UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

UNICAMP

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UM ESTUDO EXPLORATÓRIO SOBRE OS COMPONENTES DAS HABILIDADES MATEMÁTICAS PRESENTES NO PENSAMENTO EM GEOMETRIA

VIVIANE REZI

ORIENTADORA: PROFª DRª MÁRCIA REGINA FERREIRA DE BRITO

2001

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

UNICAMP

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UM ESTUDO EXPLORATÓRIO SOBRE OS COMPONENTES DAS HABILIDADES MATEMÁTICAS PRESENTES NO PENSAMENTO EM GEOMETRIA

VIVIANE REZI

ORIENTADORA: PROFª DRª MÁRCIA REGINA FERREIRA DE BRITO

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação de Mestrado defendida por Viviane Rezi e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: 20 / 02 / 2001

Assinatura: Márcia Regina F. de Brito
(orientadora)

Comissão Julgadora:

Márcia Regina F. de Brito

2001

CATALOGAÇÃO NA FONTE ELABORADA PELA BIBLIOTECA DA FACULDADE DE EDUCAÇÃO/UNICAMP

R339e

Rezi, Viviane.
Um estudo exploratório sobre os componentes das habilidades matemáticas presentes no pensamento em Geometria / Viviane Rezi. -- Campinas, SP : [s.n.], 2001.

Orientador : Marcia Regina Ferreira de Brito.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Hiele, Pierre M. van. 2. Geometria. 3. Educação Matemática.*4.* Habilidades matemáticas. I. Brito, Marcia Regina Ferreira de . II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

*4. Capacidade matemática.

RESUMO

O presente estudo teve por objetivo contribuir para o desenvolvimento da compreensão sobre alguns componentes da habilidade matemática intrínsecos às atividades que envolviam conceitos geométricos, através da abordagem de solução de problemas, procurando investigar quais as relações existentes entre o nível de desenvolvimento do pensamento em geometria, e componentes das habilidades matemáticas, como a percepção geométrica e a habilidade para conceitos espaciais. Para isso, foram sujeitos da pesquisa 201 alunos concluintes do ensino médio de duas escolas, uma pública e outra particular, submetidos a cinco instrumentos do tipo lápis e papel, durante o período de aula. Foi identificada uma relação linear significativa entre esses constructos, sendo que quanto maior o nível de desenvolvimento em Geometria do sujeito, melhor era o seu desempenho em provas que avaliavam a percepção geométrica, as habilidades para trabalhar com conceitos espaciais e o raciocínio espacial. Os dados foram analisados também através de análise fatorial, sendo que as provas se agruparam em três fatores de avaliação: problemas com enunciado verbal, problemas que requerem processamento visual e problemas que requerem representação e manipulação mental de objetos.

ABSTRACT

The main objective of this investigation was to isolate some mathematics abilities components that appear in activities involving geometric concepts, during problems solving situation. The relations between geometric thinking development level and mathematics abilities components, as the geometric perception and the presence of spatial concepts, were investigated. Subjects were 201 High school students from private and public schools. Instruments were five test and students were submitted to their at class period. A significance linear relationship between these constructs was identified, being that the higher the development level in Geometry presented by the subject, the better was his/her performance on the exams evaluating geometric perception, and also the presence of spatial concepts and spatial reasoning. Data analysis underwent a factorial analysis approach, where exams were gathered upon three evaluation criteria: word problems, visual processing and mental representation.

Aos meus pais, Hermínia e Hélio, por tudo o que sou. E àquelas que deixaram saudades, minhas avós Adelina e Albina, e minha tia Natalina.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por estar sempre ao meu lado.

Aos meus pais, que sempre se dedicaram para que todos os aspectos de minha vida fossem os mais felizes, os mais corretos, se preocupando integralmente com o meu futuro e bem estar.

Agradeço à minha orientadora e amiga Profª Drª Márcia Regina Ferreira de Brito por acreditar em meu potencial e me ajudar durante a execução e redação do trabalho.

Ao Angelo, por sua compreensão nas horas em que não pude estar presente.

Aos meus amigos do passado e do presente, especialmente às amigas Érica, Carla, Silzia e Valéria que me acompanharam nesses últimos anos, aconselhando-me e apoiando todas as minhas decisões.

Aos colegas do PSIEM pelas sugestões oferecidas ao trabalho e pelo companheirismo nas disciplinas cursadas, principalmente aos colegas Érica Valéria Alves, Alícia Munhoz, Valéria Scomparim de Lima, Liliane Neves, Maria Helena Sanchez, Maria Helena Gonçalez, Nelson Pirola e Helga Loos.

Ao Prof. Dr. Zalman Usiskin – University of Chicago/EUA, pela autorização sobre o uso de um dos instrumentos da pesquisa.

Ao Prof. Dr. Ricardo Primi – Universidade São Francisco/Itatiba pela autorização e orientações sobre a aplicação de um dos instrumentos.

À Profª Drª Claudette Vendramini, pela orientação nos cálculos estatísticos.

Aos professores que compuseram minha banca de qualificação, Profª Drª Lucila Fini e Profª Drª Clayde Regina Mendes pelas importantes sugestões acerca do trabalho.

À Profª Drª Anita Liberalesso Neri por suas importantes colaborações durante a execução de sua disciplina, "Metodologia da Pesquisa".

Aos alunos que foram sujeitos da pesquisa e que dispuseram de seu tempo e empenho para que esse trabalho fosse possível.

Aos diretores, coordenadores e funcionários das escolas participantes da pesquisa pela compreensão e colaboração.

Aos meus pais pela ajuda na computação dos dados.

À agência FAPESP pelo apoio financeiro.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

APRESENTAÇÃO

A Psicologia ao longo dos tempos foi tomando forma como corpo teórico devido a várias revoluções entre ciência normal e ciência revolucionária (Kuhn, 1970, 1977, citado por Eysenk and Keane, 1994). Dessas crises intelectuais, a Psicologia foi constituindo-se através de várias vertentes, em que cada uma tentou construir o seu objeto fundamentado no acúmulo de observações e de idéias, o que gerou uma concepção diferente de cada objeto, sendo que a intenção de todas elas era fazer da Psicologia uma ciência natural e independente de outras áreas científicas, discussão essa presente em toda a área de ciências humanas. O Behaviorismo surgiu da tentativa de se fazer ciência com base nos pressupostos naturalistas.

Todavia, o interesse em atividades não observáveis como o raciocínio, o pensamento e a solução de problemas incitou o surgimento de um novo campo, o da Psicologia Cognitiva, "um terreno em que se poderiam ver funcionar esses complexos processos intelectuais de execução e aprendizagem de tarefas específicas, assim como se apresentavam na escola" (Resnick e Ford, 1990, p. 18). Além da solução de problemas e da compreensão do pensamento, a Psicologia Cognitiva também tem, como áreas de interesse, a linguagem, a memória, a formação de conceitos e a percepção, que foram considerados por Krutetskii (1976) como componentes[1] da habilidade matemática ou habilidades particulares.

Dentre as atividades tratadas na escola, incluem-se as atividades matemáticas. Os profissionais ligados ao ensino dessa disciplina têm buscado práticas mais adequadas e possíveis de serem desenvolvidas no contexto das diferentes instituições de ensino. Nesse sentido, o conhecimento das estruturas da Matemática, em conjunto com o conhecimento de como as pessoas pensam e usam suas capacidades intelectuais, fez surgir a Psicologia da Educação Matemática, que estuda os processos pelos quais os alunos elaboram os seus conhecimentos, com o objetivo de identificar os mecanismos do pensamento em situações que envolvem a Matemática, buscando compreender como esses conceitos são adquiridos:

[1] Krutetskii (1963; 1976), quando se referiu aos componentes, tratou-os como habilidades particulares ou fatores que fariam parte da estrutura geral das habilidades, como a percepção, o pensamento, a memória e imaginação, mais aparentes em sujeitos capazes em matemática. Os diferentes tipos de habilidades são compostos por combinações desses componentes.

"Queremos saber não somente como a execução humana adquire habilidade, e sim como a execução humana adquire desenvoltura em habilidades matematicamente significativas, e como se integram tais habilidades no contexto de solução de problemas matemáticos" (Resnick e Ford, 1990, p. 15).

Segundo esses autores, procura-se conhecer que porção da experiência e do intelecto torna possível a chamada capacidade matemática. O estudo das relações entre o conteúdo e o pensamento está diretamente ligado à Psicologia da Educação Matemática:

"Hoje, uma Psicologia da Matemática que trate direta e explicitamente da interação entre a estrutura do conteúdo e a natureza do pensamento humano pode servir de base para o desenvolvimento da teoria e para a prática do ensino nesse campo" (Resnick e Ford, 1990, p. 18).

Nesse sentido, a Psicologia Cognitiva trabalha com a definição de percepção, que é um conceito com raízes na Psicologia, na Filosofia e na Física. O conceito de percepção pode ser subdividido em outros, de acordo com a ênfase que é atribuída a ela. Krutetskii (1976) definiu como **percepção analítico-sintética de figuras geométricas** a "habilidade em discernir e avaliar os elementos interpenetrantes das figuras geométricas a partir de vários pontos de vista no isolamento dos elementos das figuras e os elementos da figura-fundo" (p. 112), sendo esse um dos componentes das habilidades matemáticas. Essa definição está fundamentada na noção de "visão matemática" de Zhuravlev (1940, citado por Krutetskii, 1976), que seria a "habilidade para ver em uma figura não só aquilo que é essencial, mas também tudo o que não está contido nela". Segundo Frostig e Horne (1964, citados por Del Grande, 1994), a constância da percepção depende, em parte, da aprendizagem e das experiências, que são fornecidas por atividades de natureza geométrica.

Outro componente das habilidades matemáticas é a **habilidade para conceitos espaciais,** onde, segundo Krutetskii (1976), um indivíduo considerado capaz soluciona mentalmente um problema, sem o apoio de desenhos ou objetos apropriados, tanto de figuras geométricas em duas, como em três dimensões. A necessidade de ajuda através de um esboço seria um indicativo de que o sujeito possuiria uma fraca habilidade para pensar logicamente, aliada a uma fraca habilidade para conceitos espaciais, com relação a figuras geométricas em duas e três dimensões.

Em relação à estrutura do conteúdo, a Geometria apresentou, por um longo período, uma estrutura baseada no enfoque euclidiano, adotado pelos autores dos livros didáticos indicados pelos professores (Nasser, 1992a), tendo verificado que muitos professores do curso secundário, acreditavam que, devido a esse fator, os alunos sentiam mais dificuldades nessa disciplina que em outras áreas da Matemática. Além disso, muitos desses livros eram altamente teóricos, o número de aulas dedicadas à Geometria era baixo, além de a Geometria ser formalmente ensinada apenas no final do ensino fundamental (7ª e 8ª séries).

Nasser (1992a) apontou também a ausência, no ensino, de manipulação de materiais e de dispositivos que ressaltem o aspecto dinâmico da Geometria, tais como computadores e vídeos. Apontou, do mesmo modo, a ausência de trabalho de desenho geométrico com construções que exijam o uso de régua e compasso, pois isso poderia auxiliar a compreensão de muitos conceitos de Geometria, como por exemplo os atributos definidores das propriedades das figuras geométricas. Outra preocupação foi apontada pela CENP (1986a), na Proposta Curricular para o Ensino da Matemática - 1° grau, onde os temas algébricos eram priorizados na escola, enquanto os tópicos a respeito da Geometria apareciam reduzidos, sendo que alguns deles haviam sido praticamente eliminados.

Segundo Shaw, Thomas, Hoffman e Bulgren (1995), os estudantes que compreendiam os conceitos geométricos estavam melhor preparados para generalizar e transferir seu conhecimento que os estudantes que apenas memorizavam suas definições. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, redigidos pela Secretaria de Educação Fundamental (1997a), aparentemente baseados na teoria da aprendizagem significativa de David P. Ausubel (1980), é necessário reverter o ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significado. Tal concepção pede a **formação significativa de conceitos**, que pressupõe que o professor considere o ambiente do aluno, suas aspirações, seu estágio de desenvolvimento biológico, psicológico e intelectual (CENP, 1986).

O ensino dos conceitos geométricos tem por objetivo interferir na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do estudante, pois, de acordo com Vianna (2000, p. 6), o indivíduo que domina o conhecimento geométrico é capaz de estabelecer relações e, além disso:

> "Também fazem parte do conhecimento geométrico as maneiras como os conceitos e relações são utilizados, ou seja, os procedimentos aprendidos, entre eles as destrezas em geometria, como desenhar, planificar, usar nomes corretos, visualizar transformações em figuras, generalizar os conceitos para outros tópicos da Matemática e para situações do dia-a-dia".

Desta forma, os conceitos geométricos constituem-se em parte importante do ensino de Matemática, pois através deles "o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive" (Secretaria de Educação Fundamental, 1997a, p. 55).

Usiskin (1994) afirmou que, no sistema escolar americano, pelo fato de não haver um currículo específico para Geometria, os estudantes aparentemente ingressam no ensino médio sem apresentar conhecimentos suficientes para serem bem sucedidos em Matemática. De acordo com esse autor, se os estudantes do ensino médio não apresentaram um bom desempenho nas atividades geométricas, possivelmente isto é decorrência da falta de conhecimentos e experiências prévias sobre o assunto. Segundo Van Hiele (1986), a experiência é fator fundamental para o **desenvolvimento de um nível de pensamento**, incluindo o geométrico, para outro mais elevado. Esses dois fatores — experiência e conhecimento — são responsáveis pela formação dos constructos mentais dos indivíduos.

Com base nesses aspectos, presentes no ensino e aprendizagem de geometria, foi formulado o seguinte problema de pesquisa:

Quais são as relações entre o desempenho em provas que avaliam o nível de desenvolvimento do pensamento em Geometria, a percepção geométrica e a habilidade para trabalhar com conceitos espaciais?

Grande parte do presente trabalho é fundamentado nos pressupostos de P. M. Van Hiele (1986), que estudou a maturidade do pensamento de estudantes em Geometria, tendo sugerido que esses alunos progrediam através de uma seqüência hierárquica dos níveis de compreensão, enquanto aprendiam Geometria.

O referencial teórico sobre habilidades baseia-se na teoria de V. A. Krutetskii (1976), psicólogo russo que estudou as diferenças na habilidade matemática de indivíduos, definidos por ele como muito capazes, capazes, médios e incapazes em Matemática, tendo apontado a percepção geométrica e a habilidade para trabalhar com conceitos espaciais como sendo dois dos componentes da habilidade matemática que, aliada à habilidade para pensar logicamente sobre relações espaciais, constitui o que Krutetskii chamou de "mente geométrica".

Nesse sentido, o presente trabalho justifica-se pela comparação entre dois modelos teóricos: um que descreve o desenvolvimento do raciocínio em relação a conceitos geométricos e outro que trata de habilidades matemáticas. Em outras palavras, o objetivo era saber quanto de conhecimento estava relacionado a uma série de habilidades consideradas importantes neste contexto.

O presente trabalho foi dividido em seis capítulos, sendo o capítulo I o que apresenta a fundamentação teórica. O capítulo II, em continuidade a essa fundamentação, apresenta a revisão da literatura.

O capítulo III apresenta o método de pesquisa, o procedimento usado, os objetivos, os sujeitos e os instrumentos que foram utilizados, além de uma análise dessas provas e o plano de análise dos dados, com a descrição das variáveis estudadas e os métodos estatísticos selecionados.

O capítulo IV foi desenvolvido para descrever o estudo preliminar e alguns dados coletados nessa fase de pesquisa, com o objetivo de delinear o estudo final, através da testagem prévia dos instrumentos.

O capítulo V apresenta as diversas análises dos dados e no capítulo VI estão as conclusões e implicações do estudo. No capítulo VII foram discutidas algumas atividades matemáticas que poderiam facilitar o ensino de alguns conceitos geométricos, seguidos das referências bibliográficas e dos anexos, que contêm os instrumentos usados para a coleta de dados do presente estudo.

CAPÍTULO I

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O Modelo Van Hiele de Desenvolvimento do Pensamento em Geometria

Pierre M. Van Hiele e sua esposa, Dina Van Hiele Geldof, foram professores holandeses de Matemática que se interessaram em estudar e compreender os mecanismos existentes no processo ensino-aprendizagem de Geometria, devido aos problemas que eles enfrentaram em sala de aula. A reedição de alguns de seus trabalhos permitiu delinear não só os aspectos fundamentais do modelo, mas também a origem dos seus estudos, conforme ilustra o trecho a seguir:

> "Quando eu comecei minha carreira como professor de Matemática, eu logo percebi como era difícil essa profissão. Havia partes do conteúdo que eu poderia explicar e explicar, e ainda assim os alunos não entendiam. Eu poderia ver que eles realmente tentavam, mas não obtinham sucesso. Especialmente, no começo da Geometria, quando coisas simples tinham que ser provadas, eu podia ver que eles faziam o máximo, mas o assunto parecia ser muito difícil" (Van Hiele, 1986, p. 39).

No presente trabalho, a descrição do modelo proposto por Van Hiele é baseada principalmente no livro de 1986, "Structure and Insight" e também em trabalhos anteriores desenvolvidos no grupo de pesquisa sobre Psicologia da Educação Matemática da Faculdade de Educação da UNICAMP por Pirola (1995), Oliveira (1998) e Vianna (2000). Além disso, serviram de fonte os textos de Nasser (1992, 1992a) e Usiskin (1982, 1994).

A teoria, que dividiu o desenvolvimento do pensamento em Geometria em níveis, originou-se na sala de aula, aliando vários aspectos do ensino, tendo sido elaborada através dos trabalhos de doutoramento dos Van Hiele concluídos na Universidade de Utrech, em 1957. Entretanto, foi a partir de 1974, durante um encontro do NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) que os estudos de Van Hiele tornaram-se conhecidos nos Estados Unidos e, desde então, proliferaram estudos relativos aos níveis propostos por Van Hiele. A revisão bibliográfica feita por Pirola (1995) também mostrou que a teoria de Van Hiele aparece na maioria dos trabalhos sobre ensino-aprendizagem de Geometria nos últimos 20 anos, e nos Estados Unidos muitos projetos foram desenvolvidos como Projeto Oregon, trabalhado entre os anos de 1979 e 1982.

Lujan (1997) descreveu como Van Hiele fundamentou a teoria proposta por ele na Psicologia da Gestalt e em uma base estruturalista, aliando a isso aspectos da didática da Matemática.

O objetivo principal de Van Hiele (1986) era o estudo dos conteúdos geométricos, embora seu modelo possa ser, também, aplicado a outros tópicos de ensino. Esse autor foi um crítico de certas situações de ensino que, segundo ele, objetivavam a aprendizagem de fatos e não de estruturas, alegando que os fatos, em si, apresentam muitas lacunas de coerência. O autor apontou também que, se uma parte de uma estrutura é esquecida, ela pode ser mais facilmente relembrada através de seus aspectos componentes.

Van Hiele (1986) se interessou pelo conceito de insight e pelas maneiras de fornecer meios para que seus alunos desenvolvessem esses insights. Afirmou que "o insight surge quando uma pessoa age na nova situação adequadamente e com intenção" (p. 24). Estrutura e insight se relacionam à medida que o segundo é resultado da percepção do primeiro. Para que ocorra o insight, é necessária a percepção do funcionamento da estrutura, para depois entender o que ela é. A Gestalt influenciou a composição do modelo teórico nesses dois aspectos.

A teoria piagetiana também influenciou Van Hiele durante a composição do conceito de estrutura, que é de extrema importância para esse modelo teórico, e pode ser melhor entendido através de suas propriedades, sendo que a mais importante delas, segundo Van Hiele (1986), dizia que uma estrutura pode ser estendida pela sua composição. A segunda propriedade afirmava que as estruturas contêm uma objetividade, ou seja, as pessoas continuam uma estrutura da mesma maneira; um indivíduo pode agir a partir de uma estrutura prévia para resolver novas situações.

As estruturas visuais possuem as propriedades mais fáceis de serem observadas e, freqüentemente, a construção dessas estruturas não depende da linguagem. Por outro lado, existem estruturas que dependem exclusivamente do uso da linguagem para serem compreendidas. Além disso, a própria linguagem tem uma estrutura e ajuda na comunicação de outras estruturas, o que eqüivale a dizer que tais estruturas podem ser estendidas pelo uso da linguagem.

Estruturas rígidas são aquelas que podem ser estendidas sem que erros sejam cometidos, mesmo que existam inúmeras continuações diferentes. Outras estruturas são fracas se um número muito grande de exemplos precisa ser observado antes de uma tentativa de extensão dessa estrutura. As figuras geométricas são estruturas mais rígidas que quadros de pintores famosos ou desenhos de personagens infantis conhecidos.

Quanto às estruturas matemáticas, Van Hiele (1986) afirmou que sua rigidez depende do fornecimento (ou não) de sua regra. Se a extensão depende de uma adivinhação, essa estrutura é considerada fraca.

Para compor os níveis de desenvolvimento do pensamento em Geometria, Van Hiele (1986) baseou-se novamente na Psicologia Piagetiana, mas é preciso que se estabeleçam algumas diferenças importantes: (1) Van Hiele compôs um modelo teórico de aprendizagem, enquanto que os estudos psicológicos de Piaget tinham por objetivo compreender o desenvolvimento, portanto era problema de Van Hiele e não de Piaget preocupar-se em como estimular um sujeito para passar de um nível para o seguinte; (2) Van Hiele definiu um número de níveis maior que Piaget; (3) a linguagem não era tão importante na passagem de um nível para outro segundo Piaget, mas Van Hiele era terminantemente contra esse pressuposto. Segundo este, "a linguagem é muito importante para o pensamento. Sem linguagem, o pensamento é impossível, sem linguagem não há desenvolvimento das ciências" (Van Hiele, 1986, p. 9); (4) Van Hiele não concordou com Piaget quando este pressupôs que o homem se desenvolve em direção a alguns conceitos teóricos universais. No modelo de desenvolvimento do pensamento em Geometria, os conceitos podem mudar com o passar do tempo e o processo de aprendizagem é influenciado pelas pessoas daquele período; (5) Piaget acreditava que uma criança já nascia com essas estruturas e tinha apenas que desenvolvê-las. Para Van Hiele, um nível mais elevado é atingido à medida que as regras do nível precedente tornam-se explícitas, a fim de se obterem novas estruturas; (6) assim como no gestaltismo, Van Hiele apresenta estrutura como um conceito que obedece a certas leis.

