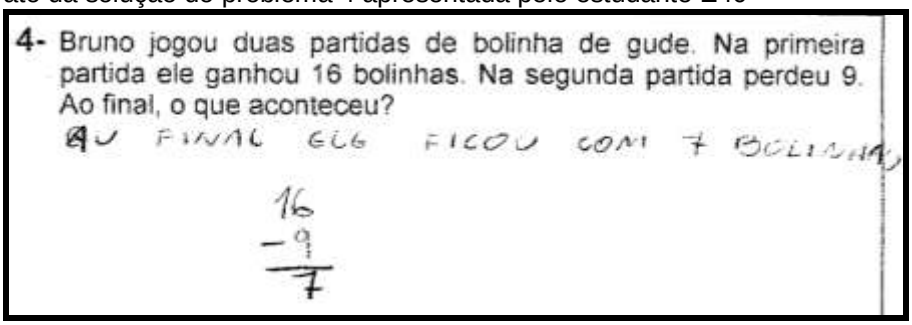
Redação	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Sim	7	30,4	12	57,1	9	45,0	28	43,8
Não	8	34,8	2	9,5	6	30,0	16	25,0
Errou a questão	8	34,8	7	33,3	5	25,0	20	31,3
Total	23	100,0	21	100,0	20	100,0	64	100,0

Fonte: Dados da Pesquisa

Os estudantes do 4º ano continuam se sobressaindo na redação da resposta do problema, quando comparado aos dados dos problemas anteriores. Nesse caso é possível perceber que dos 14 (66,6%) estudantes que acertaram o problema, apenas dois não apresentaram a redação do problema. Estes dados são convergentes aos descritos na Tabela 29, que se referem às etapas da solução de problemas as quais os estudantes apresentaram dificuldades.

A Figura 43 apresenta a redação de uma resposta dada por um estudante do 4º ano de escolaridade.

Figura 43 - Extrato da solução do problema 4 apresentada pelo estudante E40



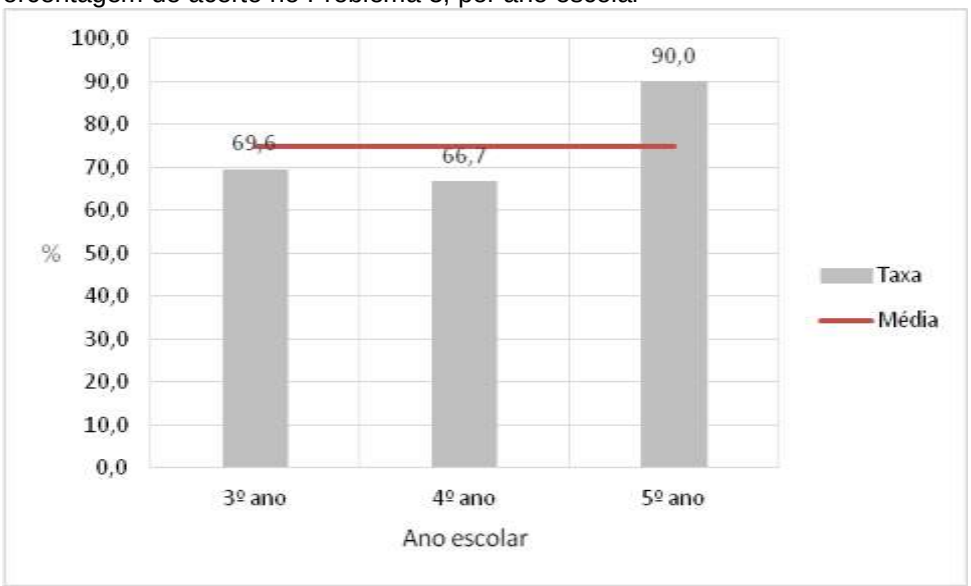
Fonte: Dados da Pesquisa

Pela análise da redação da resposta redigida pelo estudante percebemos que ele compreendeu a proposição do problema por apresentar uma resposta coerente à pergunta do problema.

Análise do Problema 5

O quinto problema (P5) é classificado como transformação de uma relação: foi dada uma relação estática negativa (devia 12) e uma transformação positiva (pagou 5). Por meio da transformação dada tinha que se buscar uma nova relação estática, que nesse caso, era descobrir "*quanto ainda devia para Henrique".* O aluno precisava dominar os conceitos de transformação de uma relação e de subtração para solucionar esse problema com êxito. A Tabela 15 e a Figura 44 apresentam o desempenho dos estudantes no quinto problema.

Figura 44 - Porcentagem de acerto no Problema 5, por ano escolar



Fonte: Dados da Pesquisa

Na Tabela 15 e Figura 44 verificamos que a taxa de acerto geral foi de 75%. Os dados mostram que, em geral, houve aumento na taxa de acertos dos três anos de escolaridade. Nota-se também um expressivo avanço no percentual de acertos do 5º ano em relação ao 4º ano, respectivamente, 90% (n=18) e 66,7% (n=14). Todavia, essas diferenças não foram estatisticamente significativas conforme resultado no teste Qui-quadrado constantes na Tabela 15.

Apesar de apresentar uma estrutura mais complexa que os problemas anteriores os resultados confirmaram a hipótese levantada sobre a facilidade de compreensão que uma situação presente no cotidiano traria para os estudantes.

Neste sentido, Vergnaud (2014) apontou que bolinhas de gudes ganhas ou perdidas, somas de dinheiro gastas ou ganhas, quilômetros percorridos, quantidades físicas consumidas ou produzidas, não podem ser colocadas no mesmo plano, uma vez que, essas noções às quais elas fazem referência não são do mesmo nível. O autor exemplificou da seguinte forma: "*o aumento (ou a diminuição) de uma população não é compreendido tão facilmente quanto o ganho (ou a perda) de bolinhas de gude, se não o fosse pela referência desigual assim feita à vida cotidiana da criança*." (VERGNAUD, 2014, p.214).

Em um problema similar aplicado por Santana (2010), a 98 estudantes que cursavam a 4º ano do ensino fundamental, a pesquisadora observou um percentual de acerto de 56% dos estudantes. A autora apoiada nos resultados de outras pesquisas realizadas em regiões distintas do Brasil, destacou ainda que problemas da categoria de *transformação de uma relação,* em geral não são trabalhados nos livros didáticos normalmente adotados pelos professores.

Destaca-se ainda que o confronto de dados com tais pesquisas: Santana (2010) e Santana et al (2009) está relacionado ao fato dessas pesquisas terem aplicado problemas similares aos dois últimos propostos em nosso instrumento (P5 e P6).

Buscando averiguar melhor as dificuldades encontradas pelos estudantes, analisamos a pontuação na escala de Charles por ano escolar, conforme mostra a Tabela 32.

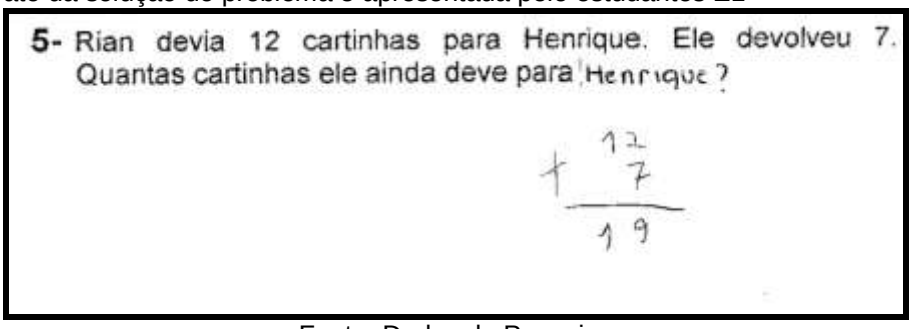
Tabela 32- Pontuação na escala de Charles no Problema 5, por ano escolar

Pontuação na escala de Charles	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
0	3	13,0	2	9,5	0	0,0	5	7,8
1	3	13,0	3	14,3	1	5,0	7	10,9
2	4	17,4	3	14,3	1	5,0	7	10,9
3	0	0,0	0	0,0	1	5,0	1	1,6
4	1	4,4	2	9,5	0	0,0	4	6,3
5	12	52,2	11	52,4	17	85,0	40	62,5
Total	23	100,0	21	100,0	20	100,0	64	100,0

Fonte: Dados da Pesquisa

Pela análise dos protocolos observa-se que a maior parte dos estudantes que erraram o problema apresentaram dificuldades no cálculo relacional. Dos sete estudantes do 3º ano, seis deles não identificaram qual era o cálculo relacional exigido e demonstraram a solução por meio da operação de adição (12+7). A Figura 45 ilustra a solução apresentada por um estudante (E1) do 3º ano.