Outro fator muito importante considerado por Van Hiele (1986) foi a maturação do sujeito durante o processo de ensino. Muitas vezes, um conceito parece ser muito difícil de ser trabalhado em sala de aula, mas em outros momentos os sujeitos parecem aprender com maior facilidade. Este autor inicialmente atribuiu isso uma possível mudança na linguagem utilizada por ele na classe, mas depois compreendeu que mudanças na cognição dos sujeitos é que haviam colaborado para a melhoria dos seus desempenhos. A essas diferenças de compreensão entre professor e alunos, Van Hiele definiu como níveis de pensamento. Mais detalhadamente:

> "Você pode dizer que alguém atingiu um nível mais elevado de pensamento quando uma nova ordem de pensamento permite a ele, com respeito a certas operações, aplicar essas operações sobre novos objetos. O atingir um novo nível não pode ser efetuado pelo ensino, mas ainda, pela escolha adequada de exercícios, o professor pode criar uma situação favorável para que o aluno alcance o nível de pensamento mais elevado" (Van Hiele, 1955, p. 289, citado por Van Hiele, 1986, p. 39).

> "É evidente que o alcance de um nível é resultado de um processo de aprendizagem. Esse pode ser um processo de aprendizagem não direcionado, então o nível é atingido exclusivamente por uma aprendizagem acidental. De qualquer modo, seria um deplorável erro supor que um nível é alcançado como resultado de uma maturação biológica que o professor ajuda a influenciar" (Van Hiele, 1986, p. 65).

Van Hiele, em 1955, descreveu cinco níveis que iam de zero a quatro, mas na publicação de "Structure and Insigt", em 1986, aparecem cinco níveis, de um a cinco, e uma maior ênfase no que ele descreve como o nível visual ou nível um. Ele percebeu que as ações, no patamar do pensamento visual, são de extrema importância para o desenvolvimento do pensamento. Para descrever esse processo, o modelo foi dividido em cinco níveis de compreensão:

- ***Nível visual:*** as figuras ou objetos geométricos são reconhecidos por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não pelas suas partes ou por suas propriedades. Uma pessoa neste estágio pode entender o vocabulário geométrico, identificar certas figuras e reproduzi-las, mas não pode reconhecer, por exemplo, um quadrado através de seus quatro ângulos retos.

- ***Nível descritivo:*** Figuras (ou classe de) podem ser identificadas por suas propriedades; entretanto, cada uma delas é vista isoladamente, ou seja, as relações entre essas propriedades não podem ainda ser entendidas, assim como as definições;
- ***Nível teórico:*** Os estudantes podem estabelecer relações entre as propriedades e entre as figuras, necessitam de uma definição precisa, percebem que uma propriedade pode decorrer de outra, reconhecendo classes de figuras e suas inclusões, argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas. A dificuldade aqui é entender o significado de uma dedução no seu total ou a função dos axiomas. O mais freqüente é obter resultados experimentalmente;
- ***Lógica formal:*** Há um domínio do processo dedutivo e de demonstrações como um modo de estabelecer relações geométricas, usando os sistemas de axiomas, e reconhecendo condições necessárias e suficientes;
- ***Leis lógicas:*** Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas, inclusive não euclidianos, e comparação desses sistemas, utilizando provas dedutivas para contrariar a intuição, aceitando conclusões que no nível anterior pareceriam absurdas.

Nasser (1992a) nomeou os níveis de Van Hiele de forma distinta: Nível Básico – Reconhecimento; nível 1 – Análise; nível 2 – Síntese ou abstração; nível 3 – Dedução; nível 4 – Rigor. Crowley (1996) chamou os níveis de Visualização, Análise, Dedução Informal, Dedução e Rigor. Pegg e Davey (1991) definiram os níveis como sendo de 1 a 5.

É preciso ressaltar que um indivíduo pode raciocinar corretamente em cada nível, pois cada um deles possui uma linguagem particular. O próprio autor não considerava a resposta como certa ou errada em um determinado nível, e sim um desenvolvimento do pensamento, em que o sujeito raciocina em relação a determinados conceitos, como se segue:

> "A transição de um nível para o seguinte não é um processo natural; ele toma lugar sob influência do programa de ensino-aprendizagem. A transição não é possível sem aprendizagem de uma nova linguagem. Pessoas do primeiro período raciocinam corretamente se negam que um quadrado é um losango. Elas são guiadas pela rede de relações visuais; sua intuição mostra a elas dessa forma. Somente se uma rede usual de relações do terceiro nível é aceita, isto faz com que o quadrado seja entendido como pertencendo ao conjunto dos losangos" (Van Hiele, 1986, p. 50).

Surgiram críticas à teoria de desenvolvimento do pensamento em Geometria desenvolvida por Van Hiele, como o número de níveis (poderia existir um nível mais elevado que todos e outro anterior ao reconhecimento), que esses níveis não deveriam ser discretos e sim, contínuos, e que os níveis seriam prescritivos apenas em relação a um enfoque tradicional dado ao ensino de Geometria (Nasser, 1992).

Do ponto de vista metodológico, como já citado, foram realizadas pesquisas na área da Educação Matemática, sobre conceitos geométricos que se fundamentaram nos pressupostos de Van Hiele para explicar fenômenos e fornecer ferramentas para os professores atuarem de forma objetiva no processo ensino-aprendizagem. Os níveis estão bem fundamentados e mesmo um trabalho não-tradicional em sala de aula deve desenvolver os aspectos relevantes e irrelevantes das figuras, propriedades e suas relações.

Van Hiele (1986) afirmou que os níveis mais elevados, como o quarto e o quinto, não teriam tanta importância se comparados aos antecessores, afirmando ainda não se sentir confortável com as críticas à sua teoria, que supunham a existência de um número maior de níveis. Como ele se interessava pelos problemas de sala de aula, atribuía maior valor aos três primeiros níveis.

Ainda de acordo com Van Hiele (1986), o processo de desenvolvimento desses níveis incluía aspectos relevantes, como o fato de um estudante não poder atingir um certo nível sem passar por todos os outros anteriores. Além disso, o sucesso em um nível depende das estratégias utilizadas nos níveis precedentes, ou seja, o modelo foi construído de forma hierárquica.

Este autor fornece como exemplo a relação entre o primeiro e o segundo níveis. O nível 1 em Geometria é relacionado ao visual e o segundo a uma forma esquemática de pensamento, porém o pensamento do segundo nível é originado do pensamento no nível 1, através de um complexo processo de formação. Essa passagem de um nível para outro foi chamada de período. Exemplificando, entre o nível um e dois existe o período um, que é de transição. O período dois inicia-se no segundo nível e finaliza-se quando o nível três é atingido. Por exemplo: um sujeito é capaz de reconhecer um quadrado. Sabe somente que ele possui os quatro lados iguais, mas não percebeu ainda que o quadrado possui também os quatro ângulos internos iguais.

Outros fatores do modelo merecem destaque como: (a) o progresso de um nível para outro mais elevado depende mais dos conteúdos e métodos de instrução aplicados ao estudante que de sua idade; (b) uma relação considerada correta em um nível poderia sofrer modificação em outro, pois cada nível tem seus próprios símbolos lingüísticos; (c) objetos inerentes a um nível já estariam implícitos nos níveis mais elevados; (d) estudantes e professores que estão em níveis diferentes podem ter problemas de comunicação, ou seja, o aluno não consegue acompanhar um procedimento do professor que seja mais elevado que o seu (incluindo também material didático, conteúdo, vocabulário, etc).

Esse último fator, na opinião de Van Hiele (1986), é uma das principais causas de fracasso no ensino. Para ele, o resultado de comunicação em níveis diferentes sobre um determinado conceito pode induzir os alunos a imitar as estruturas de ação do professor. Como conseqüência, os alunos podem ser bem sucedidos naquele momento, mas não há uma real compreensão do assunto, comprometendo, portanto, a continuidade eficiente do processo de aprendizagem.

Luna (1996) mostrou que, de acordo com a teoria da aprendizagem significativa proposta por Ausubel, as aulas nas quais o conhecimento é apresentado em sua forma final e acabada podem levar a uma aprendizagem mecânica. É esperado que a formação de conceitos, em situações escolares, seja significativa para as crianças, pois assim a compreensão desses conceitos e de seus princípios relacionados torna-se muito mais fácil. Por isso, o professor tem um papel fundamental nesse processo, já que ele não terá condições de fornecer instrumentos adequados aos alunos se não possuir o conceito incorporado de maneira significativa (Lima, 1996).

Os livros didáticos, que fazem uso de fórmulas e conceitos desvinculados uns dos outros e também do contexto cotidiano, não mostrando relação com o aluno, utilizam problemas artificiais que, realmente, só medem a capacidade do aluno em reproduzir fórmulas, não havendo uma preocupação com a aprendizagem de significados. Pirola (1995) verificou, ao submeter estudantes a tarefas sobre geometria, que alguns sujeitos conseguiam lembrar-se da figura "losango" e desenhá-la, mas não conseguiam defini-la em termos de seus atributos, o que pareceu um fato indicativo de que o ensino de figuras planas tem valorizado o aspecto visual e não outras características relevantes das figuras geométricas.

Assim, Van Hiele (1986), que considerava também os aspectos pedagógicos do ensino, definiu cinco estágios, através dos quais a instrução seria melhor sucedida, isto é, se fosse compatível com o nível do aluno. O objetivo era fornecer aos alunos as ferramentas para a aquisição de níveis mais elevados:

1. Estágio de ***Informação***: no qual os alunos seriam informados sobre o assunto da disciplina. Segundo Crowley (1994), esse estágio apresentaria ainda outra função: a de informar também o professor sobre os conhecimentos prévios dos alunos;
2. Estágio de ***Orientação dirigida***: os alunos executariam atividades simples com objetivos bem específicos para que pudessem iniciar trabalhos dirigidos para determinados conteúdos;
3. Estágio de ***Explicação***: nesta fase a linguagem tem papel fundamental e os alunos devem iniciar o uso correto das expressões técnicas e desenvolver a capacidade de se expressar através das palavras. A estrutura torna-se explícita, possibilitando a comunicação, a respeito da mesma, com outras pessoas. Para Crowley (1994), o papel do professor, nesse período, não é tão fundamental e os níveis de desenvolvimento tornam-se mais explícitos;
4. Estágio de ***Orientação livre***: através de atividades complexas, os estudantes iniciariam uma forma particular de entender e expressar relações, porém de forma correta e precisa;
5. Estágio de ***Integração***: ao término de exploração do conteúdo, os alunos devem ser capazes de observar todos os conceitos e as relações existentes como um todo. Nenhuma novidade é apresentada aqui, sendo que "no final da quinta fase os alunos alcançaram um novo nível de pensamento. O novo domínio substitui o antigo, e os alunos estão prontos para repetir as fases de aprendizado no nível seguinte" (Crowley, 1994, p. 8).

Estudando a capacidade que os alunos deveriam possuir para entender Geometria no ensino secundário e primário, em cada um dos níveis citados, Hoffer (1981) identificou cinco áreas: visual, verbal, desenho, lógica e aplicação. Essas áreas foram relacionadas aos cinco níveis de desenvolvimento do raciocínio geométrico definidos por Van Hiele, originando então 25 cruzamentos. É claro que esses pontos não são isolados, muito pelo contrário, estão intimamente ligados, já que algumas atividades ocorreriam através da combinação dessas destrezas para que as soluções fossem obtidas.

Quadro 1 - Habilidades geométricas isoladas por Hoffer (Davey e Holliday[2], 1992, p. 260)

	nível 1	nível 2	nível 3	nível 4	nível 5
	reconhecimento	análise	dedução informal	dedução formal	rigor
Visual					
Verbal					
Desenho					
Lógica					
Aplicação					

O Quadro 1 mostra que os níveis de desenvolvimento geométrico apresentam características diferenciadas, de acordo com a operação específica requerida. Segundo Davey e Holliday (1992), a acuidade visual deveria ser reforçada na escola de maneira a levar o aluno a (1) reconhecer "alguma coisa" em uma figura; (2) retirar propriedades de uma figura geométrica; (3) ver similaridades e diferenças entre figuras geométricas planas e espaciais; (4) ser capaz de interpretar diagramas e esboços, especialmente de objetos tridimensionais, mas também de situações bidimensionais; (5) ler um mapa; (6) reconhecer objetos que foram rotacionados, invertidos ou vistos de uma direção diferente; (7) ser capaz de observar se uma linha é reta ou se um ângulo mede 90^0; (8) reconhecer figuras ocultas; (9) ser capaz de encaixar peças; (10) supor o que apareceria após alguma transformação de uma figura; (11) imaginar ou visualizar mentalmente uma situação a partir de uma descrição oral ou escrita.

Os níveis de Van Hiele foram redefinidos por Hoffer (1981) de acordo com a capacidade dos indivíduos na percepção de figuras. Seriam as capacidades de:

- ***Nível 1:*** Reconhecer figuras ou objetos geométricos a partir de um desenho, e de informações marcadas na figura.
- ***Nível 2:*** Relatar propriedades de uma figura e identificá-la como parte de uma classe de figuras maior;
- ***Nível 3:*** Reconhecer inter-relações e propriedades em comum entre diferentes tipos de figuras, identificando suas classes e inclusões;
- ***Nível 4:*** Usar as informações disponíveis sobre a figura para poder deduzir mais informações a respeito;

[2] Reprodução autorizada através de e-mail.

- ***Nível 5:*** Estabelecer teoremas em diversos sistemas, inclusive nos não euclidianos; comparação dos mesmos, através da comparação de figuras, nas quais as provas podem contrariar a intuição e serem aceitas como argumento dedutivo.

O modelo de formação de conceitos de Klausmeier

"O desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores" é um dos objetivos da Educação Básica, definidos pela Lei de Diretrizes e Bases (Secretaria de Educação Fundamental, 1997). Para que tal objetivo seja atingido é necessário cuidar para que o ensino seja programado de maneira a favorecer as novas aquisições:

> "As atividades escolares que são usualmente propostas aos alunos nas diversas disciplinas permitem ampliar o campo conceitual desses alunos. Isso fornecerá subsídio para que o indivíduo trabalhe com as novas informações que recebe, interpretando-as e selecionando-as de acordo com as exigências da situação. A aprendizagem e o ensino de conceitos são essenciais, e a escola coloca como um dos seus principais objetivos o ensino de conceitos nas diferentes disciplinas. A partir da formação de conceitos, supõe-se que o estudante conseguirá aprender princípios (incluindo regras e axiomas) e, na seqüência, solucionar problemas que envolvam esses conceitos e princípios, ampliando assim sua estrutura de conhecimento" (Correa, Spinillo, Brito e Moro, 1998).

O contato diário do ser humano com uma infinidade de conceitos só é possível através da sua aquisição mediante a categorização e formação desses conceitos. Segundo Bruner e col. (1956, citado por Lomônaco, 1984), categorizar consiste em tornar equivalentes objetos, eventos e pessoas que são discriminavelmente diferentes, e responder a eles em função de sua inclusão como membros de uma classe e não como entidades particulares. Lomônaco (1984) destacou também que os conceitos teriam por objetivo, no funcionamento cognitivo do ser humano:

1. Reduzir a complexidade do ambiente, identificando as propriedades definidoras (atributos[3] relevantes), pois o ser humano é capaz de classificar objetos em função de uma característica comum, desconsiderando atributos irrelevantes;
2. Identificar objetos, eventos e pessoas. Isso é possível quando os atributos relevantes foram assimilados;
3. Reduzir a necessidade de aprendizagem constante, pois sendo formado o conceito, o indivíduo será capaz de identificar qualquer novo exemplo;
4. Orientar a atividade instrumental, ações e atitudes;
5. Ordenar e relacionar classes de eventos. Quando se refere a um certo conceito, conecta-se a um conjunto de exemplos passíveis de serem incluídos dentro dele.

Muitos outros autores também definiram conceito, como por exemplo Bruner (1969, citado por Lomônaco, 1984, p. 67), segundo o qual conceito "é um evento interno, como uma representação cognitiva de fatos objetivos, ou da relação entre tais fatos", ou Flavell (1976, p. 3, citado por Lomônaco, 1984, p. 67), que descreveu conceito como "um sistema de categorias, como um meio interveniente ou como um programa, através do qual os estímulos encontrados são codificados, analisados e avaliados quando uma resposta vai ser emitida". Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 74) definiram conceitos como "objetos, eventos, situações ou propriedades que possuem atributos essenciais e são designados em uma determinada cultura por algum signo ou símbolo aceito". Dentre as várias teorias cognitivas existe concordância sobre o fato de a formação de um conceito ser um evento interno, não passível de observação direta, inferido apenas através do desempenho da pessoa (Lomônaco, 1984).

Klausmeier (1977, p. 50) pesquisou a formação e o ensino de conceitos, tendo definido conceito como:

> "Informação ordenada a respeito das propriedades de uma ou mais coisas – objetos, eventos ou processos – que tornam qualquer coisa particular ou classe de coisas capaz de ser diferenciada e também relacionada com outras coisas ou classes de coisas".

[3] Um atributo é uma característica discriminável de um objeto ou evento que pode assumir valores diferentes, por exemplo, cor, forma, etc..

Esse autor classificou os conceitos como entidades públicas, que são aqueles que se referem à informação organizada que corresponde aos significados das palavras, sendo encontrados em dicionários, enciclopédias e outros livros, sendo aceitos socialmente, e como constructos mentais, que são os conceitos que cada indivíduo forma de acordo com suas experiências de aprendizagem e padrões maturacionais únicos; são idiossincráticos e usados para pensar sobre o mundo físico e social. A escola tem como uma de suas funções fazer com que os alunos aproximem suas definições de conceitos às propostas apresentadas pelos estudiosos de uma determinada área, relacionando constructos mentais com os conceitos como entidades públicas.

Quando um ou mais conceitos estão relacionados, esta conexão é denominada princípio. Esses conceitos podem estar caracterizados como constructos mentais ou como entidades públicas. Para Klausmeier (1977), as relações entre os conceitos formam a maior parte do conhecimento e são elas que direcionam o comportamento do indivíduo. Para que haja aprendizagem de um princípio é necessária a aprendizagem prévia dos conceitos envolvidos nesse princípio.

Klausmeier (1977) descreveu ainda o processo de desenvolvimento conceitual, diferenciando os vários níveis de formação de conceitos. Estes níveis apresentam-se organizados de maneira hierárquica, sendo cada nível sucessivo mais inclusivo que o anterior. Correa, Spinillo, Brito e Moro (1988, p. 90) discutiram os objetivos dos estudos de Klausmeier, constatando que os mesmos permitiam:

> "Identificar o que é sucessivamente representado na estrutura cognitiva ao longo do período de desenvolvimento, as operações mentais envolvidas na aprendizagem de diferentes conceitos e as condições de ensino que facilitam a aprendizagem, observando que os vários níveis de um conceito são atingidos em uma seqüência invariante".

Para passar de um nível para o seguinte, exige-se uma ou mais operações mentais e o sujeito precisa ter o conceito formado no nível anterior e denominar o conceito:

- ***Nível concreto:*** O indivíduo formou o conceito no nível concreto quando é capaz de reconhecer um objeto como sendo o mesmo já encontrado anteriormente;
- ***Nível de identidade:*** Quando o indivíduo é capaz de reconhecer um objeto ou evento como sendo o mesmo anteriormente encontrado, observado de diferente perspectiva física ou aspecto sensorial;

- ***Nível classificatório:*** capacidade de reconhecer pelo menos dois exemplos diferentes de uma mesma classe de objetos, eventos ou ações como sendo equivalentes, porém o sujeito ainda não pode fornecer a definição correta do conceito, apesar de discriminar corretamente exemplos de não-exemplos;
- ***Nível formal:*** O sujeito fornece o nome do conceito, define corretamente o conceito, em termos de seus atributos definidores, é capaz de identificar e nomear os atributos, e diferencia exemplos de não-exemplos em termos de seus atributos definidores.

Esses quatro níveis possuem uma forma de relacionamento entre si, de acordo com o tipo de tarefa, como descreveu Klausmeier (1977):

> "Os conceitos adquiridos apenas nos níveis concreto e de identidade podem ser usados na solução de problemas simples, que exigem apenas o relacionamento de percepções sensoriais óbvias. Entretanto, conceitos adquiridos nos níveis classificatório ou formal, mais maturos, podem ser usados na identificação de instâncias recentemente encontradas, tais como exemplos e não-exemplos do conceito (...) e ser usados na solução de problemas" (p.52).

O indivíduo que se encontra em um nível classificatório ou formal deve definir o conceito através de suas propriedades relevantes, identificar atributos relevantes e irrelevantes, exemplos e contra exemplos do conceito que serão utilizados em situações diversas, exemplos e contra-exemplos dos conceitos que serão utilizados nas avaliações escolares, a taxonomia à qual pertence o conceito e suas relações supra-ordenadas, coordenadas e subordinadas com outros conceitos e princípios, problemas em que se utilizarão os conceitos.

Segundo Klausmeier (1977), os conceitos apresentam oito atributos, sendo seis deles comuns aos princípios. Porém a aplicação dos atributos dá-se de forma diferenciada para conceitos e princípios, já que estes exigem um nível superior de pensamento:

- ***Aprendibilidade:*** o grau de aprendibilidade varia entre indivíduos com experiências culturais e lingüísticas semelhantes, sendo que o nível de domínio de qualquer conceito também varia entre indivíduos de nível maturacional e vivência equivalentes. Essa variação entre os sujeitos acontece com todos os oitos atributos.
- ***Utilidade:*** alguns conceitos são melhor compreendidos que outros, sendo incluídos em princípios e utilizados na solução de problemas. Conceitos como constructos

mentais são mais aplicáveis quando formados em níveis superiores. Quando o indivíduo possui um conceito em nível classificatório ou formal ele pode generalizá-lo para novos exemplos e discriminar não-exemplos; reconhecer relações supra-ordenadas, coordenadas ou subordinadas; reconhecer relações de causa e efeito correlacionais, de probabilidade e axiomas, e solucionar problemas.