Figura 45 - Extrato da solução do problema 5 apresentada pelo estudantes E1

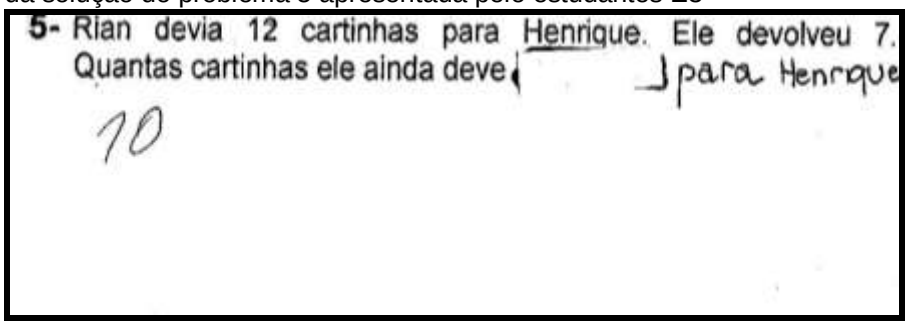


Fonte: Dados da Pesquisa

Analogamente, na análise de protocolo dos estudantes do 4º ano identificamos que seis estudantes também apresentaram dificuldades em relação ao cálculo relacional e por fim, no 5º ano apenas um estudante apresentou essa dificuldade. Ao considerar a amostra total (n=64) verifica-se que 20,3% dos estudantes demonstraram dificuldades no cálculo relacional.

Na sequência, são apresentados dois protocolos do problema 5, realizados por estudantes do terceiro ano, sujeito E3 e E10, respectivamente, nas figuras 46 e 47.

Figura 46 – Extrato da solução do problema 5 apresentada pelo estudantes E3



Fonte: Dados da Pesquisa

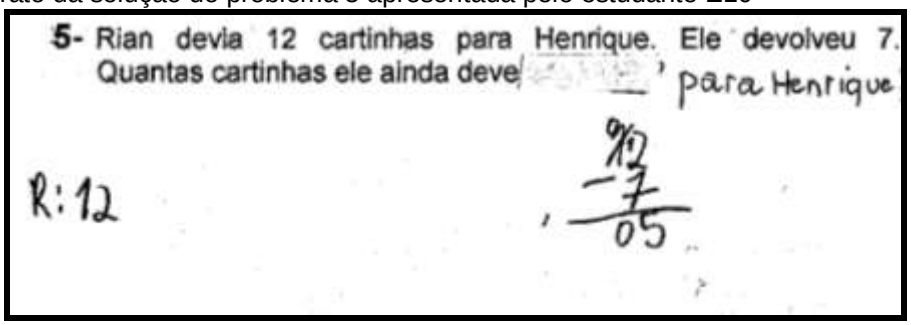
Neste protocolo da solução do problema o sujeito E3 demonstrou não ter compreendido o problema, a julgar pela sua resposta. Pela resposta apresentada pelo estudante “10” é possível perceber que a dificuldade do estudante pode estar relacionada à primeira etapa proposta por Polya (2006) que envolve a *Compreensão do Problema*.

Podemos levantar a hipótese de que o estudante tenha respondido ao acaso (chutou) “10”, e de acordo com o seu questionário declarou não ter dificuldade na leitura. Desta forma, partindo do pressuposto que o estudante tenha realizado a leitura sem problemas, acreditamos que sua dificuldade estaria ligada ao cálculo relacional exigido para a solução problema. De qualquer forma, sem o registro dos procedimentos utilizados para a solução do problema, fica mais difícil identificarmos os *teoremas-em-ação* usados pelo estudante. Nunes et al (2009) destacou que os *teoremas-em-ação* constituem o conhecimento matemático que as crianças desenvolvem em sua vida diária.

Quando do preenchimento do questionário o estudante declarou que na maioria das vezes utiliza desenhos para solucionar os problemas. No entanto, pela análise dos protocolos do sujeito constatou-se o uso do desenho apenas no primeiro problema (P1). O fato de afirmar o uso de desenhos como estratégia para solução dos problemas, não se traduz na obrigatoriedade da presença desses em seus procedimentos. Todavia, acreditamos que caso o estudante tivesse lançado mão dessa estratégia poderia ter atingido um desempenho melhor.

O protocolo a seguir ilustra o procedimento de solução do sujeito E10, nesse caso o estudante provavelmente por um lapso transcreveu a resposta erroneamente.

Figura 47 – Extrato da solução do problema 5 apresentada pelo estudante E10



Fonte: Dados da Pesquisa

Como pode ser verificado, o sujeito E10 não apresentou dificuldade no que diz respeito aos cálculos relacional e numérico, sua dificuldade está relacionada à etapa do *Retrospecto,* ou seja, supomos que se o estudante tivesse realizado um reexame cuidadoso em todos os passos executados para a solução, provavelmente conseguiria identificar seu erro e corrigi-lo.

No entanto se analisássemos os protocolos dos sujeitos E3 e E10 somente em termos de certo e errado, não conseguiríamos compreender a diferença qualitativa de desempenho entre esses dois sujeitos. Brito (2006) destacou que o professor ao deixar de lado os procedimentos empregados pelo aluno, não permite a retomada do processo de pensamento aplicável àquele tipo de problema.

A Tabela 33 apresenta os dados referentes às etapas da solução de problemas que os estudantes apresentaram maior dificuldade ao resolverem o quinto problema (P5).

Tabela 33 - Distribuição dos sujeitos de acordo com as fases da Solução de Problemas propostas por Polya (2006) em que os estudantes falharam na solução do problema 5

Etapas da solução propostas por Polya (2006)	3º ano	4º ano	5º ano	Total
	Nº	Nº	Nº	Nº
1ª Compreensão do problema	6	5	1	12
2ª Estabelecimento de um plano	0	0	0	0
3º Execução de um plano	1	2	1	4
4º Retrospecto	10	1	4	15
Total	17	8	6	31

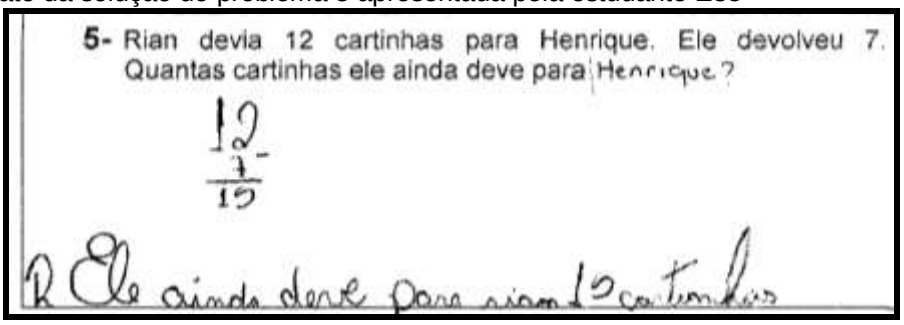
Fonte: Dados da pesquisa

Os resultados indicaram que os estudantes do 3º ano de escolaridade apresentaram maior dificuldade na *Compreensão do Problema*, seguido pelos estudantes do 4º ano, com um total de cinco estudantes. Acerca desta etapa Polya (2006) destacou

que a compreensão do problema perpassa primeiramente pelo entendimento do enunciado verbal. Acrescentando-se ainda a necessidade do familiarizar-se com o problema, gravar na mente o seu objetivo.

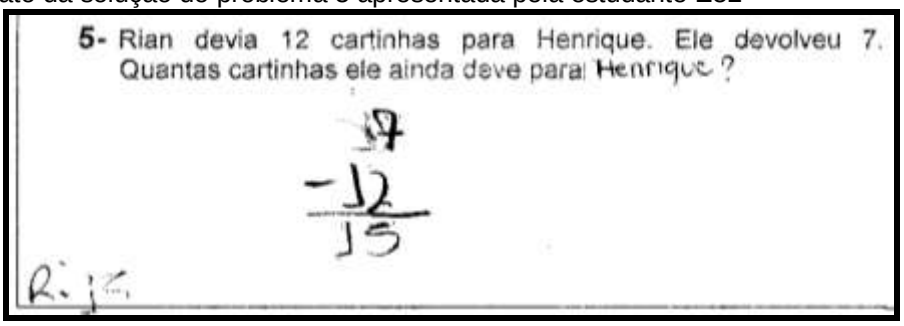
Em relação aos estudantes do 4º e 5º anos de escolaridade que apresentaram dificuldades na *Execução do Plano,* destaca-se que a dificuldade pontual desses estudantes está ligada à execução dos cálculos numéricos. Polya (2006) sublinhou a importância de realizar detalhadamente todas as operações algébricas e geométricas, em especial, nesta pesquisa as operações aritméticas. As Figuras 48 e 49 ilustram, respectivamente, a solução apresentada por uma estudante do 4º ano e por uma do 5º ano.