- ***Validade:*** os conceitos possuem maior validade quando os especialistas sobre o assunto possuem maior concordância em relação a sua definição e taxonomia.
- ***Generalidade:*** o conceito será mais geral dependendo de sua hierarquização na taxonomia, isto é, quanto mais alta sua colocação, mais geral é considerado o conceito. A variação entre os sujeitos ocorre pela formação de cada sistema taxonômico próprio.
- ***Importância:*** se um conceito é considerado pré-requisito para formação de outros conceitos ele tem importância, pois é essencial para a formação de outros conceitos e princípios.
- ***Estrutura:*** "qualquer conceito público definido em termos de atributos tem uma estrutura e uma relação com os atributos definidores" (Klausmeier, 1977, p. 318)
- ***Perceptibilidade de exemplos:*** depende da possibilidade dos exemplos do conceito serem captados pelos sentidos, ou seja, há exemplos que podem ser manipulados, vistos e cheirados, há exemplos não-perceptíveis (por exemplo, eternidade, morte, etc) e há ainda, um meio termo entre esses dois extremos, conceitos que podem ser representados, mas não podem ser observados.
- ***Numerosidade de exemplos:*** refere-se à quantidade e a variedade de exemplos de um dado conceito.

Um tratamento distinto é fornecido por Ausubel e outros (1980) para os termos formação e assimilação de conceitos, onde o primeiro relaciona-se ao processo de aprendizagem na infância, para posteriormente ingressar em um processo mais elaborado de aquisição de conceitos, sendo que sua formação vai depender da quantidade e da qualidade de informação recebida pelo indivíduo.

David P. Ausubel desenvolveu a teoria de aprendizagem significativa através de uma abordagem cognitivista, isto é, procurou explicar as variáveis cognitivas e afetivas do aluno e também variáveis da tarefa de ensino, considerando todos os fatores presentes durante a aprendizagem significativa (Faria, 1989).

Outras teorias tratam de problemas de aprendizagem não do ponto de vista do conteúdo, mas do ponto de vista do indivíduo e, dentre estas, encontra-se a do autor soviético Krutetskii (1976), que desenvolveu sua teoria a respeito da habilidade matemática em crianças escolares.

A teoria de Krutetskii a respeito das habilidades matemáticas

De acordo com Sternberg (1998), as teorias que abordam as habilidades como foco principal de estudo podem defini-las como precursoras da prática, opositoras à prática (como causa do comportamento) ou, ainda, afirmar que as habilidades são, por elas mesmas, uma forma de desenvolver ou adquirir prática. Além disso, pesquisadores se questionaram também sobre a estruturação das habilidades, ou seja, se existiria um único fator geral presente em todas as habilidades, ou se existiriam vários fatores.

Através da revisão de trabalhos relacionados ao tema, Krutetskii (1976) verificou que alguns autores, como Stone (1908, citado por Krutetskii, 1976) e Courtis (1909, citado por Krutetskii, 1976), revelaram a presença de vários fatores de inteligência, no desenvolvimento da habilidade em Aritmética. Thürstone (1938, citado por Primi e Almeida, 2000) , desenvolveu seus trabalhos nas décadas de vinte e trinta, mostrando a existência de um grupo de aptidões diferentes e diversas, tendo extraído aproximadamente 12 fatores, a partir de um grupo de 56 testes, tendo elaborado a Teoria das Aptidões Primárias. Essa teoria se opôs à Lei da Unicidade Universal da Função Intelectual de Spearman, de 1904, que colocava um único fator geral de inteligência – o fator g (Super e Bohn, 1972; Cooper, 1999).

Os dados analisados por Krutetskii (1976) foram coletados através da aplicação individual de 26 provas, tendo como sujeitos crianças de escolas dos arredores de Moscou, entre os anos de 1955 e 1966. Os resultados foram analisados qualitativa e quantitativamente, sendo comparados através da análise fatorial. As provas usadas por Krutetskii (1976) foram divididas em séries, com 28 conjuntos de problemas que diferem em dificuldade e foram planejadas para verificar um ou mais componentes da habilidade matemática. A cada conjunto de provas analisadas separadamente, um "Fator geral" foi separado, demostrando a existência de habilidades específicas para cada conjunto de provas.

Krutetskii (1976) discutiu se as habilidades seriam inatas ou adquiridas. Essa teoria diferenciou-se das demais teorias soviéticas sobre a crença, da maioria dos psicólogos soviéticos, de que fatores sociais seriam decisivos no desenvolvimento das habilidades, e que se opunham à idéia de "habilidade inata". Krutetskii (1976) aceitou os fatores hereditários e as diferenças individuais, acreditando que "se cada um possuísse o mesmo potencial para o desenvolvimento em todas as direções e para a realização de qualquer atividade, não teria sentido algum discutir habilidades" (p. 3).

Esse autor apurou não existir um limite exato entre o que seria inato e adquirido na formação das habilidades, apenas admitiu que uma inclinação para a habilidade é inata, ou seja, que existem certas características psicológicas e anatômicas do cérebro e sistema nervoso que permitem o desenvolvimento mais fácil de determinadas habilidades. As inclinações não determinariam o conteúdo ou o nível de desenvolvimento das habilidades, mas teriam poder de complicar ou facilitar esse desenvolvimento, além de não serem suficientes por si mesmas para determinar uma alta realização. A importância das inclinações, na composição das habilidades, pode ser percebida na seguinte passagem:

> "Somente quando inclinações fortes estão presentes, as habilidades podem ser desenvolvidas (1) mais rapidamente, mesmo sob circunstâncias desfavoráveis de vida, e (2) a fim de que um nível muito alto de desenvolvimento seja atingido" (Krutetskii, 1976, p. 66).

Krutetskii (1976) definiu por habilidade como "as qualidades internas de uma pessoa que permitem a realização de uma atividade definida" (Krutetskii, 1976, p. 74-75). As habilidades incluiriam aspectos individuais dos processos mentais como percepção, atenção, memória, imaginação, pensamento ou solução de problemas, etc. E para a solução de um determinado problema matemático é necessário um conjunto de habilidades, por exemplo, a presença isolada de uma habilidade verbal não é garantia de sucesso na solução de um problema matemático de enunciado verbal, sendo também necessário um componente matemático (Brito, Fini e Garcia, 1994).

Krutetskii (1976) definiu a habilidade para aprender Matemática como:

"Característica psicológica individual (primeiramente características da atividade mental) que respondem aos requerimentos da atividade matemática escolar e que influencia, sendo todas as outras condições equivalentes, o sucesso no domínio criativo da Matemática como um assunto escolar – em particular, uma relativa rapidez, facilidade e domínio profundo do conhecimento, destrezas e hábitos em Matemática" (Krutetskii, 1976, p. 75).

As habilidades também não são os únicos fatores necessários para um bom desempenho em uma determinada atividade. A essa característica deu-se o nome de prontidão, conjunto de condições psíquicas que permitem essa execução com sucesso. Tais condições estão dispostas na Figura 1:

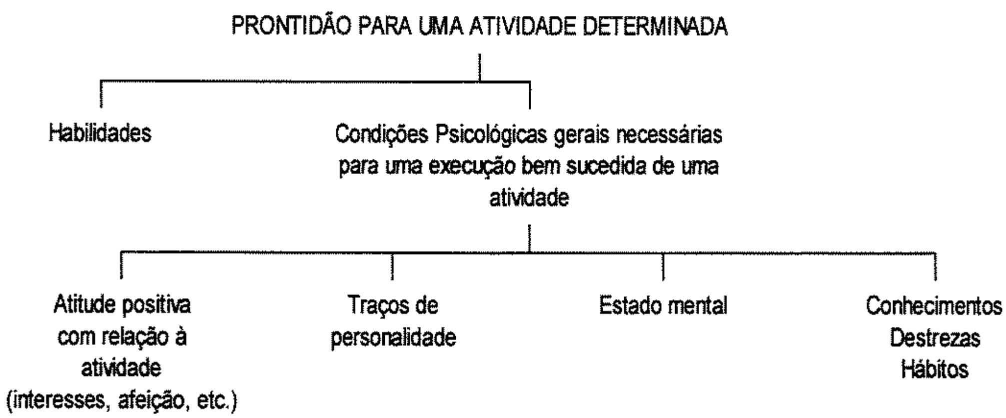


Figura 1: Relação entre a prontidão, as habilidades e as condições psicológicas gerais necessárias para o desempenho de uma atividade (Krutetskii, 1976, traduzido e adaptado por Garcia, 1996)

Na Figura 1, vemos que a prontidão supõe as habilidades e um conjunto de condições necessárias à execução de uma tarefa. Dentre essas condições, encontram-se conhecimento, destrezas e hábitos, os quais podem ser adquiridos, ao passo que as habilidades são desenvolvidas. E, enquanto estas são desenvolvidas, esses três fatores são adquiridos com maior facilidade. Porém, o fato de uma pessoa dominar informação, destrezas e hábitos não é determinado somente pela habilidade. O conteúdo, os métodos de instrução e a relação do assunto da escola com os alunos são importantes. Ou seja, o progresso lento de um aluno não é um índice de baixa habilidade. Condições iguais, exercícios idênticos e métodos idênticos podem levar a resultados diferentes devido às diferentes habilidades dos alunos. De acordo com Krutetskii (1976), não existe a incapacidade absoluta em Matemática. Uma incapacidade relativa significa que os alunos apresentam algumas dificuldades em relação a essa disciplina, relativas tanto à rapidez quanto ao nível alcançado (Krutetskii, 1961). De forma mais clara, as habilidades referem-se aos traços psicológicos da pessoa, enquanto que destrezas e hábitos referem-se às características da atividade; além disso, as habilidades são formações mais estáveis e, por isso, mudam lentamente e com mais dificuldade.

As diferenças individuais são os pressupostos básicos para que se compreenda a existência de indivíduos mais capazes e menos capazes, pois segundo Budarnyi e Kolmogorov (1963, citados por Krutetskii, 1976), não existem pessoas totalmente incapazes; a maioria dos indivíduos, mesmo os pouco capazes, conseguem dominar um conteúdo, mas suas potencialidades são diferentes. Tais aspectos aparecem na introdução do livro "The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren", de Krutetskii (1976), quando os editores apontaram que, para o referido autor, "todo aluno tem habilidade potencial em algum campo de empenho, mas não existe razão para afirmar que seu potencial é igual em todas as áreas ou que a instrução não possa alterar o perfil de habilidades de um sujeito" (p. xiii). Também é destacada, pelos editores, a definição dada por Krutetskii para o conceito de habilidade que seria "um traço pessoal que torna alguém capaz de desempenhar uma determinada tarefa rapidamente e bem, em contraste com o hábito ou destreza, que é característica da atividade do indivíduo" (p. xiii).

As relações entre habilidade, instrução e desempenho têm sido foco de discussão em outras teorias. Carroll (1983) definiu uma habilidade cognitiva como "uma ou mais características não-efêmeras de um indivíduo que determina o nível do desempenho do indivíduo em uma prova cognitiva" (Carroll, 1983, p. 4), sendo que essa prova "cognitiva" permite avaliar o processamento de informação, buscada na memória e/ou derivada de experiências prévias. Essa prova requer ainda habilidades cognitivas para sua execução.

Uma característica é chamada de não-efêmera quando se refere ao fato de que ela pode mudar, mas muito lentamente, e essas mudanças só podem ser notadas com o passar dos meses ou até dos anos. Essas alterações podem ser provocadas através de instrução e treinamento, porém é necessário ressaltar que essa é uma tarefa difícil e que existe um limite para que tais mudanças ocorram.

Para o referido autor, um fator importante no estudo das habilidades é o empenho do sujeito durante a execução da atividade, que deve ser máximo, sendo que as características da prova também devem ser consideradas, ou seja, se todos os itens das provas são muito semelhantes, isto geralmente indica que um número reduzido de habilidades está sendo requerido na prova (Carroll, 1983).

O modelo proposto por Carroll (1983) pontuou que a habilidade contribui em maior ou menor intensidade para o sucesso no aprendizado. A formação da habilidade pode apresentar uma parte inata ou ser desenvolvida durante as experiências do sujeito, em outras palavras, que tanto o fator constitucional do indivíduo, como os fatores ambientais a que ele está exposto, influenciam no desenvolvimento (Carroll, 1983). E, segundo esse autor, a percepção visual seria a "habilidade de gerar, reter e manipular imagens visuais abstratas" (Carroll, 1993, citado por Primi e Almeida, 2000).

Segundo Garcia (1995), a teoria de Krutetskii foi elaborada a partir das seguintes suposições sobre as habilidades matemáticas: (1) uma habilidade é voltada para uma atividade específica. A habilidade matemática deve manifestar-se nas atividades matemáticas; (2) uma habilidade é um conceito dinâmico, pois está em constante desenvolvimento; as habilidades matemáticas são formadas e desenvolvidas durante a realização de atividades adequadas; (3) há períodos mais favoráveis ao desenvolvimento das habilidades, e estes podem ser provisórios ou transitórios; (4) o progresso na habilidade e o sucesso na execução de uma atividade dependem de um conjunto de habilidades; (5) a alta realização em uma atividade pode estar condicionada a diferentes combinações de habilidades; (6) a deficiência em uma habilidade pode ser compensada pelo sucesso em outra, dentro de algum limite.

O tempo de execução de uma atividade não é um fator que apresente relação direta com a habilidade, isto é, se o sujeito for considerado lento não significa que não possua a habilidade em questão, apenas que é menos capaz em relação à habilidade tratada. Estes se lembram de detalhes insuficientes ou ainda insignificantes dos problemas, enquanto os sujeitos mais capazes generalizam o conteúdo matemático mais rápida e facilmente, através de soluções mais elegantes e sucintas, podendo inverter a solução e mudar para outros métodos com maior facilidade.

Em sua revisão da literatura, Krutetskii (1976) afirmou que os autores revistos por ele classificavam as habilidades como uma ***habilidade escolar*** — para trabalhar e reproduzir informações matemáticas, desenvolvida em cursos e através da prática — ou uma ***habilidade criativa*** — no sentido de que produz novas informações significativas para a humanidade, criando algo independente do que já existe socialmente. Krutetskii (1976) se concentrou em estudar uma habilidade escolar também criativa, atentando para características pessoais da habilidade. Para ele, a criatividade é uma formação inata, cujo ambiente pode favorecer sua manifestação e seu desenvolvimento.

Krutetskii (1976) dividiu os sujeitos considerados mais capazes em três grupos, segundo as relações entre habilidades lógico-verbais e viso-pictóricas, estabelecendo a existência de três tipos de mentes matemáticas[4]: ***Analítica***, com predominância de componentes lógico-verbais; ***Geométrica***, com predominância de componentes viso-figurativos; e ***Harmônica***, que se refere a uma combinação das duas características anteriores. As pesquisas mostraram uma relação entre o sucesso, em Álgebra, dos indivíduos do tipo analítico e o sucesso em Geometria dentre os de tipo geométrico. Porém esse fato não implicava, segundo o referido autor, que sujeitos do tipo geométrico fossem habilidosos somente em atividades com conceitos geométricos, e o mesmo aconteceria com os sujeitos do tipo analítico. O que existiria, de fato, seria uma predominância na estratégia escolhida pelos diferentes sujeitos para solução dos problemas.

Um dos componentes mais importantes, considerado imprescindível a um indivíduo "geometricamente" capaz, é o domínio dos conceitos espaciais. Contudo, um indivíduo hábil em "ver" formas espaciais não terá garantido seu desenvolvimento geométrico, se a isso não for aliada a habilidade de raciocínio lógico. Assim, de acordo com Hoffer (1981), um bom curso de Geometria precisaria fornecer experiências adequadas para desenvolver os dois lados do cérebro, pois um lado tem funções mais analíticas e lógicas e o outro, mais funções espaciais e holísticas, o que nortearia a hipótese de que homens e mulheres apresentem diferenças cerebrais fisiológicas. O balanço entre habilidade espacial e lógica é geralmente um aspecto importante para o desempenho em atividades geométricas (Battista, 1990).

Krutetskii (1976) fez uma revisão da literatura referente às diferenças de gênero e citou o trabalho de Cameron (1925, citado por Krutetskii, 1976), que estudou as aptidões em relação aos conceitos espaciais e verificou que estas eram mais desenvolvidas nos meninos. Esta autora atribuiu a instrução e a prática como responsáveis pela variação,

[4] Os distintos tipos de mentes matemáticas são diferentes formações das estruturas das habilidades matemáticas, cujos sujeitos apresentam diferenças na forma como alcançam o sucesso na execução da atividade matemática.

porém, mesmo quando meninos e meninas eram expostos a essas mesmas condições, essa diferença diminuía, mas os sujeitos do gênero masculino ainda mantinham sua superioridade em imaginar formas mais complexas.

As séries de atividades matemáticas propostas por Krutetskii (1976) apresentam vários problemas, sobre vários conteúdos, estando apresentados de diferentes maneiras, contendo, por exemplo, problemas com enunciado verbal, problemas com informações incompletas ou em excesso, enunciados figurativos, etc. Na próxima sessão, foram discutidas várias considerações sobre solução de problemas, e, mais especificamente, os matemáticos.

Solução de Problemas

Krutetskii (1976), ao desenvolver sua teoria a respeito das habilidades matemáticas, estruturou a solução de problemas em três etapas: obtenção da informação matemática, processamento da informação matemática e retenção da informação matemática. Na realidade, muitos outros autores tais como Dewey (1910), Wallas (1926), Gagné (1983) e Mayer (1992), (citados por Brito, material não publicado), Polya (1945, citado por Echeverría e Pozo, 1998), Bransford e Stein (1993), Hayes (1989) e Sternberg (1986), (citados por Sternberg, 2000), também dividiram a atividade cognitiva de solução de problemas em passos, facilitando o entendimento sobre tais processos e a pesquisa nessa área.

A Psicologia Cognitiva, na fundamentação teórica do método da solução de problemas, trata esse evento em um conjunto de processos mentais internos mais elevados, com o objetivo de compreender a natureza da inteligência humana (Anderson, 1995), ou seja, como as pessoas captam, armazenam, transmitem e manipulam informações (Gardner, 1996). Para Sternberg (1992, p. 50) "a solução de problemas é uma habilidade cognitiva complexa que caracteriza uma das atividades humanas mais inteligentes".

Segundo Neisser (1967, citado por Pfromm Neto, 1987), a solução de problemas é um dos aspectos da cognição, pois refere-se a todos os processos por meio dos quais a entrada sensorial é transformada, reduzida, elaborada, armazenada, recuperada, usada, etc.

Klausmeier (1977) afirmou que solucionar problemas torna as pessoas capazes tanto de se adaptar ao ambiente como também de mudar parte dele.

Uma situação é considerada um problema quando se refere a "uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução" (Lester, 1983, citado por Echeverría e Pozo, 1988, p. 15). Em outras palavras, está caracterizado um problema quando a resposta não pode ser rapidamente recuperada da memória (Sternberg, 2000).

Segundo esses autores, em relação aos processos implícitos durante a solução de problemas, existem dois enfoques. O primeiro trata a solução de problemas como uma habilidade geral, sendo que a solução de problemas e de exercícios apresentam diferenças mas também similaridades, no sentido de que exigem uma série de capacidades de raciocínio e de habilidades comuns que se adaptam a cada situação. E, mais ainda, existiria uma série de procedimentos e habilidades que seriam comuns a todos os problemas, independentemente do conteúdo a que se reportam, como, por exemplo, prestar atenção, recordar, relacionar entre si os elementos do problema, etc.

Segundo essa concepção, o sucesso na solução de um problema depende de certos passos que devem ser seguidos e que seriam praticamente invariantes. Além da disposição para a solução, os planos, metas e submetas que o aluno estabelece (ou deveria estabelecer) em busca da solução – as estratégias ou procedimentos heurísticos e os procedimentos de transformação da informação que essas estratégias requerem, regras, algoritmos e operações – são importantes para a obtenção da solução correta. E mais, as habilidades gerais individuais são importantes no sentido de proporcionar uma aplicação adequada desses processos, podendo ser motivadas por diferenças na aprendizagem.

O segundo enfoque trata o processo de solução de problemas de um conteúdo específico, considerando as diferenças de desempenho entre especialistas e novatos, o que tem produzido pesquisas relevantes na área. Em outras palavras, "a eficiência na solução de um problema não depende da disposição de estratégias ou habilidades gerais e transferíveis, válidas para qualquer caso, e sim dos conhecimentos específicos úteis para solucionar esse problema" (Echeverría e Pozo, 1988, p. 30).

O estudo das diferenças de desempenho de novatos e especialistas, durante a solução de problemas, tem os seguintes pressupostos: (1) as habilidades e estratégias de solução de problemas são específicas a um certo conteúdo, não sendo transferíveis entre as diferentes áreas; (2) as diferenças de desempenho entre esses sujeitos devem-se aos conhecimentos específicos dos especialistas e não a uma maior capacidade cognitiva geral; (3) o especialista consegue usar os recursos cognitivos de forma mais eficiente; (4) a destreza na solução de problemas é um efeito da prática; e (5) a eficiência depende, principalmente, da disponibilidade e ativação de conhecimentos conceituais da área.

Pesquisas indicam que a transferência dos conhecimentos que um indivíduo possui, para a solução de um determinado problema, também é fator importante, influenciando fortemente o desempenho nessa atividade. Mas, essa generalização não é tão simples, devido às diferenças entre os contextos cotidianos e escolares.

Segundo Echeverría (1998), a Matemática é uma das disciplinas escolares que mais requerem o uso de solução de problemas e a aplicação desse método em sala de aula é indiscutível. A relação entre as habilidades e os conteúdos matemáticos acontece no sentido de que "uma pessoa que tem sucesso no campo da Matemática é uma pessoa que sabe raciocinar e pensar de maneira adequada. E, no sentido inverso, uma pessoa que sabe raciocinar aprenderá facilmente o conhecimento matemático" (Echeverría, 1998, p. 44), e isso implica no desenvolvimento da capacidade geral de raciocínio do indivíduo.

O tratamento sobre o processo de ensino-aprendizagem de solução de problemas matemáticos que Echeverría (1998) discutiu, incluiu as definições de Polya (1945, citado por Echeverría, 1998) sobre a seqüência de solução (compreensão, concepção de um plano, execução do plano e exame da solução alcançada) e também a seqüência proposta por Mayer (1983, citado por Echeverría, 1998), tradução e solução do problema. Incorpora principalmente a idéia de que, apesar de todo o esforço, a utilização dessas regras não é suficiente. A tradução do problema requer a passagem da linguagem corrente para uma linguagem matemática e a solução requer a utilização de estratégia de fatos, técnicas e habilidades para trabalhar com os conceitos matemáticos.