Figura 48 - Extrato da solução do problema 5 apresentada pela estudante E35



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 49 - Extrato da solução do problema 5 apresentada pela estudante E52



Fonte: Dados da Pesquisa

Pela análise dos protocolos foi possível observar que a dificuldade apresentada por ambas está relacionada à compreensão das características do Sistema de Numeração Decimal, dentre elas, o valor posicional. O procedimento de subtração implica em colocar um número sobre o outro, com seus valores posicionais alinhados, de forma que a unidade do primeiro fique exatamente sobre a unidade do segundo, a dezena do primeiro

fique exatamente sobre a dezena do segundo, e assim por diante. Ressalta-se que na subtração o maior número deve ser colocado sobre o menor número, do contrário, não é possível realizar a operação, como podemos verificar na Figura 49.

Outra particularidade do cálculo numérico exigido para a solução relaciona-se ao fato de que o algarismo “2” do primeiro número (12) é menor que 7. Nesse caso, como não é possível tirar 7 de 2, o estudante pegaria uma unidade da próxima casa (dezena) e somaria essa dezena ao algarismo 2.

Nesse sentido, Gardner (apud ECHEVERRIA, 1998, p.62) destacou os efeitos de um ensino de Matemática pautado na aplicação rígida de algoritmos.

> [...] a maneira como se costuma ensinar Matemática e a maneira como se aprende esta disciplina acaba mostrando aos estudantes que a sua educação é correta quando o problema é enunciado de uma forma tal que lhes permite, rapidamente, vincular os números dados a uma equação ou a qualquer outro tipo de operação matemática (ECHEVERRIA, 1998, p.62)

Foi realizada uma outra análise a respeito do tipo de procedimento utilizado pelos estudantes para solucionarem os problemas. Os dados desta análise constam na Tabela 34.

Tabela 34- Tipo de representação utilizada na solução do Problema 5, por ano escolar

Representação	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Desenho	2	8,7	0	0,0	0	0,0	2	3,1
Cálculos	14	60,9	13	61,9	18	90,0	45	70,3
Desenho/Calc	1	4,3	2	9,5	1	5,0	4	6,3
Sem representação	6	26,1	6	28,6	1	5,0	13	20,3
Total	23	100,0	21	100,0	20	100,0	64	100,0

Fonte: Dados da Pesquisa

De um modo geral, a representação por meio do cálculo numérico foi a mais utilizado pelos estudantes, mas também chamou a atenção a quantidade de procedimentos não demonstrados (sem representação), segundo procedimento mais utilizado.

Pela análise dos protocolos, dentre aqueles que apresentaram a resposta correta do problema, verificou-se os que haviam apresentado uma redação para a resposta do problema, conforme descrito na Tabela 35.

Tabela 35 - Redação da resposta do Problema 5, por ano escolar

Redação	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Sim	7	30,4	13	61,9	7	35,0	28	43,8
Não	9	39,1	1	4,8	11	55,0	32	50,0
Errou a questão	7	30,4	7	33,3	2	10,0	4	6,3
Total	23	100,0	21	100,0	20	100,0	64	100,0

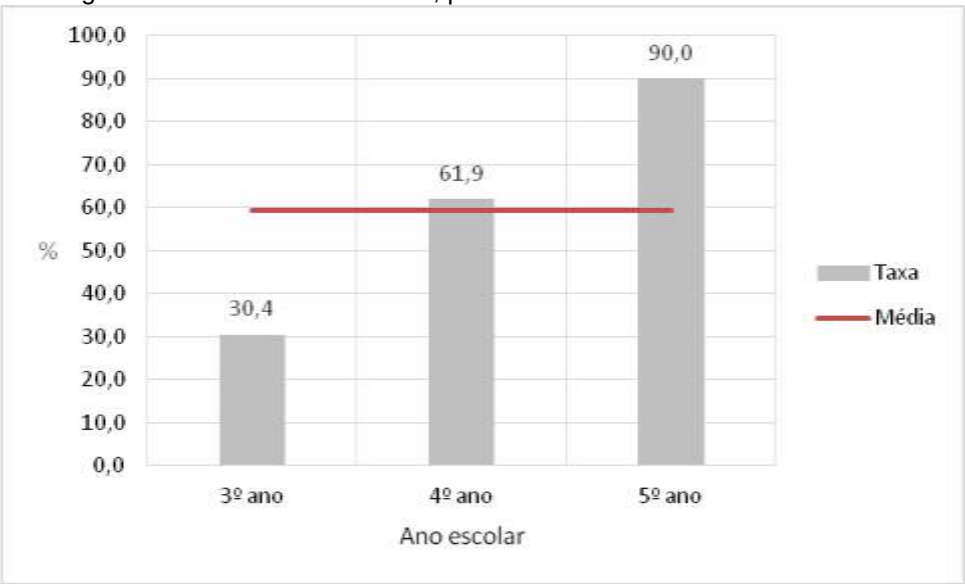
Fonte: Dados da Pesquisa

Desde o primeiro problema (P1) os estudantes do 4º ano de escolaridade são aqueles que em sua maioria têm apresentado a redação da resposta. Observa-se que 61,9% dos estudantes realizaram a redação da resposta do problema, o 5º ano registrou 35%. Enquanto que os estudantes do terceiro ano registraram 30,4%.

Análise do Problema 6

A Tabela 15 e a Figura 50 apresentam o desempenho dos estudantes na solução de um problema da categoria *composição de relações estáticas.* Há três relações estáticas dadas dentro da situação apresentada, a saber: “deve 8” é a primeira relação estática; a segunda fica evidenciada pela expressão “lhe deve 5” (no sentido de ter em haver 5) e a terceira que é caracterizada por “deve”.

Figura 50- Porcentagem de acerto no Problema 6, por ano escolar



Fonte: Dados da Pesquisa

De acordo com a revisão de literatura, já era esperado um baixo desempenho dos estudantes nessa categoria, a julgar pela sua complexidade. Dessa forma, apenas o 5º ano apresentou um resultado que superou a expectativa, registrando 90,0% (n=18) de acertos.

A taxa de acerto geral foi de 59,4%. Essa foi a questão mais difícil para os terceiro e quarto anos de escolaridade que registraram os maiores índices de erros, respectivamente, 69,6% (n= 16) e 38,1% (n=8). Os resultados do teste Qui-quadrado mostrou que a diferença de 60% entre o desempenho do 3º para o 5º ano de escolaridade foi estatisticamente significativa.

Em um problema dessa mesma categoria aplicado por Santana et al (2009), em 38 estudantes matriculados no 6º ano do ensino fundamental os resultados mostraram um desempenho inferior ao encontrado nesta pesquisa, apenas 10,5% dos estudantes responderam corretamente. O baixo desempenho apresentado por Santana et al (2009) em relação ao desempenho que registramos com os estudantes do 5º ano, deve-se ao diferente grau de complexidade dos problemas propostos.

No problema proposto por Santana et al (2009) havia três relações estáticas dispostas dentro da situação apresentada. No entanto, para obter o valor das relações o estudante tinha que resolver duas comparações, além do contexto do problema estar relacionado com o sistema monetário, em uma situação que não é tão comum ao cotidiano dos estudantes. As pesquisadoras ressaltaram que a maior parte dos estudantes apresentaram erros no cálculo relacional.

Os resultados obtidos pela análise dos protocolos dos estudantes corroboram os dados encontrados por Santana et al (2009) em relação à dificuldade centrada no cálculo relacional. Considerando a amostra total (n=64) 39% dos estudantes apresentaram dificuldade no cálculo relacional.

Procurando entender o porquê desses resultados, analisamos a pontuação na escala de Charles por ano escolar (Tabela 36) verificamos que 26,1% (n=6) dos estudantes do 3º ano atingiram a pontuação 5. A maior parte dos estudantes deste ano de escolaridade tiveram a pontuação zero ou um, o que nos revela que a maior parte desses estudantes tiveram dificuldades na *Compreensão do problema.*

Tabela 36 - Pontuação na escala de Charles no Problema 6, por ano escolar

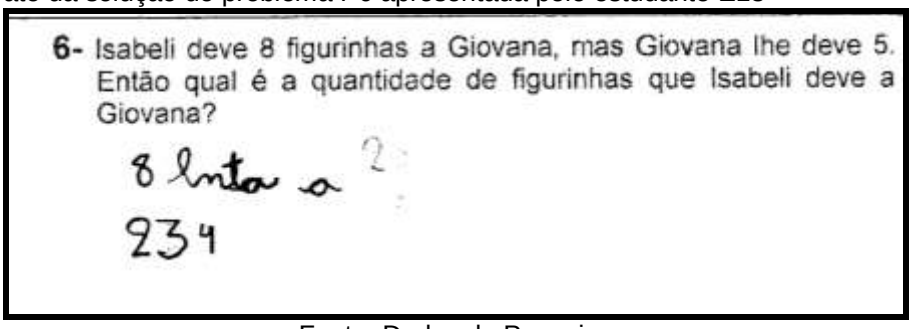
Pontuação na escala de Charles	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
0	8	34,8	4	19,0	0	0,0	12	18,8
1	8	34,8	4	19,0	1	5,0	13	20,3
2	1	4,3	2	9,5	2	10,0	5	7,8
4	0	0,0	0	0,0	1	5,0	1	1,6
5	6	26,1	11	52,4	16	80,0	33	51,6
Total	23	100,0	21	100,0	20	100,0	64	100,0

Fonte: Dados da Pesquisa

Quando atrelamos a análise dos protocolos à pontuação atribuída pela escala de Charles verificamos que dentre os 16 estudantes que erraram o problema P6, 8 deles somaram as quantidades presentes no enunciado do problema (8+5); quatro crianças copiaram os números apresentados no problema. E considerando a análise dos protocolos de dois estudantes acreditamos que quando da aplicação do instrumento provavelmente os estudantes estavam estudando a multiplicação, pois, nas duas situações os estudantes utilizaram a operação da multiplicação como procedimento de solução.

Dentre os estudantes do 3º ano que apresentaram dificuldades na compreensão do problema dois protocolos nos chamou a atenção, em virtude, das notações apresentadas pelos estudantes. As Figuras 51 e 52 apresentam os respectivos protocolos.

Figura 51 - Extrato da solução do problema P6 apresentada pelo estudante E18

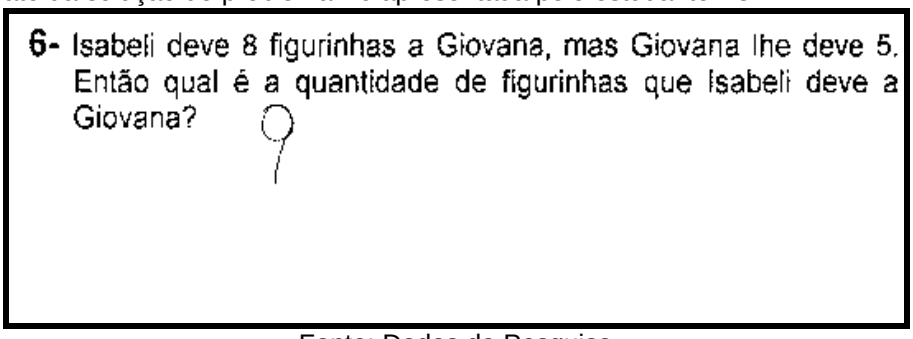


Fonte: Dados da Pesquisa

Analisando a solução apresentada pela estudante E18 não conseguimos realizar nenhuma inferência acerca dos *teoremas-em-ação*, ou seja, o que está implícito nas ações da criança. Para que, de fato, pudéssemos compreender o desenvolvimento da solução o ideal seria ouvir a estudante descrevendo como pensou para solucionar.

Destaca-se que não poderíamos avaliá-la somente a partir de um extrato da solução de um problema, no entanto, considerando suas notações podemos concluir que a estudante não tenha compreendido a proposta, e apresenta dificuldades na solução de problemas desta categoria.

Figura 52 - Extrato da solução do problema P6 apresentada pelo estudante E3



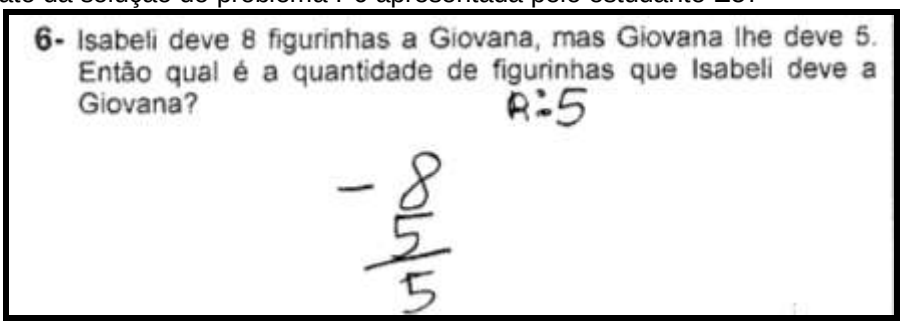
Fonte: Dados da Pesquisa

Assim como na situação anterior, pela análise do protocolo podemos sugerir que o estudante possa ter apresentado “9” ao acaso, pois ainda que tentasse solucionar por tentativa e erro, ao executar a adição das duas partes encontraria como resposta “13” e se fosse pela subtração “3”. Nestes dois casos a dificuldade de ambos está centrada na compreensão do problema.

Um pouco mais da metade dos estudantes do 4º ano atingiram a pontuação 5 na escala de Charles e com uma diferença de 27,6% registramos 80% (n=16) dos estudantes do 5º ano que atingiram este nível.

Considerando o bom desempenho dos estudantes do 5º ano na solução deste problema, cuja a estrutura era a mais complexa do instrumento observamos os protocolos dos dois estudantes que não lograram êxito e identificamos que o estudante E64 apresentou dificuldade na primeira etapa da solução proposta por Polya (2006): *Compreensão do problema*, enquanto que a estudante E57 apresentou dificuldades relativas à execução dos cálculos, conforme mostra a Figura 53.

Figura 53 - Extrato da solução do problema P6 apresentada pelo estudante E57



Fonte: Dados da Pesquisa

Buscando compreender melhor as dificuldades dos estudantes a seguir apresentamos a Tabela 37 com os dados relativos as etapas da solução de problemas em que os estudantes apresentaram dificuldades.

Tabela 37 - Distribuição dos sujeitos de acordo com as fases da Solução de Problemas propostas por Polya (2006) em que os estudantes falharam na solução do problema 6

Etapas da solução propostas por Polya (2006)	3º ano	4º ano	5º ano	Total
	Nº	Nº	Nº	Nº
1ª Compreensão do problema	16	8	1	25
2ª Estabelecimento de um plano	0	0	0	0
3º Execução de um plano	0	0	1	1
4º Retrospecto	4	2	4	10
Total	20	10	6	26

Fonte: Dados da pesquisa

A *Compreensão do Problema* foi a etapa em que os estudantes do 3º e 4º anos de escolaridade mais falharam. A segunda etapa em que os estudantes de um modo geral apresentaram dificuldade foi o *Retrospecto.* Dos 38 estudantes que acertaram esse problema, 26,3% apresentaram dificuldade nesta etapa. Ressaltando, que nesta porcentagem estão inseridos os estudantes que apresentaram a resposta correta, no entanto, alguns deles não explicitaram o procedimento de solução e outros não indicaram a redação da resposta.

O procedimento do cálculo numérico foi o mais utilizado pelos estudantes nos três anos de escolaridade, conforme mostra a Tabela 38.

Tabela 38 - Tipo de Representação utilizada na solução do Problema 6, por ano escolar

Representação	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Desenho	1	4,3	0	0,0	0	0,0	1	1,6
Cálculos	14	60,9	14	66,7	18	90,0	46	71,9
Desenho/Calc	0	0,0	1	4,8	0	0,0	1	1,6
Sem representação	8	34,8	6	28,6	2	10,0	16	25,0
Total	23	100,0	21	100,0	20	100,0	64	100,0

Fonte: Dados da Pesquisa

Investigamos ainda os estudantes que apresentaram a redação da resposta do problema 6 (P6). A Tabela 39 abaixo traz os resultados em função do ano de escolaridade.

Tabela 39 – Redação da resposta do Problema 6, por ano escolar

Redação	3º ano		4º ano		5º ano		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Sim	3	13,0	11	52,4	5	25,0	21	32,8
Não	4	17,4	2	9,5	13	65,0	18	28,1
Errou a questão	16	69,6	8	38,1	2	10,0	25	39,1
Total	23	100,0	21	100,0	20	100,0	64	100,0

Fonte: Dados da Pesquisa

É possível perceber pelos dados que entre os três anos de escolaridade o 4º ano foi o que apresentou os melhores índices de apresentação de redação da resposta. Os resultados indicaram o que se espera do processo de ensino, que o estudante seja capaz de solucionar problemas matemáticos e desenvolva a autonomia para realizar o *Retrospecto* da sua solução.

V- CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi realizado com o intuito de compreender as dificuldades que os estudantes do 3º ao 5º anos do ensino fundamental apresentam na solução de problemas de estrutura aditiva.

Os autores estudados no capítulo de revisão de literatura apontaram que a dificuldade dos estudantes pode estar relacionada a diversos fatores e de diferentes natureza, a saber: falta de políticas públicas que incentivem a formação continuada do professor em exercício no próprio ambiente de trabalho (JUSTO E DORNELLES, 2010); o trabalho com a solução de problemas limitando-se aos problemas do tipo prototípico (SANTANA ET AL, 2009), entre outras.