Echeverría (1988) destacou ainda o papel extremamente importante do professor pois é ele quem irá auxiliar o desenvolvimento, nos alunos, de estratégias e habilidades que resultem em uma aprendizagem significativa. Outro elemento considerado de grande importância foi a análise dos erros que os alunos cometem, sendo estes entendidos como dados da análise das dificuldades de procedimento ou de compreensão conceitual. Segundo Resnick e Ford (1990), Thorndike foi o primeiro psicólogo a apontar que "a perfeição se alcança com a prática. Os exercícios e a prática servem para melhorar a velocidade e a precisão, que são critérios amplamente aceitos para medir a destreza em Cálculo" (p. 25).

Nesse sentido, a Secretaria de Educação Fundamental (1997a, p. 24 e 45), através dos Parâmetros Curriculares Nacionais, apresenta uma proposta de ensino centrado na solução de problemas, com o objetivo de facilitar a ocorrência da aprendizagem significativa, conforme mostrado a seguir:

> "As orientações sobre a abordagem de conceitos, idéias e métodos sob a perspectiva de resolução de problemas ainda são bastante desconhecidos; outras vezes a resolução de problemas tem sido incorporada como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagens de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução conhecidas pelos alunos (...) é necessário desenvolver habilidades que permitam por à prova os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos, para obter a solução. Nessa forma de trabalho, o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução"

Primeiramente, dentro de sala de aula, professores não usam uma "abordagem[5]" específica, usualmente trabalham com o "ensino" de conceitos, idéias e métodos. Além disso, o uso da palavra "resolução" parece equivocado, pois toda a literatura em língua inglesa utiliza a palavra "solution", ou seja, a resolução pode ser interpretada como uma repetição das soluções dos mesmos problemas. E finalmente, solução de problemas, como método de ensino, pode ser desconhecido por alguns profissionais, mas existe muita pesquisa a respeito na área da Psicologia, tanto dentro como fora do país, principalmente sobre conteúdos matemáticos, sendo que muitos professores já trabalham dentro dessa linha.

É muito válida essa nova forma de compreensão dos educadores sobre a importância da solução do problema contraposto à resposta. Realmente, muitos profissionais só atentavam para o resultado, esquecendo que a estratégia da solução é

---

[5] Abordagem é *"um agrupamento generalizado de idéias que são utilizadas por teóricos dentro de uma disciplina em particular"* (Anderson, 1995, p. 32).

também muito importante. Todavia, é preciso cautela, pois a resposta também tem sua importância quando o sujeito precisa interpretar se aqueles resultados estão de acordo com o enunciado do problema.

A Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas, CENP, na publicação da Proposta Curricular para o Ensino de Matemática - 2o grau, de 1986, definiu problema como "uma situação que desafia o aluno a refletir, a levantar hipóteses, a procurar caminhos para solucioná-la, a buscar novas aplicações de conceitos e a aprofundar a compreensão dos mesmos, a exercitar a criatividade, a generalizar propriedades, a descobrir outras soluções e a discuti-las, verificando as condições para que elas sejam válidas" (p. 10). A importância do método de solução de problemas também é destacada pela Secretaria de Educação Fundamental (1999, p. 52), nos PCN's, conforme o texto a seguir:

> "Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas"

As atividades em sala de aula devem tirar proveito dos conceitos que os alunos já possuem, relacionando-os com o novo material a ser aprendido ou apresentando-o de forma diferenciada (Klausmeier, 1977), através do uso de seus atributos definidores, de exemplos e contra-exemplos. Outro aspecto importante a ser lembrado é que os alunos devem desenvolver não uma, mas várias estratégias de enfrentamento, que possibilitarão a eles um desenvolvimento cognitivo adequado, sendo que cada indivíduo, na classe, poderá escolher as formas de solução que julgar mais adequadas e mais simples.

O entendimento do algoritmo das operações fundamentais na Matemática, sem uma relação com as situações-problema, passou a exigir que o ensino fosse fundamentado no método de solução de problemas. O ensino de Matemática nas escolas é, conforme pode ser observado freqüentemente em disciplinas de estágios, baseado em aulas expositivas sobre os conceitos, seguidas de aulas de exercícios e solução de "problemas-tipo", o que proporciona alguns hábitos, destrezas e conhecimentos relacionados aos conceitos e princípios adquiridos, porém dificulta o desenvolvimento das habilidades matemáticas, grande responsável pelo êxito na solução de problemas.

Segundo a Secretaria de Educação Fundamental (1999), a aula expositiva é uma técnica cansativa e desinteressante. De fato, ela deve ser reservada a estudantes mais velhos, pois requer de alunos cuja capacidade ainda é limitada um foco de atenção cuja disponibilidade nem sempre perdura por todo o período das aulas. De acordo com Sternberg (2000, p. 78), "a atenção é o fenômeno pelo qual processamos ativamente uma quantidade limitada de informações do enorme montante de informações disponíveis através de nossos sentidos, de nossas memórias armazenadas e de outros processos cognitivos". Além disso, segundo este autor, existem outros elementos de dispersão que interferem negativamente no foco de atenção, dentre eles a ansiedade, o cansaço, a sonolência, o desinteresse na tarefa, o grau de dificuldade da tarefa, a prática, a habilidade em coordenar uma ou mais tarefas simultaneamente e o grau de atenção requerido. Por essas razões, as aulas expositivas nem sempre são tão eficientes quanto esperam os professores, embora sejam de utilização mais fácil.

Outro importante processo cognitivo é a representação mental e a percepção de figuras, conceitos desenvolvidos no próximo item.

A Percepção e a Representação Mental

O ser humano possui sentidos utilizados em todas as atividades do dia-a-dia e o sentido visual é de grande importância já que proporciona, entre outras coisas, a discriminação de objetos semelhantes ou diferentes, interdependentes e significativos. Esses objetos podem ser percebidos, mas também podem ser lembrados através de palavras ou associações, ou seja, a mente pode contemplar, criar e modificar coisas que estão ausentes através da utilização de estruturas mentais, com o objetivo de executar representações do conhecimento.

A Psicologia tem estudado os fatores que permeiam os fenômenos visuais, mais profundamente em alguns períodos, e menos em outros. O filósofo grego Aristóteles (384-322 a.C.) afirmava que o pensamento era impossível sem imagens. Já o psicólogo Wundt, na Alemanha durante a segunda metade do século XIX, realizou experiências utilizando o método de introspecção, que possibilitou perceber a existência de alguns pensamentos sem imagens, ou seja, elas não seriam a única espécie de representação interna utilizada, porque as imagens mentais poderiam ser eliminadas se o material fosse muito familiar ou se a informação verbal fosse bem adquirida anteriormente.

Com o surgimento do behaviorismo, o estudo sobre imagens e representações foi deixado de lado, já que essa concepção não tinha por meta o estudo de eventos internos, como o pensamento. Esses estudos só aumentaram de freqüência na década de setenta.

Imagem mental é uma das formas de representação pela qual "criamos estruturas mentais que representam coisas que, presentemente, não estão sendo percebidas pelos órgãos sensoriais" (Sternberg, 2000, p. 180). Este autor dividiu a representação mental em dois sistemas, um composto de atributos não-espaciais (cor, forma, etc) e outro composto por atributos espaciais (localização, orientação, tamanho, distância, etc). Segundo Kosslyn (1992), a imagem mental refere-se à possibilidade de criação mental com representações de objetos, pessoas e situações, mesmo na ausência do estímulo visual apropriado. As imagens mentais armazenam informações diferentemente do modo verbal, pois possibilitam a manipulação de objetos de modo muito parecido com os próprios, economizando tempo e esforço. Sternberg (2000) afirmou que a imaginação visual — representação mental do conhecimento visual — é uma das formas de imaginação mental mais estudadas pelos psicólogos cognitivos e mais relatada por pessoas leigas.

Já se sabe que a capacidade de utilizar imagens mentais não é uma capacidade isolada, ou seja, refere-se a um conjunto de capacidades como a capacidade para fazer rotações mentais de figuras, a capacidade para inspecioná-las, a capacidade para manter na mente muitas partes de uma imagem. Isso implica no fato de uma pessoa poder ser mais capaz em um ou mais desses componentes e fraca em outros (Kosslyn, 1992).

Sternberg (2000) definiu visualização espacial como uma capacidade que permite a manipulação mental de imagens de objetos e orientação do organismo no meio ambiente.

A capacidade de formação de imagens compartilha alguns dos mecanismos cerebrais usados na percepção visual (uma das modalidades perceptivas, junto da percepção auditiva) e, portanto, pode interferir na própria percepção. Houve um avanço nos estudos a respeito da percepção e da imagem mental, nas três últimas décadas, sendo que as pesquisas caminham para diferenciar esses dois conceitos em algum aspecto, apesar destes serem eventos muito similares pois usam as mesmas partes do cérebro.

Percepção, para Sternberg (2000), refere-se ao "conjunto de processos pelos quais reconhecemos, organizamos e entendemos as sensações recebidas dos estímulos ambientais" (p. 110), o que envolve diversos fenômenos psicológicos. Por exemplo, as ilusões perceptivas sugerem que nem tudo o que é percebido pelos órgãos sensoriais é necessariamente igual ao que a mente pode compreender:

> "Em um estudo correto de Psicologia, (...) devemos aprender a fazer a importantíssima distinção entre sensações e percepções, entre o mero material sensorial e o conjunto de outros ingredientes com os quais esse material se impregnou, em conseqüência dos processos de aprendizagem" (Köhler, 1980, p.45).

Além dos aspectos anteriormente mencionados, muitos estudos sobre percepção exploraram as diferenças de gênero. Fennema e Carpenter (1981) acreditavam que essa diferença poderia ser atribuída à visualização espacial. Battista (1990) estudou a execução de atividades matemáticas que envolviam conceitos geométricos, e fez uma revisão da literatura sobre uma série de estudos que indicam escores do gênero masculino muito mais altos que os do gênero feminino. Essas diferenças poderiam ser atribuídas ao modo como as funções cerebrais, nos dois hemisférios (já que o esquerdo está relacionado ao pensamento lógico e o direito ao pensamento espacial) estão distribuídas em homens e mulheres, pesquisa essa na área da fisiologia (Springer e Deutsch, 1981, citados por Battista, 1990).

Del Grande (1990) procurou definir em seus estudos sete tipos de percepção, todas relacionadas, mas ao mesmo tempo distintas em algum aspecto particular:

- ***Percepção Espacial***: descrita como a capacidade de coordenar o movimento do corpo com a visão, a coordenação motora dos olhos, estando relacionada à atividades que envolvam o uso de materiais manipulativos. Um sujeito fraco em percepção espacial terá dificuldades em perceber idéias e conceitos com vários níveis de abstração. Quando essas atividades são habituais, quando a coordenação viso-motora é muito requerida, a criança torna-se hábil em se concentrar nas explicações do professor, prestando total atenção ao que está sendo exposto. Alguns pesquisadores usaram essa definição também como visualização espacial ou senso espacial.

- ***Percepção de figura-fundo:*** possibilita ao indivíduo identificar componentes específicos em uma situação que envolva a percepção de figuras contra um fundo, onde as formas parecem estar 'escondidas'. Requer a capacidade de distinguir uma figura no primeiro plano.
- ***Constância de percepção:*** também conhecida por constância de forma, refere-se à forma e tamanho dos objetos. Na Geometria, pode ser entendida também como o reconhecimento de certas figuras apresentadas com formas, tamanhos, sombreamentos, texturas e posições no espaço diferentes. Del Grande citou como exemplo: quando se vê um campo de futebol, dependendo do ponto de vista, pode-se ter um paralelogramo ou um trapézio, mas o sujeito com constância mantém a imagem mental da forma retangular. Sternberg (2000, p. 115), de modo semelhante, referiu-se à constância perceptiva como uma mudança da sensação em relação ao objeto, permanecendo a percepção da mesma maneira, isto é, a "percepção continua constante, ainda que a sensação se altere".
- ***Percepção de posição no espaço:*** é a capacidade de relacionar o mesmo objeto no espaço em diferentes posições. O sujeito com tal capacidade é capaz de perceber e executar, mentalmente, reversibilidades e rotações de figuras geométricas.
- ***Percepção de relações espaciais:*** essa capacidade possibilita ver dois ou mais objetos em relação a um deles ou em relação a cada um dos outros.
- ***Discriminação visual:*** capacidade que permite a identificação de similaridades e diferenças entre os objetos. Diferentemente das duas definições anteriores, essa capacidade independe da posição das formas no espaço. Inclui atividades como classificação e ordenação de figuras geométricas, segundo algum atributo selecionado.
- ***Memória Visual:*** capacidade que permite recordar acuradamente objetos que estejam fora do alcance visual do sujeito. Possibilita também a recordação de uma série de informações relevantes. Dada a quantidade de informações, o sujeito necessita recorrer à memória de longo prazo, utilizando a abstração e o pensamento simbólico.

É preciso citar ainda que, apesar das definições mostrarem percepções específicas para determinadas atividades, o desenvolvimento de uma capacidade interfere positiva e diretamente no desenvolvimento das demais, pois essas diferentes percepções compõem as habilidades mais amplas, e uma atividade requer um conjunto de habilidades para a sua execução bem sucedida (Garcia, 1995)

Um estudo feito por Kalil e outros (1980, citado por Sternberg, 2000) sobre rotação mental, confirmou a hipótese referente a rapidez na execução de atividades que requeriam tais processos. De acordo com eles, as pessoas mais velhas executam rotações mais rapidamente, pois, diferentemente de crianças e adolescentes, eles trabalham mentalmente com componentes do objeto que facilitam a tarefa. A rotação de objetos já conhecidos é mais fácil (a execução é mais rápida), pois esses padrões podem ser ativados na memória, sem que seja necessário formar uma nova representação, que é o que acontece com os padrões desconhecidos.

Lean e Clements (1981) afirmaram que os sujeitos que possuem habilidades espaciais pouco desenvolvidas apresentam dificuldades em atividades geométricas que exigem translações, reflexões, rotações, dilatações e expansões. Segundo eles, a maioria das pesquisas que trabalham com conceitos como visualização, estão, em sua maioria, referindo-se à habilidade espacial, independentemente da fundamentação teórica adotada no trabalho. Em conseqüência, "muito freqüentemente a um único conceito tem sido dado diferentes nomes, e diferentes conceitos aparecem com nome similar" (Gorgorió, 1998, p. 208). "É impossível estabelecer uma única definição de habilidade espacial" (Bishop, 1980).

Gorgorió (1998) definiu habilidade para o processamento espacial como necessária para completar a combinação de operações mentais para imaginar objetos espaciais, relações e transformações e decodificá-las visualmente.

Os estudos acerca das habilidades visuais podem ser fundamentados em diferentes teorias. A Psicologia da Gestalt tratava a percepção de uma forma não como a simples soma de partes, mas como cada parte que se reestrutura de maneira organizada para formar um todo novo (Köhler, 1980, p. 157), sendo que essa organização é conseqüência "das características dos fatos em suas relações uns com os outros". Existem princípios gestálticos da percepção da forma (percepção de figura-fundo, proximidade, similaridade, acabamento, continuidade e simetria) que auxiliam a compreensão da maneira como dois ou mais objetos tendem a ser percebidos visualmente.

Essa é uma área de estudo da Psicologia que apresenta um número grande de definições para um mesmo constructo, sendo todas elas muito parecidas, exigindo o estabelecimento de relações entre os vários conceitos que compõem essa habilidade.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A história da Psicologia mostra que os psicólogos desenvolveram, há longo tempo, estudos relativos às habilidades relacionadas à Geometria e desenvolvimento de conceitos geométricos, mas o interesse de educadores matemáticos por essa área é mais recente.

A partir dos pressupostos de Van Hiele sobre a experiência como um dos aspectos relevantes para o desenvolvimento do pensamento em Geometria, Usiskin (1982) observou que, entre os sujeitos de sua pesquisa, estudantes do ensino médio, apenas 52% deles havia freqüentado um semestre de Geometria, índice este considerado baixo pelo referido autor. Esses alunos foram submetidos a uma prova baseada nos níveis de Van Hiele e foi verificado que, em uma questão elementar sobre triângulo, 63% das respostas estavam corretas. Em outra questão sobre quadrados, quando seus lados estavam posicionados vertical e horizontalmente, foram verificados 90% de acertos contra 80% quando os lados eram inclinados. O autor inferiu que os outros 48% dos sujeitos, que não fizeram o curso de Geometria, possivelmente não conheciam quase nada desse conteúdo. Em um outro estudo (Usiskin, 1994) teve como sujeitos alunos matriculados em 99 turmas de ensino médio, das quais 85 haviam tido aulas sobre demonstrações, 28% dos estudantes não conseguiram fazer a demonstração sobre congruência de triângulos, tarefa considerada muito simples. Além disso, apenas 31% dos estudantes foram considerados aptos na demonstração de teoremas e proposições. Foi encontrada relação entre o conhecimento de Geometria simples no início do ano e o desempenho em demonstrações no final do ano. Estudos como esses indicam que a solução de problemas geométricos é um tópico difícil para os alunos, mesmo para alguns daqueles considerados preparados através de cursos introdutórios. Talvez seja necessária uma reflexão sobre os métodos de ensino dos conceitos geométricos ou sobre os fatores que interferem negativamente no processo de aprendizagem dos alunos, impedindo um bom desempenho em provas, mesmo quando os alunos são considerados preparados.

Nasser (1992), baseada na teoria de Van Hiele, usou dois grupos, experimental e controle, para investigar as dificuldades em Geometria apresentadas por alunos secundaristas de quatro escolas estaduais do Rio de Janeiro. Estudou o desempenho de

83 sujeitos (entre 14 e 16 anos) que haviam tido aulas anteriormente sobre congruência de figuras planas e 317 de 7ª série (entre 13 e 15 anos) que ainda não haviam tido aulas sobre tais conceitos. O procedimento consistiu em testar os sujeitos no início do ano letivo para verificar o nível de formação de conceitos em que os alunos poderiam ser enquadrados, havendo-se constatado que metade deles estava no nível mais baixo. Após o pré-teste, durante seis meses os sujeitos foram submetidos a atividades cujo objetivo era auxiliar os alunos a formar os conceitos em níveis mais complexos. As transformações foram usadas, em grande parte do trabalho, para justificar a congruência. No pós-teste, o grupo experimental (nível 1) apresentou uma melhoria no desempenho em todas as categorias e o grupo experimental (nível 2) apresentou uma performance satisfatória nas provas formais, nas informais e em definições. Isso mostrou que a teoria de Van Hiele, que classifica os alunos em um determinado nível, pode ser eficiente em sala de aula como metodologia de ensino, possibilitando a esses alunos atingir um nível de formação de conceitos mais elevado.

Em outro estudo efetuado por Rubinstein (1994), em um uma escola municipal de ensino fundamental do Rio de Janeiro, 36 alunos de uma oitava série foram os sujeitos de uma pesquisa na qual foram avaliados os níveis de formação de conceitos em que os mesmos se encontravam, de acordo com o desempenho em uma prova. O objetivo era verificar se a teoria de Van Hiele se mostrava eficiente para uso em sala de aula, ou seja, se após a intervenção didática, os alunos submetidos a uma outra prova baseada na mesma teoria teriam atingido um nível de formação de conceitos geométricos mais elevado. Os resultados mostraram que os sujeitos que se encontravam no nível 1 obtiveram um melhor desempenho após a intervenção, classificando-se em nível 2. Uma parte dos sujeitos que se encontrava no nível 2 foi capaz de efetuar uma dedução simples sobre soma dos ângulos internos de um paralelogramo através de outra dedução conhecida enquanto os alunos que se encontravam no nível 3 executaram uma dedução simples sem nenhum suporte.

O ensino de Geometria também se estende como assunto em trabalhos de outra natureza, como o também fundamentado na teoria de Van Hiele e na Epistemologia Genética de Piaget, desenvolvido por Lujan (1997), que teve por objetivo investigar, entre outros fatores, como as crianças lidavam com materiais manipulativos e se o conhecimento adquirido através dessas atividades permanecia retido por algum tempo. Os grupos experimental e controle foram compostos por 44 crianças da primeira série do primeiro grau de uma escola pública do Estado de São Paulo, submetidos a um pré-teste e um pós-teste, onde apenas as crianças pertencentes ao grupo experimental lidaram com o material através de uma intervenção pedagógica. Os dados coletados indicaram que as crianças que passaram pela intervenção pedagógica apresentaram um melhor desempenho que os sujeitos do grupo controle.

Baseado no modelo de desenvolvimento do pensamento em Geometria de Van Hiele e no modelo de formação de conceitos de Klausmeier, Pirola (1995) investigou a formação dos conceitos de triângulo e paralelogramo em 137 alunos de uma escola pública do estado de São Paulo, matriculados de 5ª a 8ª séries. O objetivo era investigar se existia relação entre a série e a capacidade de identificar atributos definidores, exemplos e não-exemplos, através da aplicação e da verificação do desempenho em provas que requeriam tais aspectos. Os dados coletados não indicaram que os alunos matriculados nas séries mais adiantadas possuíssem conceitos formados mais completamente que os de séries menos adiantadas, pois a ordem de classificação foi 7ª, 6ª, 8ª e 5ª séries, ou seja, os alunos da sexta e sétima séries apresentaram um nível de formação de conceitos melhor que os da 8ª série.

Nelson e Klausmeier (1974) realizaram uma pesquisa sobre a aprendizagem dos conceitos de quadrilátero, triângulo, círculo e cubos, tendo como sujeitos 96 estudantes de baixa renda da quinta e oitava séries do ensino fundamental e segundo ano do ensino médio. Esses alunos foram selecionados a partir de uma escala de classificação sócio-econômica, e então, dessa população menor, foram sorteados 32 sujeitos de cada série. Os alunos eram avaliados individualmente: em uma primeira sessão descrevendo características semelhantes e distintas; em seguida, de posse de 26 cartões com oito conceitos diferentes, eles deveriam formar sete grupos distintos. Os atributos nominais e a perceptibilidade sobre semelhanças e diferenças foram considerados como critério de categorização. Com relação a isso, os alunos de baixa renda apresentaram um desempenho muito superior aos alunos de situação sócio-econômica privilegiada. Esse fato poderia revelar que o processo de ensino não está interferindo favoravelmente para uma aprendizagem significativa de conceitos, já que se supõe que alunos da classe sócio-econômica mais alta têm, geralmente, a oportunidade de um ensino de melhor qualidade.