Se por um lado temos uma prática pautada no ensino das quatro operações, por outro temos uma parcela de estudantes que são submetidos a essa prática, contando com a realização de listas infindáveis de exercícios repetitivos cuja correção desconsidera os procedimentos apresentados pelo estudante, assim como suas hipóteses.

Dessa forma, pesquisou-se a seguinte questão:

Quais as relações entre desempenho e etapas da solução de problemas de estrutura aditiva?

Com a intenção de encaminhar a pesquisa, de forma, a obter respostas ao problema apresentado, foram elencados os seguintes objetivos:

- Verificar os procedimentos que os estudantes utilizam para solucionar problemas matemáticos de estruturas aditivas;
- Analisar se existe diferença de desempenho entre as crianças na solução de problemas de estrutura aditiva relacionada ao ano de escolaridade;
- Identificar dentre as etapas da solução de problemas, proposta por Polya, em quais delas os estudantes apresentam maior dificuldade.

Foi observado que, na ocasião do questionário informativo a prática de representar a solução por desenhos era mais frequente entre os estudantes do 3º ano, e esses dados foram confirmados pela análise dos protocolos, que evidenciou que a maioria dos estudantes que se valeram de desenhos como procedimento de solução estavam matriculados no 3º ano de escolaridade.

A Tabela 40 apresenta os dados acerca dos procedimentos utilizados pelos estudantes durante a solução de problemas.

Tabela 40 - Os procedimentos utilizados pelos estudantes durante a solução de problemas

	Representação	P1	P2	P3	P4	P5	P6	TOTAL
1	Utilizou desenhos para solucionar	2	3	2	1	2	1	11
2	Utilizou cálculos numéricos	56	56	51	56	45	46	310
3	Utilizou desenhos e cálculos numéricos	1	0	0	1	4	1	7
4	Procedimento de solução não mostrado	5	5	11	6	13	16	56
		64	64	64	64	64	64	384

Fonte: Dados da Pesquisa

Com relação aos procedimentos utilizados pelos estudantes evidenciados durante a solução de problemas, foi observado que os estudantes em sua maioria solucionaram os problemas utilizando predominantemente os cálculos aritméticos. Um fato que chamou a atenção nesta pesquisa foi que nos problemas que envolviam estruturas mais complexas aumentou a quantidade de estudantes que não demonstraram o procedimento utilizado para a solução.

Neste sentido, Selva, Falcão e Nunes (2005); Moro e Soares (2006) e Koch e Soares (2005) assinalaram a importância de se trabalhar e incentivar os estudantes a utilizarem diversas formas para solucionar o problema. Destacando nesta, a importância de atrelar o procedimento do cálculo numérico ao ensino da solução de problemas (PALANCH, 2012).

Os resultados do teste de matemático indicaram que há um ganho na nota na medida que se progride na escolarização, ou seja, observa-se uma efetiva contribuição da escola no que diz respeito ao desempenho dos estudantes, sendo que foi encontrada diferença estatisticamente significativa entre o 3º e 5º ano de escolaridade.

Foi constatada diferença estatisticamente significativa entre o desempenho dos estudantes no problema 3 (p=0,031) e no problema 6 (p=0,000). No problema 3 a diferença foi de 40% entre o 3º e 5º ano e no problema 6 foi de 60%. Considerando que apenas nestes dois problemas foi registrado essa diferença estatisticamente significativa. Destaca-se que os estudantes obtiveram a melhor taxa de acerto no problema 3 (67,2%) quando comparada ao problema 6 (59,4%).

O terceiro problema (P3) pertencia à categoria de comparação. Magina e Campos (2004) e Nunes e Bryant (1997) apontaram que nesta categoria os índices de acerto

costumam ser inferior aos índices de acertos das situações protótipos, por exemplo, o P1 e P2, visto que exige da criança operações de pensamentos mais elaborados.

A este respeito Nunes et al (2009) destacou que os estudantes têm dificuldade para quantificar a comparação, isto é, parte dos estudantes associam as ideias de adição e subtração com mudanças nas quantidades. No entanto, nos problemas comparativos não há mudança de quantidade e também não comportam a relação parte-todo, como assinalou Vergnaud (1979). Podemos concluir que os autores apresentaram uma série de fatores que podem influenciar na solução de problemas desta categoria.

O problema 6 era um problema da categoria composição de *relações estáticas*, que em consonância com os resultados apresentados por Santana et al (2009) foi a categoria que apresentou maior dificuldade de solução para os estudantes, em especial, os matriculados no 3º e 4º anos de escolaridade.

Entre os principais resultados, podem ser destacados que no primeiro problema proposto, que era do tipo protótipo, os estudantes do quinto ano não conseguiram 100%, sendo superados pelos estudantes do terceiro ano que conseguiram apresentar a taxa de acerto de 100%.

Em contrapartida, os problemas nos quais a taxa de acerto foi pequena, a análise de protocolo mostrou que dentre outras, uma das razões era a falta de compreensão do problema ocasionando uma concentração de erros ligados ao cálculo relacional.

A categoria *composição de relações estáticas* foi a que apresentou os maiores índices de erros, entre os estudantes dos terceiro e quarto anos de escolaridade. Ressaltando que esses erros em sua maior parte estavam ligados ao cálculo relacional.

Foi encontrada, relação, nesta amostra, entre o desempenho no instrumento matemático e a autopercepção de dificuldade nas cinco etapas da solução de problemas, ou seja, o desempenho cai de acordo com o número de etapas com autopercepção de dificuldade. O teste Tukey sinaliza que apenas o desempenho dos estudantes que indicaram ter dificuldade em duas ou mais etapa distanciam-se significativamente dos outros.

Buscando responder ao objetivo proposto, a saber: *Identificar dentre as etapas da solução de problemas, propostas por Polya em quais delas os estudantes apresentam maior dificuldade*, atrelamos a análise dos protocolos à pontuação seguindo os critérios estabelecidos por Charles (LIMA, 2001), e dessa forma, elaboramos a seguinte tabela.

Tabela 41 - Dificuldades apresentadas pelos estudantes durante a solução de problemas

	Etapas propostas por Polya (2006)	P1	P2	P3	P4	P5	P6	TOTAL
1	Compreensão do Problema	3	5	16	8	12	25	69
2	Estabelecimento de um Plano	0	0	2	0	0	0	2
3	Execução de um Plano	0	4	3	12	4	1	24
4	Retrospecto	19	15	16	13	15	10	88
		22	24	37	33	31	36	183

Fonte: Dados da Pesquisa

A etapa em que os estudantes apresentaram maior dificuldade foi o *Retrospecto*. De um modo geral a falha dos estudantes centrou-se na falta de uma resposta ao problema proposto. Ou seja, após a execução do cálculo exigido os estudantes em sua maioria não apresentavam uma resposta do tipo: “R:” ou “ Ele tem agora x tampinhas”, ou mesmo “ Tem ao todo x tampinhas.

Polya (2006) e Sternberg (2008) destacaram a importância do *Retrospecto* durante o processo de solução de problemas, ressaltando que, frequentemente, é por meio do processo de avaliação, do reexame da solução que ocorrem importantes progressos. Além de que o hábito de examinar a solução, oferece a oportunidade de se inteirar do método que o levou à resolução, para caracterizá-lo e posteriormente utilizá-lo em outros problemas.

A este respeito Polya (2006, p.31) destacou a vantagem de proceder com a etapa do retrospecto, desta forma:

> “[...] *De qualquer maneira, se adquirir o hábito de verificar e examinar desse modo as suas resoluções, obterá alguns conhecimentos bem ordenados e prontos a serem utilizados e assim desenvolverá a sua capacidade de resolver problemas.”*

A segunda maior dificuldade encontrada pelos estudantes durante a solução de problemas foi a *Compreensão do problema*, os dados indicam que nos problemas tido como protótipos os estudantes em sua maioria não apresentaram dificuldade nesta etapa. Em contrapartida, nos problemas com um grau de complexidade maior foi possível observar o aumento da quantidade de crianças com dificuldade nesta etapa.

Ante o exposto, concluímos que esses dados corroboram os encontrados por Santana et al (2009), considerando que as autoras apontam que o ensino da solução de problemas fica condicionado ao trabalho com as situações protótipos, restringindo os

estudantes a variedades de situações que a rigor devem ser trabalhadas desde as séries iniciais.

Outro ponto que se evidenciou é o impacto na leitura na solução de problemas matemáticos, quer dizer, até que ponto podemos afirmar que as dificuldades estavam centradas, de fato, nos cálculos relacionais ou eram decorrentes da falta de compreensão do texto gerado pela dificuldade na leitura.

Ressalta-se ainda, que a dificuldade apresentada na etapa da *Compreensão do problema* também está ligada ao cálculo relacional, que por sua vez assinala que os estudantes tem dificuldade para decidir qual é a operação correta para a solução de determinado problema. Ademais, foi possível verificar a existência de erros sérios no armar e efetuar as operações, conotando falta de entendimento e conhecimento do Sistema de Numeração Decimal.