Usando o modelo de formação de conceitos de Klausmeier em uma pesquisa que teve como sujeitos sessenta alunos da 2ª e 3ª séries do ensino médio de uma escola pública, Brito, Pirola, Scomparim de Lima, Utsumi, Alves e Mendes (1998) investigaram a formação dos conceitos de quadriláteros - quadrados, retângulos, losango e paralelogramo - com relação aos quatro níveis de formação de conceito. Uma prova do tipo lápis e papel avaliou o desempenho dos sujeitos quanto aos aspectos relevantes e irrelevantes das figuras, suas definições e propriedades, exemplos e não-exemplos. Questões referentes à construção de figuras geométricas também ofereceram espaço para uma análise qualitativa dos dados quanto à inclusão em classes (processo cognitivo). O resultado mostrou que os alunos poderiam ser incluídos no nível de reconhecimento de todas as figuras, sendo que os sujeitos da 2ª série apresentaram um melhor desempenho quando comparados aos sujeitos das outras séries.

Jaime e Gutiérrez (1995) investigaram as transformações geométricas através do conceito de isometria apresentado a estudantes americanos da 3ª à 12ª séries. Foram desenvolvidas atividades organizadas de acordo com os níveis de pensamento em Geometria de cada aluno, segundo a teoria de Van Hiele, sendo as fases de instrução também fundamentadas a partir desse enfoque teórico, utilizando-se folhas de papel, cola e tesoura, régua, compasso, desenhos de triângulos, círculos transparentes e espelhos. Eram fornecidos aos alunos recortes com figuras diversas estampadas (peixe, árvore etc., e também figuras geométricas planas), onde nenhuma figura deveria ser invariante diante de uma rotação. Por exemplo, um círculo quando rotacionado no plano não apresenta qualquer diferença na forma e orientação quando se compara as situações inicial e final. O tamanho dos recortes poderia variar segundo a idade e a habilidade dos alunos. Os sujeitos deveriam mover fisicamente as figuras e depois fazer uma colagem em folha de papel para observação dos resultados. Para os estudantes dos níveis 1 e 2, a manipulação dos objetos durante uma isometria era absolutamente necessária. Para os estudantes pertencentes ao 3º nível, a manipulação ainda era necessária, pois permitia a generalização da aprendizagem e a verificação de conjecturas um pouco mais complexas. Estudantes do nível 4 mostraram ser capazes de pensar abstratamente, porém a manipulação física auxiliava em alguns tipos de prova. Essas atividades mostraram-se muito úteis quanto ao desenvolvimento do pensamento em Geometria dos alunos pesquisados. A relevância desta pesquisa está na necessidade de se conhecerem as diferentes características dos sujeitos que se encontram em níveis diferentes, ou seja, quais são as necessidades dos indivíduos que se enquadram em um nível mais baixo de formação conceitual.

O modelo de desenvolvimento do pensamento em Geometria de Van Hiele foi utilizado como fundamentação teórica de várias pesquisas sobre conceitos geométricos. Como tal teoria descreveu os estágios de pensamento a respeito de figuras planas, Vianna (2000) estudou o conhecimento geométrico de 377 alunos das quatro séries do CEFAM (Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério), da cidade de Mogi das Cruzes, sobre figuras espaciais, tais como prismas, pirâmides, cones, cilindros e esferas, bem como a habilidade visual, verificada através de atividades de planificação de figuras tridimensionais, e também a habilidade verbal dos sujeitos, constatada através da nomeação e descrição dos objetos geométricos. Em se tratando de um curso de formação de professores para os ciclos iniciais do ensino fundamental, a maioria dos sujeitos admitiu não estar preparada para o ensino de Geometria Espacial, em outras palavras, "não conseguiram fazer uma leitura geométrica formal do material, estando em um nível de conhecimento que não lhes possibilitava formalizar relações entre as propriedades das principais figuras espaciais utilizadas" (Vianna, 2000, p. 198). Como os indivíduos foram classificados nos níveis 1 e 2 de Van Hiele, foi encontrada uma relação, evidenciada pela regressão linear, que indicava o reconhecimento da figura como um primeiro estágio, que era seguido da análise de suas propriedades e finalizava com o relacionamento dessas propriedades entre si, da maneira descrita por Van Hiele. Em relação à habilidade visual, a autora verificou que cada objeto apresentou diferentes graus de dificuldade, sendo a planificação do paralelepípedo a mais fácil. Em relação à habilidade verbal, com exceção do cubo, cole e cilindro, os outros conceitos não foram indicados como sendo de domínio dos sujeitos da pesquisa, indicando que esses indivíduos não possuíam a linguagem necessária para o entendimento das questões a respeito dos conceitos geométricos.

Outros autores desenvolveram trabalhos a respeito das habilidades presentes em atividades que envolvem o uso de conceitos geométricos. Castro, Fainguelernt e Medalha (1998) realizaram um estudo com o objetivo de verificar quais eram as habilidades básicas necessárias para o desenvolvimento do pensamento espacial, quais os fatores facilitadores e de que modo a visualização e a percepção geométrica influenciavam na construção mental de imagens. A implementação foi feita a partir de uma avaliação diagnóstica sobre figuras geométricas, sobre quais eram as dificuldades, apresentadas por professores de Matemática no ensino de Geometria Espacial e, finalmente, através de um estudo transversal com os alunos sobre os quatro níveis de Van Hiele e as destrezas citadas por Hoffer, particularmente a visual. Foi verificado que os estudantes transferiam conhecimentos de uma situação para outra, sem a necessidade de uma ilustração geométrica que fosse sugerida nas atividades, podendo trabalhar com representações dessas ilustrações para solucionar problemas.

Em um estudo com sujeitos de quinta série de uma escola particular da cidade de Campinas, Bertonha (1989) pediu aos alunos que realizassem uma atividade que requeria a utilização de sensações táteis, apelo à memória e retenção de conhecimentos para discriminar objetos tridimensionais - sólidos geométricos construídos com papel color-set, canudinhos, isopor e embalagens comerciais, jogo com cartões, figuras planas, Tangram, barbante para construção de curvas abertas ou fechadas, etc. O objetivo era verificar como se processava a aquisição de conhecimentos através da compreensão e ação sobre as informações trabalhadas, sempre dependendo do nível de pensamento no qual se encontrava o aluno. Foi observado que apesar da riqueza na discussão em sala de aula, os alunos apresentavam dificuldades em elaborar respostas por escrito, ou seja, eles não eram capazes de concluir sozinhos o próprio raciocínio. Os melhores desempenhos surgiram quanto às questões referentes aos objetos cotidianos, discriminação visual de faces de sólidos geométricos e classificação. Os desempenhos mais fracos apareceram quando as questões exigiam interpretação de enunciados que envolviam conceitos abstratos.

Oliveira (1998) que é membro do grupo de pesquisa Psicologia da Educação Matemática (PSIEM), desenvolveu um estudo comparando o desempenho de sujeitos submetidos a duas situações. Foram descritos os procedimentos utilizados por nove alunos da 6ª série durante a solução de problemas. Os sujeitos foram agrupados de três em três, de acordo com a tarefa, que consistia em solucionar problemas através do uso das peças do Tangram, do sistema computacional Tegram ou de ambos. O objetivo era identificar e discutir os componentes da percepção espacial subjacente a atividades de discriminação e composição de figuras, usando como subsídios os aspectos teóricos de Krutetskii e Del Grande. A análise dos dados mostrou que os procedimentos usados pelos sujeitos variavam de acordo com a tarefa e que mesmo nas atividades simples era exigida uma grande quantidade de componentes da percepção espacial. Esse trabalho assemelha-se ao presente quanto à adoção da teoria das habilidades matemáticas de Krutetskii e quanto ao estudo da percepção durante a solução de problemas matemáticos, porém não discutiu o nível de formação de conceitos em que cada sujeito se encontrava quando da realização do estudo.

Jalles (1997) realizou um estudo experimental exploratório com trinta crianças pré-escolares de uma escola municipal onde, durante dois meses, os grupos experimental e controle participaram de atividades lúdicas de exploração das características de um cubo. O grupo experimental recebeu instruções específicas de estratégias cognitivas. Os resultados do pré e pós-teste foram comparados, encontrando-se diferença significativa no grupo experimental masculino, evidenciando a relação entre instrução e gênero quanto ao desempenho, favorecendo principalmente este grupo masculino, tanto na análise qualitativa como na quantitativa.

Outro estudo sobre diferenças de desempenho em relação ao gênero foi desenvolvido por Fennema e Carpenter (1981), através dos resultados de uma avaliação nacional americana — National Assessment of Educational Progress — a que foram submetidos setenta mil estudantes de nove, treze e dezessete anos. Foi avaliado o desempenho em um teste com conceitos de Álgebra, Geometria, Trigonometria e Cálculo, sob os aspectos de conteúdo matemático e nível cognitivo, definidos como conhecimento, destreza, compreensão e aplicação. Foram encontradas diferenças menores entre os estudantes de 17 anos que não haviam feito o curso de Álgebra, porém essa diferença aumentava para estudantes que haviam cursado Álgebra I, aumentava mais ainda para aqueles que haviam cursado Geometria e tendia ao crescimento quando analisados os sujeitos que haviam cursado Álgebra II, registrando-se entre os meninos os desempenhos melhores. Em relação aos níveis cognitivos, a diferença tende a aumentar quanto mais alto é o nível de comparação. A análise das provas sobre conteúdos geométricos mostrou que o desempenho de meninas é significativamente inferior ao dos meninos. A justificativa apresentada pelos autores é que havia um número grande de exercícios que requeriam a habilidade de visualização espacial para a solução da questão. A conclusão geral do estudo mostrou que houve, no total da prova, uma pequena diferença entre meninos e meninas de nove e 13 anos, mas essa diferença se acentua entre os estudantes de 17 anos.

Battista (1990) investigou como a visualização espacial, o raciocínio lógico e a discrepância entre essas duas habilidades afetavam o desempenho dos alunos secundaristas americanos durante a solução de problemas geométricos. Sob a luz da teoria de Krutetskii, o pesquisador explorou também as diferenças de gênero e a influência do processo de ensino sobre as estratégias de solução das tarefas. Os sujeitos foram 75 meninos e 53 meninas de cinco classes, com dois professores de Matemática (um lecionava em três classes e o outro em duas). Os instrumentos foram provas do tipo lápis e papel, abrangendo visualização espacial, raciocínio lógico, conhecimento em Geometria e estratégia de solução de problemas geométricos. Dentre os muitos resultados, as médias no teste Purdue de visualização espacial foram de 10,15 para todo o grupo, 11,79 para os meninos e 7,83 para as meninas, diferenças essas consideradas significativas pelo pesquisador. Além disso, as habilidades de visualização espacial e de raciocínio lógico foram significativamente relacionadas tanto ao conhecimento em Geometria quanto à solução de problemas, para ambos os gêneros. A discrepância entre a habilidade viso-espacial e lógica-verbal estava positivamente correlacionada com o conhecimento em Geometria para as meninas e negativamente para os meninos. O desempenho dos meninos foi significativamente melhor que o das meninas, indicando que os sujeitos do gênero masculino e feminino possuíam esses componentes de forma distinta e portanto seus desempenhos eram afetados por esses aspectos, já que a habilidade viso-espacial e a lógica-verbal são componentes importantes para a solução de problemas geométricos. Essa pesquisa mostrou como é importante conhecer as diferenças de gênero durante a solução de problemas geométricos e chamou a atenção para o maneira como se desenvolvem certos componentes das habilidades matemáticas, tais como a habilidade viso-espacial e a lógica-verbal, ambas importantes para este tipo de atividade.

Warren e English (1995) estudaram individualmente vinte crianças (10 meninos e 10 meninas) com idades entre 4 e 11 anos, com o objetivo de investigar a percepção e reconhecimento de figuras planas não familiares, procurando os fatores que influenciam nas habilidades das crianças para visualizar uma figura quando apresentada em diferentes contextos e orientações. Os sujeitos foram aleatoriamente escolhidos em uma escola pública e outra particular em Queensland (Austrália). O procedimento adotado foi filmar uma entrevista individual em que cada criança executava oito atividades, que envolviam tarefas como quebra-cabeças, jogos com cartões e cortes em figuras de quatro lados. O estudo mostrou que o modo como a figura era visualizada podia ajudar ou dificultar o seu reconhecimento em situações não padronizadas e que o sistema de ensino não estava fornecendo, para aqueles sujeitos, as experiências de aprendizagem apropriadas ao desenvolvimento de domínio sobre os conceitos espaciais. Como no experimento de Nelson e Klausmeier (1974), verificou-se que o processo de ensino não estava influenciando de modo significativo a aprendizagem de conceitos a ponto de permitir que as atividades propostas fossem solucionadas de modo satisfatório. Esses trabalhos se assemelhavam, pois ambos pretendiam buscar diferenças de aprendizagem de sujeitos que se encontravam em diferentes escolas. Outro fator era composto pelas características das atividades que propunham diferenças na forma de apresentação das figuras, como a orientação.

O objeto de estudo de Reynolds e Wheatley (1997) era o senso espacial e a imaginação bem desenvolvidas de Elaine, uma estudante de 5ª série, solicitada a solucionar testes complexos e cujo desempenho era filmado. Quando solicitada a relatar os procedimentos mentais utilizados, ela desenhou, em diagramas, todos os procedimentos. Verificou-se uma conexão direta entre o uso da imaginação e a habilidade para raciocinar matematicamente em nível sofisticado durante a solução de problemas não rotineiros, já que o senso espacial bem desenvolvido produziu um incremento na capacidade geométrica, permitindo a construção, exame e reconstrução de algumas relações matemáticas complexas.

Outro estudo a respeito da habilidade para os conceitos espaciais foi efetuado por Battista e Clements (1996), que estudaram as dificuldades dos alunos de duas salas de terceira série (45 estudantes) e quatro salas de quinta série (78 estudantes) para determinar o número de cubos contidos em uma construção tridimensional retangular. Essa pesquisa diferencia-se pelo número de sujeitos e pela natureza das atividades, muito semelhantes às da série XXV de Krutetskii (1976)[6], onde, segundo aqueles autores, são muito importantes, pois auxiliam na construção de um trabalho cognitivo para compreensão do significado do conceito de volume e suas fórmulas. Foram apresentados aos alunos vários problemas envolvendo sólidos retangulares construídos com "unidades-cubo". Para iniciar, as provas foram aplicadas individualmente. Em seguida, foram

[6] (Anexo IV - exercício 1 do Teste C da Prova de Conceitos Espaciais)

entrevistados 15 alunos de quinta série que haviam terminado um curso de oito semanas sobre volume. A conclusão obtida foi de que a concepção inicial dos estudantes estava vinculada à uma imagem onde não aparecia a coordenação entre as faces. Outros estudantes solucionaram os problemas através de uma adição do espaço ocupado, e ainda outros mostraram uma reestruturação mais local que global em relação à figura, decompondo os objetos em outros menores. Os sujeitos que se mostraram incapazes de solucionar essas tarefas não conseguiam coordenar e integrar as imagens das unidades-cubo para construir uma imagem mental da figura total.

Gorgorió (1998) realizou pesquisas a respeito da solução de problemas de rotação espacial e do modo como as diferentes estratégias visuais e não visuais funcionavam em tarefas com conceitos geométricos, tentando verificar também qual a contribuição dessas formas de solução sobre o que ele definiu como habilidade de processamento visual. Comparou os grupos de sujeitos divididos por gênero e por idade (24 alunos de 12 a 16 anos). Esses sujeitos foram selecionados a partir de um estudo prévio com 645 alunos, de várias escolas, segundo o gênero (50% da amostra final para cada gênero), a idade e o desempenho em uma prova de Geometria (desempenho fraco, médio e bom). Os processos de solução foram analisados qualitativamente e quantitativamente, obtidos através de entrevista clínica, composta por nove tarefas. Um dos resultados obtidos demonstrou que as características da prova influenciavam no tipo de estratégia usada pelos alunos, como o contexto, com significado real ou não; a formulação da prova; a complexidade dos objetos; e principalmente a ação pedida. Se o objeto fornecido era simples, as estratégias de processamento visual forneciam um número maior de respostas corretas, enquanto que as estratégias não visuais permitiam mais erros. Se um objeto complexo era fornecido, a situação se invertia. Portanto, rotações de objetos podiam ser solucionadas através de estratégias visuais ou não, dependendo das características da atividade.

Alves (1999), integrante do grupo PSIEM, estudou a influência de componentes das habilidades matemáticas presentes durante a solução de problemas aritméticos, à luz da teoria de Krutetskii (1976). Foram sujeitos da primeira etapa da pesquisa 53 sujeitos de duas escolas – uma pública da cidade de Americana e outra particular da cidade de Campinas – submetidos a uma prova de solução de problemas aritméticos. Em seguida, foram selecionados nove sujeitos de acordo com o desempenho no teste (bom, médio e fraco), com o objetivo de estudar a habilidade para perceber relações e fatos concretos no problema, a habilidade para formar generalizações, a memória matemática e o raciocínio verbal. Explorações acerca das atitudes desses alunos também foram feitas. A primeira fase mostrou que o enunciado verbal do problema, que requer a obtenção da informação matemática, é o aspecto mais difícil para os alunos. O estudo final demonstrou que os componentes escolhidos para a investigação não estavam influenciando o desempenho durante as atividades, e não foram encontradas relações com as atitudes dos alunos em relação à Matemática. As influências sobre a solução de problemas foram atribuídas ao raciocínio verbal e a fatores não explorados na pesquisa.

Estudos dessa natureza são importantes para que se entenda como ocorrem os processos de solução de problemas e quais são os fatores que estão presentes nesse processo. Segundo Krutetskii (1976), durante a solução de problemas, o indivíduo tem que transpor três estágios para atingir uma execução completa da atividade: (1) Obtenção da informação matemática; (2) Processamento da informação matemática; e (3) Retenção da informação matemática. De acordo com o estudo de Alves (1999), o primeiro estágio é muito importante, o que vai de encontro com os resultados do estudo de Brito, Fini e Garcia (1994). Os pesquisadores investigaram as relações entre a solução de problemas de raciocínio matemático e o desempenho verbal, tendo como sujeitos sessenta alunos de 1° e 2° anos de um curso de Licenciatura em Matemática, os quais solucionaram 12 problemas aritméticos e algébricos, além de um teste de raciocínio verbal. Os resultados indicaram que solucionar um problema requer compreensão verbal do enunciado e compreensão matemática dos conceitos envolvidos no problema, e mais ainda que "é provável que a compreensão verbal do enunciado do problema seja anterior à compreensão da natureza matemática do problema. Logo, é necessário um mínimo de habilidade verbal para possibilitar a compreensão da natureza matemática do problema" (Brito, Fini e Garcia, 1994, p. 5).

Esses autores propuseram então, a partir desses resultados, o seguinte modelo:

INFORMAÇÃO EXTERNA

↓

CODIFICAÇÃO VERBAL (Outras formas de codificação não verbal)

↓

REPRESENTAÇÃO INTERNA (Diferentes formas de representação interna)

↓

COMPREENSÃO DA NATUREZA MATEMÁTICA DO PROBLEMA

↓

PROCESSO DE SOLUÇÃO DE PROBLEMA

↓

RESPOSTA

Figura 2: Relação entre o raciocínio verbal e matemático durante o processo de solução de problemas matemáticos com enunciados verbais (Brito, Fini e Garcia, 1994).

A Figura 1 representa todos os estágios da solução de um problema, desde a informação externa até a obtenção da resposta. Para Krutetskii (1976), um dos componentes do segundo estágio da solução de problemas, a reversibilidade de pensamento, foi o objeto de estudo da pesquisa desenvolvida por Spalleta (1998). Os sujeitos foram noventa estudantes do curso de Engenharia Elétrica da Unicamp, matriculados no período diurno e noturno. Foi aplicado um teste contendo questões sobre reversibilidade, propostos na série XVII de Krutetskii, relativos a conceitos aritméticos, algébricos e geométricos. Os sujeitos foram caracterizados segundo o desempenho na prova e, de acordo com a teoria de Krutetskii, como "mais capazes", "médios" e "não capazes". Isso foi feito de acordo com as habilidades na mudança de direção do pensamento, compreensão da estrutura matemática do problema e os erros autocorrigidos. O desempenho nessa prova foi relacionado com a nota final na disciplina de Cálculo (que todos os alunos já haviam cursado anteriormente), tendo o pesquisador concluído, através da análise dos dados, que este componente apresentava uma relação com o desempenho na disciplina.

Utsumi (2000) estudou as atitudes em relação à Matemática e suas relações com o gênero, a série e o desempenho em atividades matemáticas. Os sujeitos da pesquisa, 256 alunos de sexta, sétima e oitava séries do ensino fundamental de uma escola da rede pública do Estado de São Paulo, foram submetidos a um teste matemático, dos quais os alunos com melhor desempenho foram selecionados. Estes sujeitos foram submetidos a uma bateria de testes algébricos, com o objetivo de estudar alguns componentes da habilidade matemática, tais como percepção, generalização, flexibilidade de pensamento, reversibilidade dos processos mentais, encurtamento de raciocínio, compreensão, raciocínio e lógica, memória matemática e tipo de habilidade matemática. A análise dos dados permitiu verificar a relação entre as variáveis série, reprovações, gênero, compreensão dos problemas e autopercepção de desempenho com a nota dos sujeitos no teste matemático. Além disso, a análise dos protocolos dos sujeitos mais capazes mostrou que eles não eram capazes de solucionar os problemas presentes na bateria.

Araújo (1999) pesquisou as relações entre a escolha profissional e as habilidades e atitudes em relação à Matemática. Foram sujeitos da pesquisa 145 alunos de uma escola pública e outra particular, concluintes do ensino médio, e 233 universitários matriculados em cursos das áreas de humanas, biológicas e exatas. Eles foram submetidos a um questionário, uma escala de atitude e um teste matemático, contendo 10 questões de álgebra e problemas algébricos, baseado na teoria de Krutetskii (1976). Em relação ao desempenho dos sujeitos, os alunos do ensino médio da escola particular obtiveram um desempenho superior aos alunos da escola pública, assim como os universitários matriculados em cursos da área de exatas em relação às demais. Analisando os protocolos obtidos através da solução do teste matemático, foi verificado que os sujeitos classificados como "menos capazes" não aplicaram procedimentos algébricos, e sim estimativas ou operações com os números fornecidos no enunciado dos problemas.

Essas pesquisas parecem evidenciar que não só os conceitos geométricos apresentam problemas de aprendizagem por parte dos alunos, mas também os conceitos algébricos, mesmo sendo estes os que recebem maior atenção por parte da maioria dos professores de Matemática.