A julgar pelos resultados dos estudos que compuseram a revisão de literatura e considerando os resultados encontrados nesta pesquisa podemos conjecturar que essa realidade poderia se estender para diversas escolas. No entanto, para validar ou não essa hipótese, faz-se necessário um estudo mais abrangente.

REFERÊNCIAS

ÁLVARO, J.L.; GARRIDO, A. *Psicologia Social: Perspectivas psicológicas e sociológicas*. Tradução: Miguel Cabrera Fernandes. Porto Alegre: ArtMed, 2017. 413p.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática.* Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular.* Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. *Matrizes Curriculares de Referência para o SAEB: associação dos conteúdos as competências cognitivas e habilidades instrumentais que lhes são próprias, expressa em forma de descritores do desempenho do aluno.* Brasília: Instituto Nacional Anísio Teixeira, 1999.

BRITO, M.R.F. *O "Pensar em voz alta" como uma técnica de pesquisa em psicologia da educação matemática.* In: I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática, 2002, Curitiba. **Anais**... Curitiba: UTP, 2002. p.15-35.

BRITO, M.R.F. (Org.). *Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos*. Campinas, SP: Alínea, 2006. 280p.

CARRAHER, T.N.; CARRAHER, D.W.; SCHLIEMANN, A.L.D. *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo, SP: Cortez, 2006. 182p.

CHI, M.; GLASER, R. A capacidade para a solução de problemas. *In*: Sternberg (Org.). *As capacidades intelectuais humanas: uma abordagem em processamento de informações*. Tradução: Dayse Batista. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992. 275p.

COMÉRIO, M.S. *Relações entre a compreensão em leitura e a solução de problemas aritméticos*. 2012. 283 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 2012

DAVIDSON, J.; STERNBERG, R. *The Psychology of problem solving.* New York: Cambridge University Press, 2003. 383p.

DINIZ, M.I. Os problemas convencionais nos livros didáticos. *In*: SMOLE, K. S. e DINIZ, M.I. (orgs.) *Ler, Escrever e Resolver Problemas: Habilidades Básicas para Aprender Matemática*. Porto Alegre: Artmed, 2001. 203p.

ECHEVERRÍA, M. D. P. P. A solução de problemas em matemática. *In*: POZO, J.I. (Org.). *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.* Tradução: Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 43-65.

ECHEVERRÍA, M. D. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. *In*: POZO, J.I. (Org.). *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.* Tradução: Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artmed, 1998. p.13-42.

ETCHEVERRIA, T.C.; CAMPOS, T.M.M; SILVA, A.F.G. *Campo Conceitual Aditivo: um estudo com professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental*. *BOLEMA*, Rio Claro, v.29, n.53, p.1181-1200, dez.2015. Disponível em: <http//WWW.scielo.br/>. Acesso em: 06 de fev. de 2017.

EYSENCK, M.W.; KEANE, M. *Manual de Psicologia Cognitiva*. Porto Alegre, RS: Artmed, 2007. 608p.

GAGATSIS, A.; ELIA, I. *The effects of different modes of representation on mathematical problem solving.* In: 28 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004, Noruega. **Anais**... Noruega, 2004. p.447-454. Disponível em: <http//www.eric.ed.gov./>. Acesso em: 10 de jan. de 2018.

GAGNE, R.M. *Como se realiza a aprendizagem*. Brasília, DF: Livros Técnicos e Científicos: INL, 1974. 270p.

FINI, L.D.T. Aritmética no ensino fundamental. In: SISTO, F.F. e OUTROS. Dificuldades de Aprendizagem no contexto psicopedagógico. Petrópolis: Vozes, 2001.

JUSTO, J.C.R.; DORNELES, B.V. *Resolução de problemas matemáticos aditivos: possibilidades da ação docente*. *ACTA SCIENTIAE*, Canoas, v.12, n.2, p.106-124, jul/dez. 2010. Disponível em: <http//www.periodicos.ulbra.br/>. Acesso em: 06 de fev. de 2017.

KOCH. N.T.O.; SOARES, M.T.C. O professor, seus alunos e a resolução de problemas de estrutura aditiva. *In*: MORO, M.L.F.; SOARES, M.T.C. (orgs.) *Desenhos, palavras e números: as marcas da matemática na escola*. Curitiba: Ed. Da UFPR, 2005. 186p.

KRUTETSKII, V.A. *The psychology of mathematical abilities in scholchildren.* Chicago: University of Chicago Press, 1976, 417p.

LIMA, V.S. *Solução de Problemas: Habilidades Matemáticas, Flexibilidade de Pensamento e Criatividade*. 2001. 207f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 2001.

LOPES, S.V.A. *A construção dialética da adição e subtração e a resolução de problemas aditivos*. 2002. 189f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 2002.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. *As estratégias dos alunos na resolução de problemas aditivos: um estudo diagnóstico*. *EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E PESQUISA*, São Paulo, v.6, n.1, p.53-71. 2004. Disponível em: <http//www.scielo.br/>. Acesso em: 06 de fev. de 2017.

MAGINA, S.M.P. *Repensando adição e subtração: contribuições da teoria dos campos conceituais*. 3.ed. São Paulo, SP: PROEM, 2008. 64p.

MAYER, R.E. A capacidade para a matemática. *In*: STERNBERG, R. *As capacidades intelectuais humanas: uma abordagem em processamento de informações.* Tradução: Dayse Batista. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992. p.144-168.

MENDONÇA, T.M.; PINTO, S.M.; CAZORLA, I.M.; RIBEIRO, E. *As estruturas aditivas nas séries iniciais do ensino fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes*. *REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EM MATEMÁTICA EDUCATIVA*, v.10, n.2, p.219-239. 2007. Disponível em: <http//www.scielo.br/>. Acesso em: 06 de fev. de 2017.

MELLO, T.A. *Estratégias de Pensamento, atitudes em relação à matemática e desempenho na Prova Brasil*. 2015. 331f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 2015.

MENEZES, E.T.; SANTOS, T. H. *Verbete progressão continuada. Dicionário Interativo da Educação Brasileira* - Educabrasil. São Paulo: Midiamix, 2001. Disponível em: <http://www.educabrasil.com.br/progressao-continuada/>. Acesso em: 03 de out. 2018.

MOREIRA, M.A. *La Teoria de los campos conceptuales y La enseñanza/aprendizaje de las ciências*. Burgos, Espanha: Universidad de Burgos, 2009. 97p.

MORETTI, M.T., BRANDT, C.F. *Dificuldades na resolução de problemas aditivos a uma operação: ponto de encontro esclarecedor à luz da noção de congruência semântica*. *ACTA SCIENTIAE*. Canoas. v.16 n.3, p.553-577 set./dez. 2014. Disponível em: <http//www.periodicos.ulbra.br/>. Acesso em: 06 de fev. de 2017.

MORO, M.L.F.; SOARES, M.T.C. A aprendizagem de Estruturas Aditivas Elementares: Alunos, Professores e Pesquisadores. *In*: BRITO, M.R.F. (org.) *Solução de Problemas e a matemática escolar*. Campinas, SP: Alínea, 2006. 280p.

NEUMANN, V.G. *Um estudo exploratório sobre as relações entre o conceito de automatismo da teoria do processamento de informações de Sternberg e o conceito de pensamento resumido na teoria das habilidades matemáticas de Krutetskii*. 1995. 212f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 1995.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Crianças fazendo matemática.* Tradução: Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997. 244p.

NUNES, T.; CAMPOS, T.M.M.; MAGINA, S.; BRYANT, P. *Educação Matemática: números e operações numéricas.* São Paulo: Cortez, 2009. 206p.

PALANCH, W.B.L. *Sondagem das Ideias do Campo Aditivo: Resolução de Problemas ou Aplicabilidade de Algoritmos*. *EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA*, n.35, mar., p.5-15. 2012. Disponível em: <http//www.sbem.com.br/>. Acesso em: 06 de fev. de 2017.

PIROLA, N. A. S*olução de Problemas Geométricos: Dificuldades e Perspectivas. Campinas*. 2000. 331f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 2000.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.* Tradução: Heitor Lisboa de Araújo*.* Rio de Janeiro: Interciência, 2006. 203p.

PRETZ, J.; NAPLES, A.. Recognizing, Defining, and Representing Problems. *In*. DAVIDSON, J.; STERNBERG, R. *The Psychology of problem solving.* New York: Cambridge University Press, 2003. 394p.

PUIG, L.; CERDÁN, F. *Problemas aritméticos escolares*. Madri: Sintesis, 1995. 222p.

SANTANA, E.R.S. *Estruturas Aditivas: um suporte didático influência a aprendizagem do estudante?*. 2010. 338f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2010.