É extremamente complexo o processo de tentar "classificar" um sujeito como capaz, habilidoso ou inteligente, ou enquadrá-lo em um determinado nível de formação de conceitos e desenvolvimento cognitivo. As atividades que são selecionadas com tal objetivo têm aspectos importantíssimos, pois cada uma compreende formas diferentes de solução ou maneiras distintas de apresentação e requerem um conjunto de habilidades (e seus componentes). Se a tarefa envolver ainda a apresentação de figuras, elas possuem certos atributos como cor, forma, tamanho, orientação, etc., que também influenciam favoravelmente, ou não, nos procedimentos de solução do problema.

CAPÍTULO III

PROBLEMA, SUJEITOS, MATERIAIS E MÉTODO

Trata-se de uma pesquisa básica, exploratória, descritiva, e que usa um modelo quasi experimental. O estudo foi realizado em duas etapas: (1) um estudo preliminar com os seguintes objetivos: (a) identificar problemas na execução dos instrumentos, tanto no que se referia aos enunciados e apresentação das provas, quanto aos conteúdos matemáticos; (b) determinar o intervalo de tempo que deveria ser disponibilizado aos sujeitos para que essas provas fossem aplicadas no estudo final; (c) conferir a adequação da escolha dos instrumentos com os objetivos da pesquisa; (2) estudo final, com a aplicação dos mesmos instrumentos do estudo preliminar, acrescentando-se a eles um teste psicológico com a finalidade de buscar elementos relativos a um dos componentes da habilidade matemática.

Trata-se de uma pesquisa básica que, de acordo com Kerlinger (1980, p. 321), "é feita para testar teoria, estudar relações entre fenômenos com o fim de entender os fenômenos, com pouca ou nenhuma preocupação quanto à aplicação dos resultados da pesquisa a problemas práticos (...) a pesquisa científica é a investigação disciplinada das relações entre fenômenos naturais e (...) não foi criada para atingir metas práticas". Na revisão da literatura não foi encontrado qualquer estudo que relacionasse as teorias de Van Hiele (1987) e Krutetskii (1976). Assim, é necessário o estabelecimento de relações entre os conceitos presentes nos dois modelos, para, então, partir para um programa de pesquisa aplicada com mais probabilidades de sucesso, buscando problemas práticos, pois essa sim é "dirigida para a solução de problemas práticos especificados em áreas delineadas e da qual se espera melhoria ou progresso de algum processo ou atividade, ou o alcance de metas práticas"(Kerlinger, 1980, p. 321).

Esse é o grande valor da pesquisa básica: abrir caminhos, porventura inexistentes, para a pesquisa aplicada. Segundo Kerlinger (1980), a grande parte dos cientistas concorda em que tanto a pesquisa básica quanto a aplicada devem ser exploradas.

Problema de pesquisa e objetivos

A presente pesquisa foi elaborada e desenvolvida buscando responder à seguinte questão:

> **Quais são as relações entre o desempenho em provas que avaliam o nível de desenvolvimento do pensamento em Geometria, a percepção geométrica e a habilidade para trabalhar com conceitos espaciais?**

Os objetivos do presente estudo foram:

1. Descrever e comparar o desempenho dos sujeitos, concluintes do ensino médio, em uma prova que buscava avaliar o conhecimento geométrico de figuras no plano;
2. Comparar, de acordo com o gênero, o desempenho dos sujeitos em provas e testes que avaliam o desenvolvimento do pensamento em Geometria, a percepção geométrica, a habilidade para trabalhar com conceitos espaciais e o raciocínio espacial;
3. Identificar as relações entre o desempenho em provas que avaliam o nível de desenvolvimento do pensamento em Geometria, segundo a concepção de Van Hiele (1986), a percepção de figuras geométricas e a habilidade para conceitos espaciais, definidos como componentes das habilidades matemáticas por Krutetskii (1976).

Krutetskii (1976) descreveu as relações entre a aquisição de conhecimentos e o desenvolvimento das habilidades. Segundo sua teoria, à medida que conhecimentos vão sendo adquiridos, habilidades vão sendo desenvolvidas e o processo inverso também acontece. Portanto, a hipótese de pesquisa indica que pode haver uma relação entre as habilidades e o nível de desenvolvimento do pensamento em Geometria.

Sujeitos e procedimento de escolha das escolas

O estudo preliminar foi realizado em duas escolas, sendo uma particular da cidade de Jundiaí e outra municipal da cidade de Sumaré, ambas localizadas na região central. A escolha dos sujeitos foi feita por conveniência, tendo sido sujeitos dessa fase da pesquisa

76 alunos do curso normal para formação de professores de 1ª a 4ª séries do ensino fundamental.

A escolha foi feita dessa forma porque a escola particular também participou do estudo final e os sujeitos da primeira etapa eram provenientes de um curso diferenciado, cujas aulas de Matemática visam não só o desenvolvimento de habilidades e a preparação para o vestibular, mas também a formação de um tipo especial de profissional.

As escolas participantes da segunda etapa do estudo foram escolhidas também por conveniência, sendo a mesma escola particular da cidade de Jundiaí, SP, e uma escola da rede de ensino público do Estado de São Paulo, localizada na mesma cidade. Foram sujeitos dessa fase 228 alunos matriculados na terceira série do ensino médio, distribuídos em uma classe do período diurno e três classes do período noturno na escola particular, além de três classes do período diurno na escola pública.

A aplicação dos instrumentos foi feita em dois momentos. Nem todos os sujeitos estiveram presentes nas duas sessões, acarretando uma diminuição do número de sujeitos da pesquisa. Para fins de análise dos dados foram considerados os 201 sujeitos que participaram de todas as provas.

Na escola pública, todos os alunos eram matriculados no ensino médio regular. Já na escola privada, tanto no período diurno quanto no período noturno, quatro classes eram do curso técnico em química e em informática.

A previsão inicial era de que na escola particular uma das classes fosse de ensino médio. Como o número de aulas de Matemática, nesse curso, é menor que nos ensinos técnicos (quatro e cinco aulas), os professores não permitiram a realização da testagem nessa turma. Por essa razão, foi acrescentada uma outra turma do ensino técnico de química, o que permitiu que fosse mantido o mesmo número de sujeitos.

Instrumentos

Os dados foram coletados mediante a aplicação de cinco instrumentos:

1. Um questionário informativo (Anexo I) fechado, com questões de múltipla escolha, contendo questões relativas à identificação, idade, gênero, séries em que o aluno foi reprovado, e se os sujeitos estudaram sempre na mesma escola durante o ensino médio.

2. Uma prova obtida através da adaptação do instrumento *Van Hiele Test*, retirado de "Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry", Usiskin (1982), que será tratado aqui nesse trabalho como prova Van Hiele (© 1980, Universidade de Chicago. Reproduzido com autorização – Anexo II);
3. Uma prova contendo a série IV – "Problemas com elementos interpenetrantes" – proposta por Krutetskii (1976), para verificação da percepção de figuras geométricas, aqui tratada como prova de percepção (Anexo III);
4. Uma prova contendo a série XXV de Krutetskii (1976), "Problemas relacionados a conceitos espaciais", aqui chamada prova de conceitos espaciais (Anexo IV);
5. Um teste de raciocínio espacial da Bateria de Raciocínio BPR-5, de Primi e Almeida (2000). Reprodução não autorizada.

Cada uma das provas é descrita a seguir. Além disso, encontra-se no Anexo VIII uma análise desses instrumentos do ponto de vista matemático e da solução de cada uma das questões.

Prova Van Hiele

Este instrumento foi desenvolvido pelo Departamento de Educação da Universidade de Chicago através do projeto CDASSG (*Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry*) e tem por objetivo verificar qual o nível de desenvolvimento do pensamento em Geometria em que, segundo a teoria de Van Hiele (1986), o sujeito pode ser enquadrado. Essa prova foi obtida através do serviço de fornecimento de artigos do ERIC, ED 220 288, cuja autorização para reprodução e aplicação foi concedida por Usiskin, um dos responsáveis pelo projeto, através de e-mail.

A prova original contém 25 questões de múltipla escolha sobre conceitos e figuras geométricas, divididas em cinco questões para cada um dos cinco níveis definidos por Van Hiele.

Para o presente estudo, foram retiradas as questões de 16 a 25, relativas aos níveis quatro e cinco. Este procedimento justifica-se pelo fato de os Parâmetros Curriculares Nacionais (Secretaria de Educação Fundamental, 1997, 1997a; Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999) não fazerem referência ao ensino de demonstrações matemáticas, o que, ademais, não era de interesse do presente estudo.

Cada uma das questões possui cinco alternativas com apenas uma possibilidade de resposta correta. A forma de correção das questões foi "certo", se o sujeito assinalou a alternativa correta, e "errado" se ele assinalou qualquer uma das incorretas, sendo atribuídos os valores um e zero respectivamente. Os sujeitos que assinalaram duas alternativas tiveram suas questões consideradas erradas, mesmo que uma delas fosse a resposta correta.

Esse instrumento forneceu várias notas, a saber:

1) Nota no nível um – uma nota relativa ao desenvolvimento em Geometria do sujeito apenas nas cinco primeiras questões, variando de zero a 10.
2) Nota no nível dois – uma nota que procurou avaliar o desenvolvimento do sujeito nas questões pertencentes ao nível dois, ou seja, da questão 6 à questão 10. Essa nota variou de zero a 10.
3) Nota no nível três – um valor atribuído segundo o desempenho do sujeito nas cinco últimas questões da prova, variando de zero a 10.
4) Nota Van Hiele – uma nota ponderada, calculada a partir das notas no nível um, dois e três. Usiskin (1982) utilizou em seu estudo pesos que variavam de 2^0 a 2^4 (1, 2, 4, 8 e 16). Como esse estudo usou apenas os três primeiros níveis, foram atribuídos pesos com valores um, dois e três, já que foi pressuposto que o grau de dificuldade das questões aumentava à medida que se avançava nos níveis dentro da prova.
5) Nível Van Hiele – variou de zero a três, e o seu objetivo foi enquadrar cada sujeito de acordo com a teoria. Usiskin (1982) utilizou dois critérios diferentes com tal objetivo: considerar um sujeito presente em um nível quando ele acertasse quatro de cinco questões, e outro critério, mais flexível, quando o sujeito acertasse três de cinco questões. Em seu projeto ele apresentou uma série de implicações, inclusive comparando ambos os critérios. Mais uma vez, pelo fato de a prova ter sido compactada, o critério três de cinco questões corretas foi adotado, pois era o que menos prejudicaria a amostra: alguns sujeitos, que se enquadravam no nível dois ou três e não no um, ou só no um e no três e não no dois, por exemplo, foram considerados com o nível "indefinido", já que a teoria pressupõe que para que se alcance um nível é necessário passar pelos anteriores. Esse mesmo procedimento foi usado no projeto original com o termo "no fit". Os sujeitos que não obtiveram pontuação suficiente em nenhum nível foram considerados como nível zero.

Prova de Percepção

Com o objetivo de estudar componentes das habilidades matemáticas, foi utilizada a prova de percepção da série IV (Anexo III) dos problemas propostos por Krutetskii (1976), buscando avaliar a resposta mais completa que o examinado poderia oferecer, computando todos os objetos presentes em cada figura apresentada nas questões.

Essa prova é constituída de 10 questões abertas e todas elas apresentam figuras, porém de duas formas distintas: mesclando diferentes conceitos (avalia a percepção de elementos interpenetrantes) ou incluindo figuras do mesmo conceito (avaliando a percepção de figura-fundo). São questões cujo enunciado verbal remete apenas a uma pergunta simples, sem que outras informações fossem fornecidas. Ou seja, a solução das questões dependia exclusivamente do exame das figuras e não da interpretação dos enunciados.

O que diferenciou a percepção inicial da percepção total nas questões (1), (2), (3), (4) e (5) foi, basicamente, a capacidade do sujeito para perceber a inclusão das figuras.

Uma das questões (a de número sete) teve seu enunciado alterado da palavra "indique" para "pinte". O motivo dessa mudança é que a prova foi individual e os sujeitos foram solicitados a deixar suas soluções anotadas para a contabilização dos dados. A figura apresentada também foi reproduzida três vezes, pois a questão apresentava três itens de solução.

Os critérios de correção de cada questão encontram-se descritos no Quadro 2, e consideraram, com base nos pressupostos de Krutetskii (1976) e na teoria da Gestalt (Köhler, 1980), a habilidade do sujeito em perceber todos os elementos apresentados nas figuras de cada questão:

Quadro 2: Pontuação atribuída à solução de cada questão na Prova de Percepção.

PONTUAÇÃO	RESPOSTA APRESENTADA
0	Resposta incorreta
0,5	Percepção inicial incompleta, ou seja, o sujeito foi capaz de perceber alguns elementos, mas não atingiu o número mínimo, que era distinto em cada questão.
1,0	Percepção inicial, o sujeito percebeu um número mínimo de elementos.
1,5	Percepção intermediária, o sujeito percebeu um número maior de elementos, mas não o total deles.
2,0	Percepção total, isto é, o sujeito percebeu todos os elementos presentes.

Com base no Quadro 2, foi feita uma descrição de cada uma das questões, a solução possível e os processos cognitivos presentes (Quadro 4, Anexo VIII).

Prova de Conceitos Espaciais

Krutetskii (1976) afirmou que "ver" figuras, sólidos, relações espaciais etc., mentalmente, consiste em o indivíduo possuir habilidade para trabalhar com conceitos espaciais, tanto em duas como em três dimensões. A série XXV supõe que o aluno possua condições de trabalhar com tais conceitos e seja capaz de solucionar mentalmente tais problemas. Não sendo isso possível, ou seja, caso o indivíduo necessite de algum suporte (um desenho, por exemplo), isso implica em uma falha na habilidade para conceitos espaciais.

Essa prova era constituída, originalmente, por 28 questões, sendo assim dividida: (A) Problemas no plano – oito questões; (B) Geometria espacial – 16 questões; (C) Teste de Figuras – 13 questões.

As partes (chamadas aqui neste trabalho de subprovas) (A) e (B) são compostas somente por enunciados verbais. A subprova (C) apresenta figuras como parte do enunciado, porém, assim como as partes (A) e (B), requer a representação mental para a solução de cada questão. A subprova (B) teve duas modificações em relação ao original. A primeira delas foi a extração de uma questão que induz o sujeito a imaginar um objeto cuja nomeação não era possível por alunos do ensino médio. A outra refere-se à inclusão de uma figura esquemática, sugestão essa feita pelo próprio autor. Essas duas alterações justificam-se pelo fato de as provas terem sido originalmente aplicadas em entrevistas individuais, enquanto no presente estudo elas foram aplicadas na forma de testes tipo lápis e papel.

Tanto a prova de percepção quanto a prova de conceitos espaciais, ambas de autoria de Krutetskii (1976), tiveram o tempo de solução anotado sendo este mais um dado analisado, assim como indicou esse autor ser o aluno mais habilidoso capaz de reduzir a solução de forma mais elegante, entre outros fatores já discutidos. O autor aplicou essas séries em entrevistas individuais, analisando as estratégias de solução, o tempo, a rapidez de raciocínio, o "encurtamento" da solução, etc.. Não é objeto da pesquisa estudar os processos de solução e sim as relações entre os desempenhos em provas que requerem componentes das habilidades matemáticas.

Esse instrumento gerou quatro notas: nota de conceitos espaciais A, nota de conceitos espaciais B, nota de conceitos espaciais C e nota de conceitos espaciais. Todas variaram de zero a 10 e a nota de conceitos espaciais foi obtida através de uma média aritmética das notas A, B e C, já que a teoria não indicou um grau de dificuldade diferente entre essas subprovas. A análise das questões da prova de conceitos espaciais encontram-se no Anexo VIII.

Teste de Raciocínio Espacial

A Bateria de Provas de Raciocínio – BPR-5 (Primi e Almeida, 2000), é composta por cinco instrumentos que procura avaliar o raciocínio abstrato, o raciocínio verbal, o raciocínio espacial, o raciocínio numérico e o raciocínio mecânico. No presente trabalho foi utilizada apenas a prova de raciocínio espacial, tendo em vista os objetivos propostos e visto que os pressupostos teóricos do referido instrumento estão "no sentido da convergência de aspectos mais gerais, simultaneamente aos aspectos mais específicos na realização cognitiva" (Primi e Almeida, 2000, p. 14).

O BPR-5 foi desenvolvido no Brasil em 1995, a partir da Bateria de Provas de Raciocínio Diferencial (Almeida, 1996, citado por Primi e Almeida, 2000), que é muito usada e já validada em Portugal. A versão brasileira também já foi validada e apresenta-se de forma mais compacta que a original portuguesa. Sua utilização no presente trabalho foi interessante, pois além de apresentar convergência com os objetivos, é uma nova tentativa de medida dos componentes da habilidade matemática.

Segundo os autores, todas as provas estão de acordo com a terminologia e definições utilizadas por Carrol (1993, 1997), Horn (1991) e Woodcock (1990) (citados por Primi e Almeida, 2000), onde a prova de raciocínio espacial refere-se em parte à inteligência fluida, porém a capacidade de processamento visual – que possibilita representação e manipulação de imagens mentais – é, na verdade, o principal foco deste teste, uma vez que o raciocínio espacial, como está apresentado, necessita também do raciocínio indutivo, que é uma atividade mental próxima ao fator g, necessário para que o sujeito analise informações e descubra quais são as regularidades da tarefa, desenvolvendo idéias análogas.

A prova de conceitos espaciais (A) e (B) avaliou o desempenho do indivíduo em tarefas que requerem a habilidade de manipulação mental de tais conceitos, apresentadas com enunciado verbal, ou seja, o sujeito necessita obter as informações para formar uma imagem mental e então iniciar o processamento a fim de encontrar a resposta. Já a prova de raciocínio espacial ofereceu uma outra medida sobre a habilidade de manipulação de imagens, pois não existia a sobrecarga de um enunciado verbal. Comparando a prova de conceitos espaciais (C) e a prova de raciocínio espacial, a distinção refere-se ao fato de que a primeira apresenta várias formas diferentes de manipulação mental de imagens sem enunciado verbal, dependendo de cada tarefa, enquanto a prova de raciocínio espacial tem suas questões diferenciadas pelo grau de dificuldade em relação ao raciocínio indutivo.

Este teste apresenta-se na forma A (cuja aplicação é indicada a alunos de 6ª a 8ª séries do ensino fundamental) e forma B (para alunos da 1ª à 3ª séries do ensino médio). Logo, esse trabalho utilizou a forma B, que é composta por 20 questões de múltipla escolha, necessitando de um tempo limite para a solução da prova, estabelecido em 18 minutos. O sujeito deve parar de executar a prova no instante em que expirar esse prazo.

A Figura 3 mostra uma questão como exemplo dessa prova (Primi e Almeida, 2000). Os três cubos que compõem a primeira linha são fornecidos de modo que o sujeito descubra a série de movimentos que estão sendo executados, para que ele possa escolher um dos cinco cubos da segunda linha como o complemento da série.

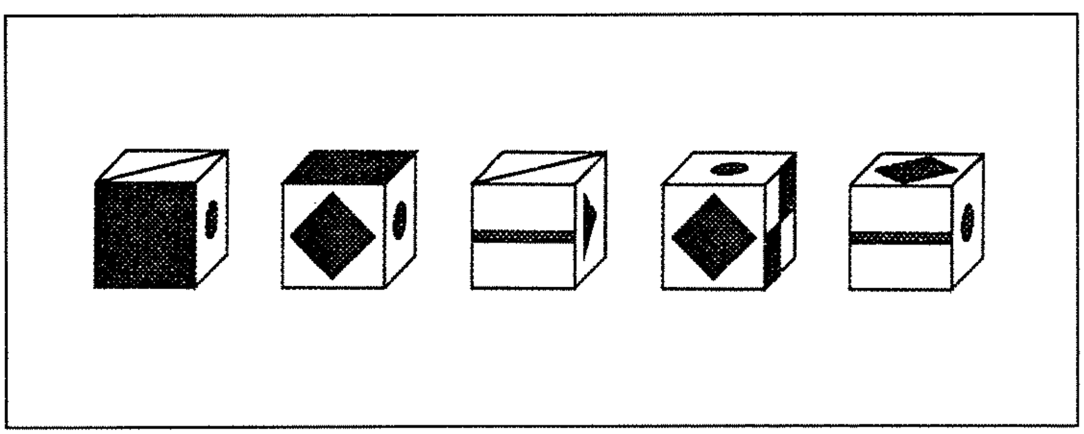


Figura 3: Exemplo de uma questão da prova de raciocínio espacial.

Procedimento para a coleta dos dados

Os instrumentos foram aplicados em duas sessões, na sala de aula. Primeiramente, foi aplicada a prova de problemas geométricos de Van Hiele, acompanhada do questionário e do teste de raciocínio espacial. Na segunda sessão, realizada em um outro dia letivo, foi aplicada a prova de percepção, seguida da prova de conceitos espaciais. O nível de dificuldade matemática também é maior neste último instrumento, outro fator que motivou a escolha dessa ordem de aplicação. Os instrumentos foram aplicados em duas sessões distintas a fim de evitar fadiga nos sujeitos.

Os alunos foram submetidos às provas em horário normal de aula, tendo havido o auxílio de um professor da escola, que não lecionava Matemática, para não haver influencia sobre os alunos quando da execução das provas. O auxiliar recebeu as instruções antes do início da aplicação, já que se tratavam de normas quase usuais das escolas.

Todos os instrumentos foram acompanhados de instruções por escrito que foram lidas antes do início do teste. Caso tivessem alguma dúvida, os alunos puderam perguntar aos aplicadores, mas não foi permitida qualquer comunicação entre os sujeitos. Além disso, as dúvidas foram esclarecidas coletivamente a fim de evitar ajudas individuais, mas nenhuma informação conceitual sobre a prova foi fornecida.

O teste de raciocínio espacial teve uma limitação de tempo, onde os sujeitos foram informados de que essa prova possuía um tempo máximo de 18 minutos, como instruía o manual de aplicação. Este foi o único teste aplicado por um psicólogo apto para tal função. Em todos os instrumentos foi solicitado o nome do sujeito apenas para identificação dos dados. Todos os participantes foram avisados quanto ao sigilo e anonimato.

Foram registradas as datas de aplicação, os horários, as classes e os sujeitos que se ausentaram no dia, além de outras ocorrências relevantes.

Plano de Análise de Dados

Os dados obtidos foram analisados estatisticamente, sendo aparesentandos, em primeiro lugar, os resultados descritivos. As variáveis foram assim definidas:

a) **gênero**: variável categórica atribuída como masculino ou feminino;

b) **idade**: variável intervalar;

c) **fase**: variável escalar que classifica os sujeitos segundo a relação série por idade, ou seja, em fase, em leve defasagem e em defasagem acentuada, em relação à série de matrícula, a saber, sujeitos com idades entre 16 e 17 anos foram classificados em fase, sujeitos entre 18 e 19 anos foram enquadrados em leve defasagem e sujeitos com 20 anos ou mais foram classificados em defasagem acentuada;

d) **escola**: variável categórica, segundo o tipo de escola em que o sujeito foi avaliado – pública ou particular;

e) **turma**: variável categórica, de acordo com a classe em que o sujeito estava matriculado;

f) **período**: variável categórica, denominada por diurno ou noturno, de acordo com o período em que o sujeito freqüentava a escola;

g) **curso**: variável nominal, denominada como ensino médio, para os sujeitos que freqüentam classes de ensino médio sem habilitação técnica qualquer, ou ensino técnico, se o sujeito freqüenta uma classe de ensino médio com habilitação em alguma área técnica.

h) **nível**: de acordo com o nível de desenvolvimento do pensamento em Geometria de Van Hiele, calculada através do desempenho na prova Van Hiele, que consiste numa variável psicológica escalar, variando de zero a três, ou classificando um sujeito como indefinido quando não for obedecida a hierarquia dos níveis;

i) **VH_1**: variável intervalar, variando de zero a 10, obtida através das cinco questões do nível 1 da prova Van Hiele;

j) **VH_2**: variável intervalar, variando de zero a 10, obtida através das cinco questões do nível 2 da prova Van Hiele;

k) **VH_3**: variável intervalar, variando de zero a 10, obtida através das cinco questões do nível 1 da prova Van Hiele

l) **VH**: variável intervalar, variando de zero a 10. Essa nota geral foi calculada através do ponderamento das notas VH_1, VH_2 e VH_3, respectivamente com pesos 1, 2 e 3.

m) **PE**: constitui uma variável psicológica intervalar, variando de zero a 10, calculada a partir do desempenho do sujeito na prova de percepção;

n) **CE_A**: constitui uma variável psicológica intervalar, variando de zero a 10, calculada a partir do desempenho do sujeito na prova de conceitos espaciais A - Problemas no Plano;

o) **CE_B**: variável intervalar, variando de zero a 10, determinada a partir do desempenho do indivíduo na prova de conceitos espaciais B – Geometria Espacial;

p) **CE_C**: variável intervalar, variando de zero a 10, inferida a partir do desempenho do sujeito na prova de conceitos espaciais C – Teste de Figuras;

q) **CE**: variável intervalar, calculada de zero a 10 a partir da média aritmética entre as variáveis CE_A, CE_B e CE_C;

r) **RE**: constitui uma variável psicológica intervalar, variando de zero a 20, definida a partir da pontuação bruta na prova de raciocínio espacial;

s) **tempo**: de execução das provas de percepção e de conceitos espaciais, variável intervalar. As medidas foram tomadas em minutos.

Análise estatística dos dados

Como primeiro passo, o desempenho dos sujeitos foi analisado de acordo com as seguintes variáveis: idade/faixa etária, gênero, tipo de escola, período de matrícula, turma e tipo de curso. Utilizando os testes t-student e análise de variância (ANOVA *F*) foi verificado se havia alguma diferença de desempenho dos sujeitos segundo essas variáveis, e o teste Tukey – HSD, para a obtenção do grupo diferente, caso ele existisse. O teste Qui-quadrado (χ^2) foi utilizado para comparar variáveis categóricas.

Foi utilizado o teste de Lilliefors (*K-S*) para verificar a normalidade da distribuição das amostras (independentes), como pressuposto dos testes estatísticos ANOVA *F* e teste t. Porém, quando esse teste indicou que a amostra não apresentava normalidade, esses testes ainda foram usados, pois o número elevado de sujeitos garantiu as suas confiabilidades.

Foi utilizado também o teste t para amostras emparelhadas, na análise de dados da prova de raciocínio espacial, dado que haviam dois critérios diferentes para a análise dessa prova. Como definiu Costa Neto (1977), "uma amostra é emparelhada quando os resultados estão relacionados dois a dois segundo algum critério que introduz uma influência marcante entre os diversos pares, que supomos, porém, influir igualmente sobre os valores de cada par".

Outro procedimento adotado para o reconhecimento de relações forte/fraca, positiva/negativa, foi a construção de matrizes de correlação de Pearson (*r*), cujo objetivo era identificar se existia relação linear entre provas.

Finalmente, as variáveis psicológicas foram analisadas estatisticamente através de análise fatorial. O objetivo era procurar por relações e por testes que estivessem medindo os mesmos fatores, procurando reduzir a complexidade dessas variáveis, ou seja, "que testes devem ficar juntos – quais os que virtualmente medem a mesma coisa, em outras palavras, e o quanto medem a mesma coisa" (Kerlinger, 1980, p. 203). Segundo Catell (1977), a análise fatorial é uma forma de agrupar variáveis que se comportam do mesmo modo. Foi também executada a análise fatorial dos itens das provas.

Embora Usiskin (1982) tenha utilizado o nível de significância de .01 para analisar os dados da prova Van Hiele, foi estabelecido na atual pesquisa α = .05 por ser mais adequado (Witter, 1996). Para o presente estudo, essa prova foi adaptada, havendo modificação na computação da nota geral a ser obtida, sendo que ainda outros fatores colaboraram para a escolha desse nível de significância, tais como a diferença entre a população em que foi aplicada e a população dos alunos americanos que freqüentaram os cursos específicos de Geometria da High School.

As formas de aplicação das séries de Krutetskii também justificam o menor rigor utilizado para a análise dos dados, pois este autor originalmente utilizou esses instrumentos em entrevistas individuais. Foi extraída uma questão que envolvia conceitos não trabalhados até o final do ensino médio e também foi adaptada de oral para escrita uma questão na prova de percepção.

Outra justificativa é que, durante a pesquisa, uma série de variáveis não foram controladas, como por exemplo a atitude em relação à atividade, as características de personalidade, o estado mental, todos esses fatores que Krutetskii (1976) considerava presentes durante a execução de uma atividade.

A Figura 4 foi construída com o objetivo de direcionar a pesquisa no sentido de procurar as relações entre as variáveis já mencionadas, em uma rede de relações. Não é esperado que existam variáveis que dependam de outras, mas sim relações de interdependência entre elas:

MODELO DE TRABALHO

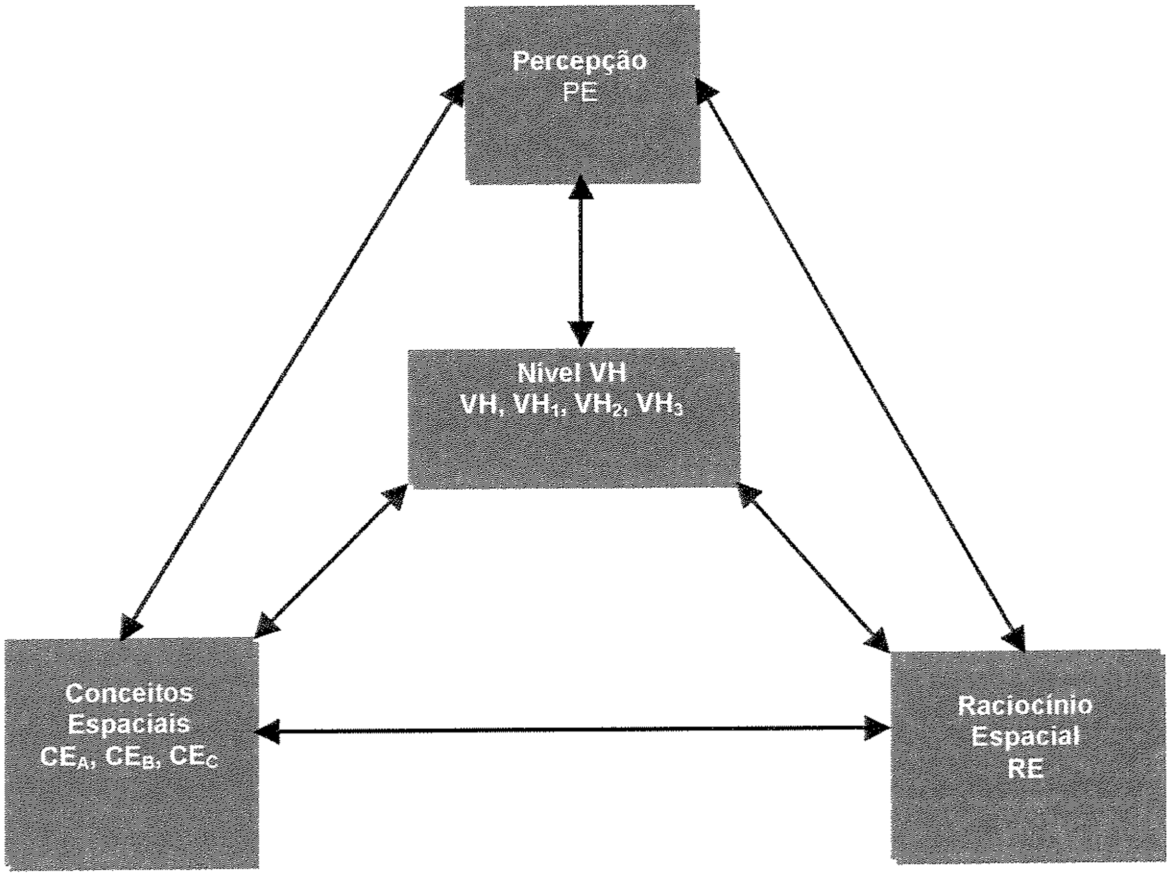


Figura 4: Relações esperadas entre as variáveis.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS DO ESTUDO PRELIMINAR

Foi realizado um estudo preliminar cujo objetivo foi verificar como os sujeitos respondiam ao questionário informativo, prova Van Hiele, prova de percepção e prova de conceitos espaciais.

Os sujeitos desse estudo foram escolhidos por conveniência e foram 76 estudantes do terceiro ano do curso normal, matriculados em duas escolas, uma particular e outra pública.

Quanto à adequação do número de sujeitos da amostra, segundo Cone e Foster (1994), o número de sujeitos de um estudo deve estar preferencialmente entre sete e 20 para cada categoria. Foram consideradas para este estudo preliminar treze categorias: VH_1 (nota no nível 1), VH_2 (nota no nível 2), VH_3 (nota no nível 3), VH (nota Van Hiele), PE (nota de percepção), CE_A (nota de conceitos espaciais A), CE_B (nota de conceitos espaciais B), CE_C (nota de conceitos espaciais C), CE (nota de conceitos espaciais), tempo de solução da Prova CE, tempo de solução da PE e o tipo de escola.

A média está abaixo do mínimo (5.84 sujeitos por categoria), devido ao não comparecimento dos alunos nos dias de aplicação. O fato de ser um estudo piloto para testar instrumentos e não para encontrar resultados finais da pesquisa justifica beneficamente o número de sujeitos dessa fase, sendo que os próprios Cone e Foster (1994) argumentaram que tal intervalo não é fixo, que é possível trabalhar com números acima de 20 ou abaixo de 7, não prejudicando os resultados.

Os instrumentos foram aplicados em três dias diferentes, apresentando diferença também no número de sujeitos que executou cada prova.

A análise dos dados obtidos através da prova Van Hiele indicou que o período máximo necessário para a execução dessa prova, a fim de obter dados para o planejamento da sua aplicação na segunda fase do estudo, foi de 35 minutos, o que estava dentro do estimado inicialmente.

Os sujeitos afirmaram compreender a natureza das questões objetivas e perceberam que a dificuldade de solução aumentava à medida que eles avançavam na solução das questões, fato confirmado pelas médias obtidas nos níveis 1, 2 e 3, decrescentes, sendo que a média ponderada foi de 3.23, *SD*[7] = 1.23. O nível 3 apresentou um grande número de sujeitos com nota zero e o desempenho também foi bem abaixo, quando comparado aos níveis anteriores.

Quanto à redação das questões, apenas uma pertencente ao 3° nível, a questão 11, apresentou certa dúvida nos alunos. É uma questão que exige raciocínio em lógica e a formação de uma imagem mental. Alguns sujeitos perguntaram sobre a ausência de duas figuras no enunciado, mas essa era justamente uma das informações que o sujeito deveria encontrar para a solução completa do exercício.

A aplicação da prova de percepção demorou trinta minutos, sendo obtida a média de 3.67, *SD* = 1.81, com amplitude de zero a 9.

Pela extensão da prova de conceitos espaciais, bem maior se comparada às anteriores, e pelo grau de dificuldade exigido, prova essa composta em sua maioria por problemas de enunciado verbal, os dados convergiram para um desempenho muito pior quando comparado com os instrumentos anteriores, onde muitos dos sujeitos obtiveram como desempenho uma nota zero.

Por ser mais extenso, esse instrumento levou 40 minutos para ser respondido por todos, sendo a média de 1.4, e o desvio padrão 0.87.

Os instrumentos foram considerados adequados pelos sujeitos. Pôde-se concluir que os alunos entenderam as questões, com exceção da questão seis na prova de percepção que tornou a solução de certa forma ambígua e necessitou de reformulação do seu enunciado.

O objetivo desse estudo preliminar foi verificar se os instrumentos estavam adequados ao projeto inicialmente proposto. As conclusões são de que a prova de conceitos espaciais se mostrou extremamente difícil, principalmente a subprova B (CE_B), onde uma análise dos protocolos mostrou que, aparentemente, muitos sujeitos desconheciam o conceito de secção de sólido.

Em geral, todas as provas se mostraram bastante trabalhosas para os sujeitos, porém isso era esperado, considerando a amostra escolhida. Apesar disso, os instrumentos se mostraram adequados para avaliar os constructos propostos. Assim, com o tempo contabilizado, foi preparada a aplicação dos instrumentos para a coleta final dos dados.

---

[7] *SD* é abreviatura de *Standard Deviation*, e em todo o trabalho significa Desvio Padrão.

CAPÍTULO V

ANÁLISE DOS DADOS E RESULTADOS

Foram analisados os dados referentes a 201 sujeitos, sendo 94 matriculados na escola pública e 107 na escola particular, que representaram respectivamente 46.8% e 53.2 % da amostra.

A análise dos dados permitiu uma caracterização dos sujeitos e uma análise dos seus desempenhos em cada um dos instrumentos, procurando comparar os grupos de alunos em cada variável. Alguns outros resultados estatísticos encontram-se resumidos nos Anexos V, VI e VII.

Características dos sujeitos

Os resultados aqui apresentados referem-se aos dados coletados no questionário informativo (Anexo I). Os alunos da escola pública escolhidos para essa pesquisa eram estudantes de três classes de ensino médio regular do período diurno de uma escola de grande porte da região central da cidade de Jundiaí. Na escola particular, os sujeitos estavam matriculados em quatro classes, uma do período diurno e três do período noturno. No período diurno, os alunos representaram 61.7% da amostra e no período noturno, 38.3%. A distribuição dos sujeitos por período, por turma e por tipo de escola é mostrada na Tabela 1:

Tabela 1

Distribuição dos sujeitos de acordo com o período, as turmas e tipo de escola.

Escola	Turma	Turno: Diurno	Turno: Noturno	Total
Pública	A_1	30	-	
	B_1	32	-	
	C_1	32	-	94
Particular	A_2	30	-	
	B_2	-	27	
	C_2	-	28	
	D_2	-	22	107
Total	7	124	77	201

Neste trabalho as classes com índice 1 (A_1, B_1 e C_1), representaram as classes da escola pública, enquanto as classes da escola particular foram representadas pelo valor subscrito 2 (A_2, B_2, C_2 e D_2). As turmas A_2, B_2 e C_2 são classes de ensino técnico em informática e a turma D_2 refere-se a uma sala de ensino técnico com habilitação em química.

É necessário ressaltar que a representatividade dos sujeitos em relação ao tipo de curso que freqüentavam manteve-se a mesma que o tipo da escola, já que todos os cursos do ensino médio pertenciam à escola pública, enquanto os cursos técnicos em nível médio pertenciam à escola particular.

Outro dado analisado foi a idade dos sujeitos, sendo constatado que a faixa etária variava entre 16 e 19 anos, como mostra a Tabela 2 a seguir:

Tabela 2

Distribuição dos sujeitos de acordo com a idade.

Faixa etária	**Escola**		**Total**		
	Pública	**Particular**	***n***	**%**	**% acumulada**
16-17	56	57	113	56.2	56.2
18-19	28	37	65	32.3	88.5
20-22	7	7	14	7.0	95.5
23-24	2	3	5	2.5	98
28-30	1	3	4	2	100
Total	94	107	201	100	100

Quando perguntados sobre a reprovação ao longo da escolaridade, cerca de 26.4% dos sujeitos afirmaram ter tido reprovação em alguma série do ensino fundamental ou médio, sendo que, destes, 32% foram reprovados em dois anos letivos e apenas um sujeito repetiu três vezes. Dos 53 repetentes, 16 não se recordaram qual foi a disciplina principal de sua retenção. Dos outros, 20 (ou 54%) indicaram a Matemática como uma das disciplinas de sua reprovação, seguida pela disciplina Língua Portuguesa (10 sujeitos ou 27%).

Os dois grupos juntos – escola pública e particular – foram compostos por 45.3 % de sujeitos do gênero masculino e 54.7 % do gênero feminino. Quando os sujeitos foram agrupados de acordo com o gênero e a escola, foram obtidos os seguintes resultados, apresentados nas Tabelas 3 e 4:

Tabela 3

Distribuição dos sujeitos de acordo com o gênero e a turma (escola pública)

	Turmas							
	A_1		**B_1**		**C_1**		**Total**	
Gênero	***N***	**%**	***n***	**%**	***n***	**%**	***n***	**%**
Masculino	7	23.3	12	37.5	10	31.2	29	30.8
Feminino	23	76.7	20	62.5	22	68.7	65	69.2
Total	30	100	32	100	32	100	94	100

Através da Tabela 3 foi possível constatar uma certa discrepância quanto ao número de sujeitos nos dois grupos, pois apenas 30.8 % de sujeitos pertenciam ao gênero masculino enquanto 69.2 % dos sujeitos pertencia ao gênero feminino.

A distribuição dos sujeitos da escola particular de acordo com o gênero, apresentada na Tabela 4, mostrou que 57.9 % sujeitos eram do gênero masculino e 42.1% do gênero feminino.

Tabela 4

Distribuição dos sujeitos de acordo com o gênero e a turma (escola particular)

	Turmas									
	A_2		**B_2**		**C_2**		**D_2**		**Total**	
Gênero	***n***	**%**	***n***	**%**	***n***	**%**	***n***	**%**	***n***	**%**
Masculino	13	43.3	18	66.7	20	71.4	11	50.0	65	57.9
Feminino	17	56.7	9	33.3	8	28.6	11	50.0	45	42.1
Total	30	100.0	27	100.0	28	100.0	22	100.	107	100.0

Foi verificado um número de sujeitos do gênero feminino maior na escola pública que na escola particular. Isto pode estar relacionado à escolha profissional, pois o número maior ou menor de sujeitos do gênero feminino estava relacionado ao tipo de curso – ensino médio ou ensino médio técnico. Embora não se tenha estudado o fato de maneira mais detalhada, é possível observar, através da Figura 5, que os sujeitos do gênero masculino estavam em maior número nas classes de cursos técnicos:

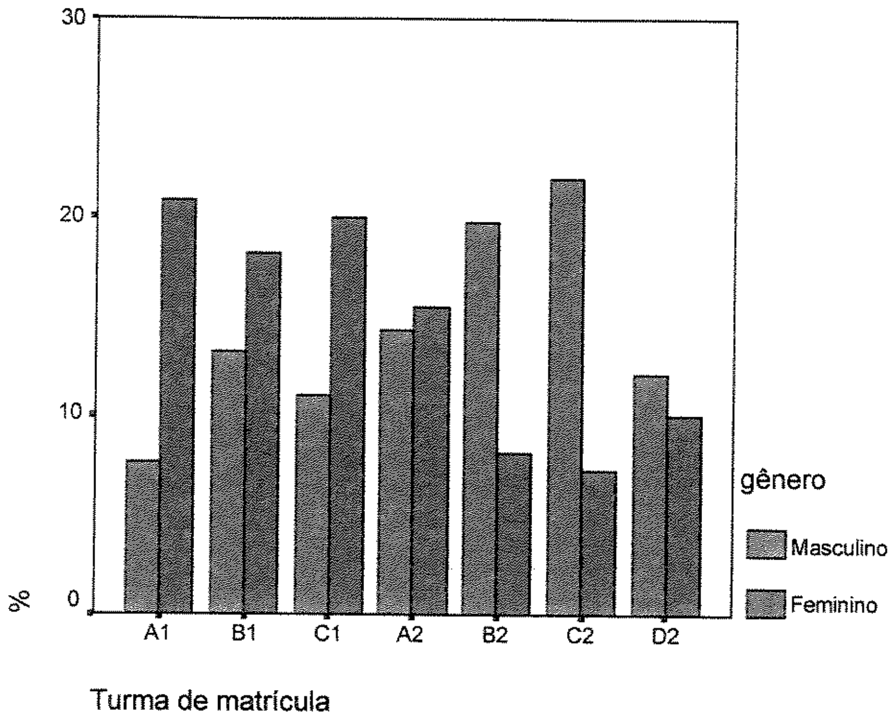


Figura 5: Distribuição dos sujeitos quanto ao gênero e a turma.

O questionário informativo coletou informações sobre o fluxo de alunos nessas escolas, isto é, quantos sujeitos haviam iniciado o ensino médio em outra escola. Os dados indicaram que 20 sujeitos da escola pública (21.3% da amostra) eram oriundos de outro estabelecimento, sendo 11 de outra escola pública e nove de alguma escola particular. Na outra escola, 3 vieram do ensino público e o mesmo número era proveniente de outro estabelecimento de ensino particular (5.6%).