SANTANA, E.R.S.; CAZORLA, I.M.; CAMPOS, T.M.M. *Desempenho de Estudantes em Diferentes Situações no Campo Conceitual das Estruturas Aditivas*. *ESTUDOS EM AVALIAÇÃO EDUCACIONAL*, v.18, n.38, set/dez, p.137-152. 2007. Disponível em: <http//www.scielo.br/>. Acesso em: 06 de fev. de 2017.

SANTANA, E.R.S.; CAZORLA, I.M.; OLIVEIRA, A.M. *Uma análise do domínio das estruturas aditivas com estudantes da 5ª série do ensino fundamental*. *EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA*, v.2, n.10, p.29-39. 2009. Disponível em: <http//www.scielo.br/>. Acesso em: 06 de fev. de 2017.

SANTANA, E.; ALVES, A.A.; NUNES, C.B. *A teoria dos campos conceituais num processo de formação continuada de professores. BOLEMA*, Rio Claro, v.29, n.53, p.1162-1180. 2015. Disponível em: <http//www.scielo.br/>. Acesso em: 06 de fev. de 2017.

SELVA, A.C.V.; FALCÃO, J.T.R.; NUNES, T. *Solving additive problems at pre-elementary school level with the support of graphical representation.* In: 29 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2005. **Anais**... Melbourne: PME, 2005. p.161-168. Disponível em: <http//www.eric.ed.gov./>. Acesso em: 10 de jan. de 2018.

STERNBERG, R. *As capacidades intelectuais humanas: uma abordagem em processamento de informações.* Tradução: Dayse Batista*.* Porto Alegre, RS: Artes Médicas, 1992. 275p.

STERNBERG, R.; GRIGORENKO, E.L. *Inteligência Plena: ensinando e incentivando a aprendizagem e a realização dos alunos*. Tradução: Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artmed, 2003. 134p.

STERNBERG, R. *Psicologia Cognitiva*. 4. ed. Porto Alegre, RS: Artmed, 2008. 582p.

TAXA, F. de O.S. A *Problemas multiplicativos e processo de abstração em crianças na 3ª série do ensino fundamental*. 2001. 237f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 2001.

VENDRAMINI, C.M.M. Estatística e delineamentos de pesquisa. *In*. BAPTISTA, M. N.; CAMPOS, D. C. (Orgs). *Metodologias de Pesquisa em Ciências: análise quantitativa e qualitativa.* Rio de Janeiro: LTC, 2007. 299p.

VERGNAUD, G*. The acquisition of arithmetical concepts*. *EDUCATIONAL STUDIES IN MATHEMATICS*, v.10, n.2, p.263-274. 1979.

_____. *Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas*. *ANÁLISE PEDAGÓGICA*. v 1, p.75-90. 1986.

_____. *A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education*. *JOURNAL OF MATHEMATICAL BEHAVIOR*. 17 (2), 167-181.1998.

_____ Introdução. *In*: MOREIRA, M.A. *La Teoria de los campos conceptuales y La enseñanza/aprendizaje de las ciências*. Burgos, Espanha: Universidad de Burgos, 2009. 97p.

. _____. *O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática*. *EDUCAR EM REVISTA,* Curitiba, n.Especial, jan. p. 15-27. 2011.

_____ *A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar*. Tradução Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Ed. Da UFPR, 2014. 322p.

VYGOTSKY, L.S. *A construção do pensamento e da linguagem*. Tradução: Paulo Cesar Bezerra. São Paulo, SP: Martins Fontes, 2009. 496p.

WESTBROOK, R.B. *John Dewey***.** Tradução e Organização de Verone Lane Rodrigues, José Eustáquio Romão. Recife, PE: Fundação Joaquim Nabuco: Massangana, 2010. 136 p., il. (Educadores).

ANEXO I - Questionário Informativo

UNICAMP

QUESTIONÁRIO INFORMATIVO

Prezado estudante!

Este questionário faz parte de um estudo relacionado às dificuldades dos estudantes nas etapas de solução de problemas de estrutura aditiva e pretende apresentar algumas contribuições que permitam uma melhor compreensão das razões das dificuldades dos estudantes durante o processo de solução de problemas.

Procure responder a esta pesquisa de forma individual, conscienciosa e independente. A veracidade das suas respostas é fundamental.

Em cada questão, marque apenas uma resposta, ou seja, aquela que melhor corresponda às suas características pessoais e às situações vivenciadas por você. Os dados serão tratados estatisticamente, de modo a garantir absoluto sigilo a respeito das informações individuais prestadas.

Nome: _____ (opcional)

1. Gênero: 1. Masculino 2**.** Feminino.

2. Data de Nascimento: _____/_____/_____ **3.** Idade: _____

4. Série: _____ ano.

5. Você já repetiu alguma série? ( ) sim 2. ( ) não

Atenção: Se você respondeu **Sim** na questão acima, isto é, você já repetiu alguma série, diga qual foi _____.

6. Em casa, você recebe ajuda quando estuda Matemática ou quando faz suas tarefas de Matemática?

1. ( ) Sim 2. ( ) Não

Em caso afirmativo, diga quem o (a) ajuda nas tarefas de Matemática:

_____

7. Se alguém perguntasse para você "*quando você estuda Matemática?*", qual das respostas abaixo você daria? Escolha apenas uma delas.

1. ( ) Sempre estudo Matemática
2. ( ) Estudo Matemática só na véspera da prova
3. ( ) Estudo Matemática só no final do ano
4. ( ) Nunca estudo Matemática

8 - **Com relação aos problemas de matemática dados em sala de aula:**
1 - ( ) Sempre entendo os problemas dados em aula
2 - ( ) Quase sempre entendo os problemas dados em aula
3 - ( ) Quase nunca entendo os problemas dados em aula
4 - ( ) Nunca entendo os problemas dados em aula

9 - **Quando você resolve um problema dado em sala de aula:**
1 - ( ) Sempre utilizo desenhos para solucionar os problemas
2 - ( ) Na maioria das vezes utilizo desenhos para solucionar os problemas
3 - ( ) Poucas vezes utilizo desenhos para solucionar os problemas
4 - ( ) Nunca utilizo desenhos para solucionar os problemas

10 – Durante a solução de um problema dado em sala de aula em quais das etapas você encontra mais dificuldades?
1 - ( ) Na leitura do problema
2 - ( ) Na construção de uma estratégia para solucionar o problema
3 - ( ) Na organização das informações do problema
4 - ( ) Na execução dos cálculos para a solução
5- ( ) Na avaliação da solução

ANEXO II - Teste de Matemática

UNICAMP

TESTE DE MATEMÁTICA I

Prezado estudante!

Este teste faz parte de um estudo relacionado às dificuldades dos estudantes nas etapas de solução de problemas de estrutura aditiva e pretende apresentar algumas contribuições que permitam uma melhor compreensão das razões das dificuldades dos estudantes durante o processo de solução de problemas.

Procure responder a este teste de forma individual, conscienciosa e independente. A veracidade das suas respostas é fundamental.

1- A coleção de Marcelo tem 6 tampinhas azuis e 8 tampinhas verdes. Quantas tampinhas ele tem ao todo?

2- Gabriel tinha 9 cartinhas antes de jogar. Ganhou 4 cartinhas. Quantas cartinhas ele tem agora?

3- Maria tem 8 bonecas. Laura tem 5 a menos que Maria. Quantas bonecas Laura tem?

4- Bruno jogou duas partidas de bolinha de gude. Na primeira partida ele ganhou 16 bolinhas. Na segunda partida perdeu 9. Ao final, o que aconteceu?

5- Rian devia 8 cartinhas para Henrique. Ele devolveu 6. Quantas cartinhas ele ainda deve para Henrique?

6- Isabeli deve 8 figurinhas a Giovana, mas Giovana lhe deve 5. Então qual é a quantidade de figurinhas que Isabeli deve a Giovana?

ANEXO III - Termo de Consentimento livre e esclarecido para responsável legal por menor de 18 anos

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA RESPONSÁVEL LEGAL POR MENOR DE 18 ANOS

Um estudo sobre as dificuldades nas etapas de solução de problemas de estrutura aditiva
Eliana Cristina de Carvalho Gabriel; Profa. Dra. Marcia Regina Ferreira Brito (orientadora)
Número do CAAE: 73265517.7.0000.5404

Considerando a sua condição de responsável legal pelo(a) menor, apresentamos este convite e solicitamos o seu consentimento para que ele(a) participe da pesquisa intitulada "**Um estudo sobre as dificuldades nas etapas de solução de problemas de estrutura aditiva** ", sob a responsabilidade dos pesquisadores **Eliana Cristina de Carvalho Gabriel e Marcia Regina Ferreira Brito**. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar os direitos do menor como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com o pesquisador. Por favor, leia com atenção e calma. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar que o menor participe ou retirar sua autorização em qualquer momento. Nesta pesquisa nós estamos buscando identificar e compreender as dificuldades dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental na solução de problemas matemáticos de estruturas aditivas.

O Termo de Consentimento Livre e Esclarecido será obtido pela pesquisadora Eliana Cristina de Carvalho Gabriel, antes da coleta dos dados na instituição co-participante da pesquisa. Você terá um tempo para decidir se concorda com a participação do menor. Participando do estudo o menor está sendo convidado a preencher um termo de assentimento e um questionário informativo. O menor também precisará responder a dois testes de matemática com seis questões cada um; considerando que durante a aplicação do segundo teste a pesquisadora responsável pela coleta de dados realizará a filmagem. O tempo previsto para responder esses três instrumentos é de 2 horas e 40 minutos no total. Este tempo será dividido em dois dias considerando que por se tratar de uma escola de período integral os instrumentos serão aplicados no momento das oficinas com atividades extracurriculares que tem duração de 1 hora e 20 minutos. A participação é voluntária. Você e o participante não terão nenhum custo, gastos ou benefício ao participar da pesquisa. Será esclarecido (a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para autorizar ou recusar-se a autorizar. Os pesquisadores envolvidos na pesquisa irão tratar de forma sigilosa todos os dados da pesquisa e os participantes não serão identificados. Os resultados da pesquisa estarão à sua disposição quando finalizada por meio da publicação final da dissertação de mestrado. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável, por um período de 5 (cinco) anos, e após esse tempo serão destruídos. Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias originais, sendo que uma será arquivada pelo pesquisador responsável, junto ao laboratório do grupo de pesquisa de Psicologia da Educação Matemática (PSIEM) na Faculdade de Educação da Unicamp e a outra será fornecida a você.

A pesquisa poderá servir de base a outros estudos cujo objetivo é identificar e compreender as dificuldades dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental na solução de problemas matemáticos de estruturas aditivas. Deve ficar claro que estes benefícios não irá atingir o participante de forma direta, ou seja, a participação na pesquisa não será recompensada diretamente. O participante não irá receber nota ou qualquer outro tipo de benefício por participar da pesquisa. Também não haverá ressarcimento de eventuais custos que poderá ter com a pesquisa. Caso o participante venha a sofrer qualquer tipo de dano decorrente da pesquisa, presente ou não no TCLE, terá direito a indenização por parte do pesquisador, patrocinador ou instituições envolvidas. Esse estudo não apresenta riscos previsíveis, entretanto, a pesquisadora estará presente no momento da aplicação dos instrumentos e o participante poderá informar a ela, a qualquer momento, sobre algum desconforto, podendo deixar de participar da pesquisa se achar necessário. O participante terá a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma

informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo seu nome não será citado.

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com a pesquisadora Eliana Cristina de Carvalho Gabriel no endereço: Bertrand Russell, 801; bairro: Cidade Universitária Zeferino Vaz; Cep: 13083-865 / Campinas – SP; Fone: (19) 3788-5592; e- mail: elianaederson2013@gmail.com. Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UNICAMP das 08:30hs às 11:30hs e das 13:00hs as 17:00hs na Rua: Tessália Vieira de Camargo, 126; CEP 13083-887 Campinas – SP; telefone (19) 3521-8936 ou (19) 3521-7187; e-mail: cep@fcm.unicamp.br.

O Comitê de Ética em Pesquisa (CEP).

O papel do CEP é avaliar e acompanhar os aspectos éticos de todas as pesquisas envolvendo seres humanos. A Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), tem por objetivo desenvolver a regulamentação sobre proteção dos seres humanos envolvidos nas pesquisas. Desempenha um papel coordenador da rede de Comitês de Ética em Pesquisa (CEPs) das instituições, além de assumir a função de órgão consultor na área de ética em pesquisas

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, autorizo o menor participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do (a) participante: _____

Contato telefônico: _____

e-mail (opcional): _____

Data: ____/_____/_____.

_____

(Assinatura do RESPONSÁVEL LEGAL pelo participante da pesquisa)

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 466/2012 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado e pela CONEP, quando pertinente. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

_____ Data: ____/_____/_____.

(Assinatura do pesquisador)

ANEXO IV - Termo de Assentimento para menores de 18 anos

TERMO DE ASSENTIMENTO PARA MENOR DE 18 ANOS

Um estudo sobre as dificuldades nas etapas de solução de problemas de estrutura aditiva
Eliana Cristina de Carvalho Gabriel; Profa. Dra. Marcia Regina Ferreira Brito (orientadora)
Número do CAAE: CAAE 73265517.7.0000.5404

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Assentimento, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com o pesquisador. O termo de assentimento será obtido pela pesquisadora Eliana Cristina de Carvalho Gabriel, antes da coleta dos dados na instituição co-participante da pesquisa. Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. O responsável por você poderá retirar o consentimento ou interromper sua participação a qualquer momento, não havendo nenhum tipo de penalização ou prejuízo.

Esse estudo tem como objetivo identificar e compreender as dificuldades dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental na solução de problemas matemáticos de estruturas aditivas. Participando do estudo você está sendo convidado a responder um questionário informativo. O menor também precisará responder dois testes de matemática com seis questões cada um; considerando que durante a aplicação do segundo teste a pesquisadora responsável pela coleta de dados realizará a filmagem. O tempo previsto para responder esses três instrumentos é de 2 horas e 40 minutos no total. Este tempo será dividido em dois dias considerando que por se tratar de uma escola de período integral os instrumentos serão aplicados no momento das oficinas com atividades extracurriculares que tem duração de 1 hora e 20 minutos. A sua participação é voluntária. Você não terá nenhum custo ou benefício ao participar da pesquisa. Você será esclarecido (a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se a participar, mesmo se seu responsável autorizou sua participação. Até o momento da divulgação dos resultados, você também é livre para solicitar a retirada dos seus dados, devendo o pesquisador responsável devolver-lhe o Termo de Assentimento assinado por você. A sua recusa em participar não acarretará qualquer penalidade. Os pesquisadores envolvidos na pesquisa irão tratar de forma sigilosa todos os dados da pesquisa e você não será identificado. Os resultados da pesquisa estarão à sua disposição quando finalizada por meio da publicação final da dissertação de mestrado. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável, por um período de 5 (cinco) anos, e após esse tempo serão destruídos. Este termo de assentimento encontra-se impresso em duas vias originais, sendo que uma será arquivada pelo pesquisador responsável, junto ao laboratório do grupo de pesquisa de Psicologia da Educação Matemática (PSIEM) na Faculdade de Educação da Unicamp e a outra será fornecida a você.

A pesquisa poderá servir de base a outros estudos cujo objetivo é identificar e compreender as dificuldades dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental na solução de problemas matemáticos de estruturas aditivas. Deve ficar claro que estes benefícios não atingirão você de forma direta, ou seja, a sua participação na pesquisa não será recompensada diretamente. Você não irá receber nota ou qualquer outro tipo de benefício por participar da pesquisa. Também não haverá ressarcimento de eventuais custos que você poderá ter com a pesquisa. Caso você venha a sofrer qualquer tipo de dano decorrente da pesquisa, presente ou não no TCLE, terá direito a indenização por parte do pesquisador, patrocinador ou instituições envolvidas. Esse estudo não apresenta riscos previsíveis, entretanto, a pesquisadora estará presente no momento da aplicação dos instrumentos e você poderá informar a ela, a qualquer momento, sobre algum desconforto, podendo deixar de participar da pesquisa se achar necessário.

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo seu nome não será citado. Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em

contato com a pesquisadora Eliana Cristina de Carvalho Gabriel no endereço: Bertrand Russell, 801; bairro: Cidade Universitária Zeferino Vaz; Cep: 13083-865 / Campinas – SP; Fone: (19) 3788-5592; e- mail: elianaederson2013@gmail.com . Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UNICAMP das 08:30hs às 11:30hs e das 13:00hs as 17:00hs na Rua: Tessália Vieira de Camargo, 126; CEP 13083-887 Campinas – SP; telefone (19) 3521-8936 ou (19) 3521-7187; e-mail: cep@fcm.unicamp.br.

O Comitê de Ética em Pesquisa (CEP).

O papel do CEP é avaliar e acompanhar os aspectos éticos de todas as pesquisas envolvendo seres humanos. A Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), tem por objetivo desenvolver a regulamentação sobre proteção dos seres humanos envolvidos nas pesquisas. Desempenha um papel coordenador da rede de Comitês de Ética em Pesquisa (CEPs) das instituições, além de assumir a função de órgão consultor na área de ética em pesquisas.

Eu,_____ portador(a) do documento de Identidade _____, fui informado (a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações, e o meu responsável poderá modificar a decisão de participar se assim o desejar. Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar desse estudo. Declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas.

_____ _____

Assinatura do participante Assinatura da pesquisadora

Data: _____ de _____ de _____.