Prova Van Hiele

A prova Van Hiele (Anexo II) resultou em quatro notas de zero a 10 (VH_1, VH_2, VH_3 e VH) e categorização em um dos níveis definidos no método como zero, um, dois e três (nível). Naturalmente, o nível dependeu do desempenho do aluno em cada subprova, categorizando-se como indefinido quando o sujeito não cumpriu gradualmente a seqüência dos níveis.

Notas nos níveis um, dois e três e nota ponderada

A distribuição da nota VH dos sujeitos não apresentou uma distribuição normal (*K-S* (201) = 0.13, *p* = .000)[8], mas a aplicabilidade do teste F pode ser garantida pelo número satisfatório de sujeitos (Bussab e Morettin, 1986). A representação gráfica apresentada na Figura 6 mostra a assimetria quanto à distribuição das notas obtidas a partir do desempenho dos sujeitos:

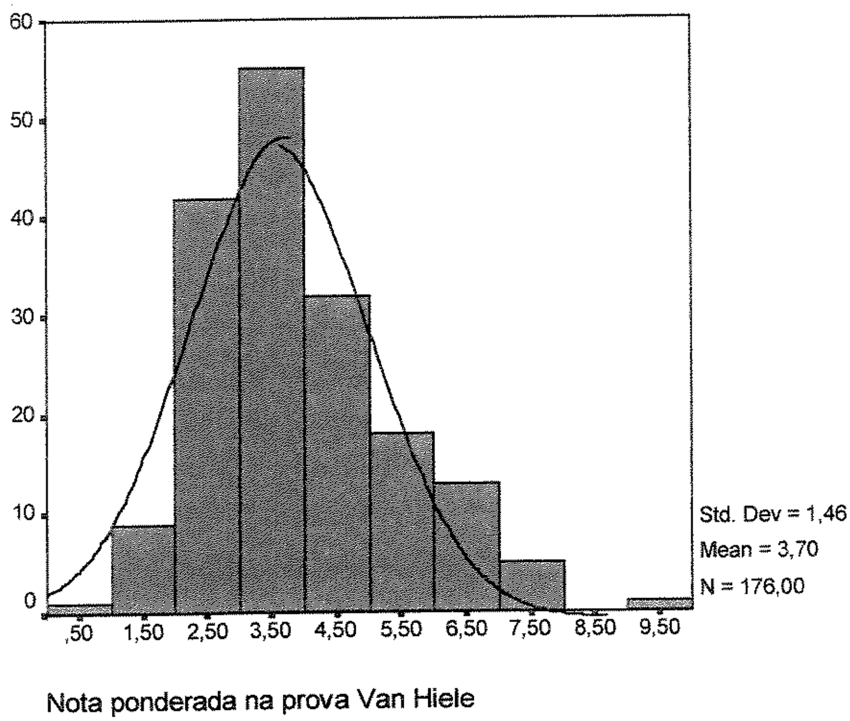


Figura 6: Distribuição das médias dos sujeitos, de acordo com o desempenho na prova Van Hiele – nota VH.

As médias dos sujeitos tenderam a ser mais baixas na medida que essa nota foi calculada a partir das notas nos níveis 1, 2 e 3 (VH_1, VH_2 e VH_3), sendo atribuídos pesos a cada uma delas. Devido ao crescente grau de dificuldade e o crescente valor nos pesos, essa ponderação forçou as notas para baixo.

[8] A hipótese nula H_0 deve ser aceita pois espera-se que a distribuição seja normal. Portanto, no teste Lilliefors espera-se encontrar p > .05.

Em uma outra análise, a distribuição das notas VH_1, VH_2 e VH_3 não apresentaram normalidade (*K-Ss* (201) = 0.221, 0.193, 0.244, *ps* = .000, respectivamente). A explicação residiu no fato de que cada uma dessas subprovas foi composta por apenas cinco questões, resultando em notas 0, 2, 4, 6, 8 ou 10. Diagramas de ramos e folhas (Anexo VI) revelam a distribuição das notas de cada sujeito.

Os dados observados na Tabela 6 mostram que o desempenho dos sujeitos não apresentou diferença significativa por tipo de escola (t (199) = 0.668, p = .505). Outras análises foram executadas para comparar a diferença de desempenho determinada pelo gênero (t (199) = 0.840, p = .402), a diferença de desempenho determinada pela turma (F(6, 194) = 2.084, p = .057) e por período (t (199) = 1.758, p = .080), sendo que não houve diferença entre as médias das notas dos sujeitos de acordo com cada um dos grupos em relação à nota ponderada.

A Tabela 5 mostra a média de desempenho dos sujeitos de cada escola, agrupados de acordo com o gênero, além do desvio padrão, os valores máximos e mínimos encontrados na amostra:

Tabela 5

Médias obtidas, pelos sujeitos, na prova VH de acordo com o gênero e a escola.

	Escola				
	Pública		**Particular**		
Estatísticas	**Masc**	**Fem**	**Masc**	**Fem**	**Geral**
M	4.3	3.7	3.7	3.8	3.8
SD	1.4	1.5	1.5	1.3	1.5
Mínimo	0.3	0.3	1.3	1.3	0.3
Máximo	7.3	7.3	9.0	7.3	9.0

A Figura 7 mostra o desempenho dos sujeitos quando foram analisadas cada uma dessas notas, todas variando de zero a 10. O decréscimo das barras indica o grau de dificuldade crescente das questões.

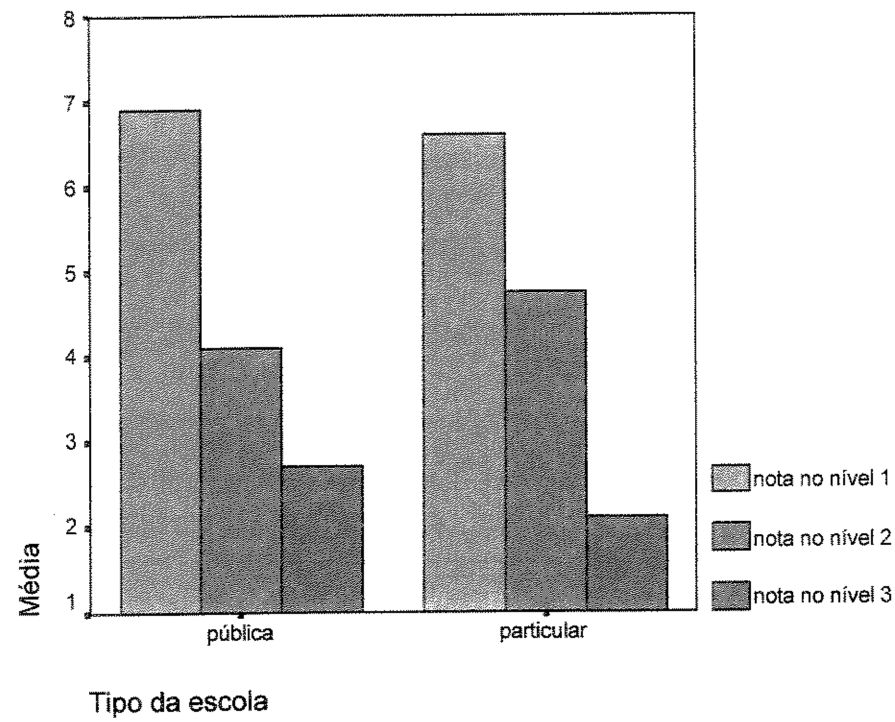


Figura 7: Médias das notas dos sujeitos nas provas VH_1, VH_2 e VH_3.

O outro critério – além do cálculo da nota VH a partir das notas obtidas nos níveis 1, 2 e 3 – referiu-se à classificação do sujeito em nível de desenvolvimento do pensamento em Geometria e derivou de certa forma das notas anteriormente citadas.

<u>Nível de desenvolvimento do pensamento em Geometria</u>

Para que o sujeito fosse enquadrado em um nível de desenvolvimento do pensamento em Geometria conforme proposto por Van Hiele, foi considerado o número mínimo de três questões corretas, entre as cinco de cada nível. A Tabela 6, a seguir, mostra a quantidade de sujeitos que se enquadraram em cada nível:

Tabela 6

Classificação dos sujeitos de acordo com os níveis de desenvolvimento do pensamento em Geometria x turmas de matrícula.

	Turmas							**Total**	
Nível	A_1	B_1	C_1	A_2	B_2	C_2	D_2	*n*	%
0	4	2	4	1	2	3	3	19	9.4
1	16	16	15	12	12	14	7	92	45.8
2	7	5	7	13	8	6	6	52	25.9
3	1	3	4	1	1	0	3	13	6.5
Indefinido	2	6	2	3	4	5	3	25	12.4

A análise das diferenças dos desempenho – segundo as variáveis gênero, tipo de escola, turma e período para esse critério de enquadramento – indicou que nenhuma delas foi siginificativa ($\chi^2 s$ (3, N = 176) = 6.581, (3, N = 176) = 4.203; (18, N = 176) = 16.629; (3, N = 176) = .527, ps = .087, .240, .549, .913, respectivamente). Em outras palavras, os desempenhos nesses grupos foram considerados equivalentes em relação ao enquadramento dos sujeitos em níveis de desenvolvimento do pensamento em Geometria.

Percepção de figuras geométricas

A prova de percepção de figuras geométricas (Anexo III) era composta por dez questões, sendo que apenas uma delas, a questão sete, apresentava três itens. A distribuição dessa nota foi normal, para toda a amostra (K-S (201) = 0.60, p = .073).

A nota foi calculada de zero a 10 e os sujeitos não apresentaram diferenças significativas no desempenho, as quais pudessem ser atribuídas ao gênero (t (199) = 0.989, p = .324), e ao tipo de escola (t (199) = -1.530, p = .128). Mas, quando os desempenhos foram analisados de acordo com as turmas e o período, encontraram-se valores significativamente diferentes (F(6, 194) = 8.294, p = .000) e (t(199) = 2.868, p= .005) respectivamente. Na realidade, as diferenças estão relacionadas ao desempenho diferenciado de uma das turmas.

Com relação ao período, os cursos diurnos obtiveram uma média mais alta que os cursos do período noturno, (*M* = 5.2, *SD* = 1,8, *M*[9] = 4.5, *SD* = 1,6). Uma outra diferença significativa encontrada foi entre as turmas. A análise indicou que a turma A_2, ou seja, a classe de ensino técnico diurno da escola particular, apresentou um desempenho significativamente melhor que as demais (Teste Tukey-HSD, com nível de significância de .05), como mostra a Tabela 7:

Tabela 7
Médias dos desempenhos dos sujeitos na prova PE de acordo com as turmas de matrícula.

Turma	***M***	***SD***	**Mínimo**	**Máximo**	***n***
A_1	5.0	1.6	2.1	7.9	30
B_1	4.6	1.3	2.4	6.4	32
C_1	4.6	2.0	1.2	8.1	32
A_2	6.7	1.4	2.9	8.8	30
B_2	4.9	1.7	1.2	7.9	27
C_2	4.3	1.5	1.9	7.1	28
D_2	4.2	1.6	1,2	9.0	22
Geral	4.9	1.8	1.2	9.0	201

Através da Tabela 7 e da Figura 8, é possível perceber que a turma A_2, além de um desempenho significativamente melhor em relação à media, também apresentou mediana acima, superior às demais turmas:

[9] *M* aparece nesse capítulo como abreviatura de média.

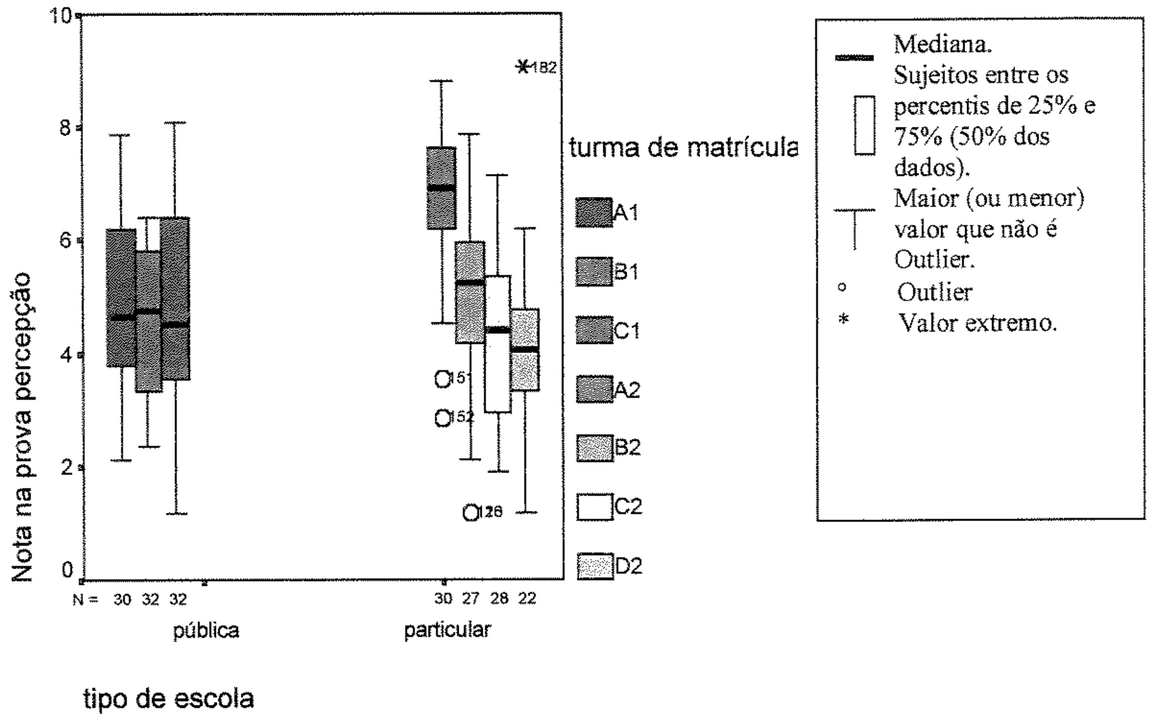


Figura 8: Box-plot do desempenho dos sujeitos na prova PE de acordo com a turma.

A Figura 8 mostra a discrepância do desempenho da turma A_2 em relação às outras turmas, já que a sua amplitude, composta por sujeitos que se encontram entre os percentis de 25% e 75%, está acima das demais. O presente estudo não conseguiu determinar qual foi o motivo pelo qual esse grupo apresentasse um desempenho diferenciado em relação às outras turmas, quando foram avaliados o desempenho nas provas que avaliam a percepção geométrica. É conveniente lembrar que esse é o resultado de uma classe do ensino diurno da escola particular, de formação técnica.

O sujeito 182 se destacou como um valor extremo[10], cuja nota obtida foi de 9.05. Ele é um sujeito do gênero masculino, de 17 anos, e não é repetente. Apesar do desempenho dos sujeitos 151, 152 e 126, ter sido destacado, seu desempenho não foi abaixo do grupo como um todo.

Outra variável analisada foi o tempo gasto pelos sujeitos para solucionarem a prova. A análise foi feita através da correlação de Pearson, que encontrou uma relação positiva e significativa entre a nota e o tempo (r = .205, p = .003), indicando que, nesse

[10] Valores maiores que três comprimentos da caixa, a partir do percentil 75% (Cazorla, 1998)

instrumento, os alunos mais habilidosos, que apresentaram o melhor desempenho, gastaram mais tempo na realização da prova. Quanto menor o tempo de solução, pior o desempenho, como mostra a Figura 9:

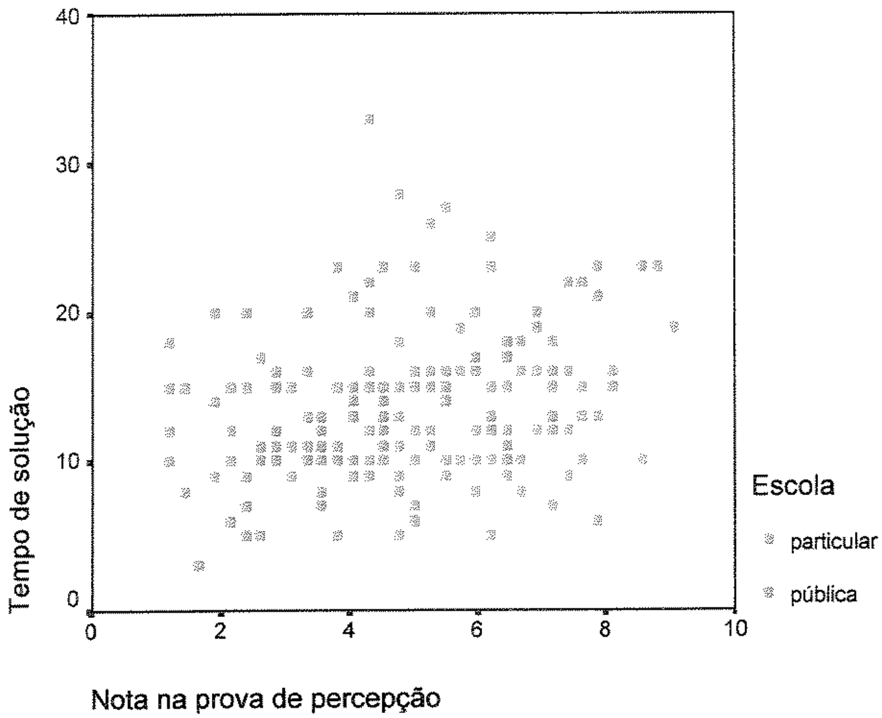


Figura 9: Diagrama de dispersão relativo à nota obtida na prova PE e o tempo gasto na solução.

Habilidade para conceitos espaciais

Esse constructo, definido por Krutetskii (1976) como a habilidade de representar mentalmente uma situação a partir de uma descrição verbal, sem o apoio de um desenho ou de um esquema, foi avaliado a partir do desempenho dos sujeitos na série XXV, "Problemas relacionados a conceitos espaciais", que é dividida em três partes, relativas à Geometria Plana, Geometria Espacial e Teste de Figuras, aqui chamadas de prova de conceitos espaciais A (CE_A), prova de conceitos espaciais B (CE_B) e prova de conceitos espaciais C (CE_C), respectivamente, além da nota geral na prova (CE).

A distribuição das notas CE_A, CE_B, CE_C e CE não apresentaram distribuições normais (*K-S* (201), *ps* = .000, .000, .000, .015 respectivamente), provavelmente devido à dificuldade da prova. As notas apresentaram médias extremamente baixas como mostra a Tabela 8[11]:

Tabela 8

Descrição do desempenho dos sujeitos nas provas CE_A, CE_B, CE_C e CE de acordo com a escola.

Estatís-ticas	Provas/ Escolas							
	CE_A		CE_B		CE_C		CE	
	Pública	Particular	Pública	Particular	Pública	Particular	Pública	Particular
M	2.0	2.1	0.1	0.3	3.2	2.5	1.8	1.7
SD	1.4	1.8	0.2	0.5	2.3	2.1	0.9	1.0
Mínimo	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2	0.0
Máximo	5	7	1.1	2.2	8.5	7.8	4.5	5.1

Os dados mostrados na Tabela 8 indicaram uma discrepância no que se refere ao desempenho segundo o tipo de escola, ocorrendo uma alternância quanto ao melhor desempenho entre escola pública e particular, em duas subprovas. Ainda em relação a essa variável, as subprovas B e C apresentaram diferenças de desempenho significativas para o nível escolhido nesta pesquisa (*ts* (199) = -4.197, 2.237, *ps* = .000, .026, em ordem), diferentemente da subprova A e da nota geral (*ts* (199) = -0.366, 0.921, *ps* = .714, .358, respectivamente).

Nesse sentido, essa parte do trabalho dedicou-se a explorar também as diferenças de desempenho nas prova CE_A, CE_B, CE_C e CE dos sujeitos segundo as variáveis gênero, curso e período.

Em relação ao gênero, não foram encontradas diferenças significativas de desempenho em relação a nenhuma das notas obtidas através desse instrumento (*ts* (199) = 1.16, -0.201, 1.695, -0.669, *ps* = .247, .841, .92, .504).

Quando os grupos foram comparados de acordo com os períodos, a única diferença estatisticamente significativa foi com relação à nota CE_B (t (199) = -2.575, p = 0,011), sendo que o cursos noturnos apresentaram um desempenho melhor (M = 0,33, SD = 0,47) que os cursos diurnos (M = 0,18, SD = 0,38). Em uma análise mais refinada,

[11] O Anexo VII apresenta os histogramas com a distribuição das notas CE_A, CE_B, CE_C e CE.

comparando o desempenho entre as turmas, os resultados indicaram diferenças significativas para as notas CE_A, CE_B e CE (*Fs*(6, 194) = 2.487, 5.000, 1.995, *ps* = .024, .000, .025), mas não para a nota CE_C (*F* (6, 194) = 2.475, *p* = .068). As diferenças em cada grupo podem ser assim resumidas (Teste Tukey - HSD, com nível de significância .05):

- Na prova de conceitos espaciais A (CE_A), as diferenças estatisticamente significativas foram entre as turmas A_2 e C_2, respectivamente as médias mais altas e mais baixas (desvio padrão entre parênteses) 2.9, (2.2) e 1.5 (1,3).
- Na prova de conceitos espaciais B (CE_B), as diferenças foram significativas em relação à turma D_2, desempenhando-se melhor (*M* = 0.5, *SD* = 0.6) que as turmas da escola pública, a saber, A_1, B_1 e C_1 (*M* = 0.2, *SD* = 0.3, *M* = 0.04, *SD* = 0.2, *M* = 1.2, *SD* = 0.6).
- Na subprova B (CE_B), a turma A_2 também apresentou uma diferença significativa de desempenho apenas em relação a turma B_1, o que era esperado já que este foi o grupo com a menor média nessa prova.
- E, finalmente, na nota geral de conceitos espaciais (CE), foi encontrada uma diferença significativa de desempenho entre as turmas A_1 e B_2, sendo que os sujeitos da primeira turma apresentaram desempenho melhor que os da segunda (*M* = 2.0, *SD* = 0,8, *M* = 1.3, *SD* = 0.7).

Essa prova apresentou problemas, pois as notas foram extremamente baixas. Além disso, alguns dos sujeitos não conseguiram acertar nenhuma das questões. Isso parece indicar que a exigência da habilidade para trabalhar no plano mental com conceitos espaciais, foi o que produziu maior dificuldade para os alunos na tentativa de solução.

As questões a seguir não foram resolvidas corretamente por nenhum dos sujeitos:

- Questão 8, CE_A: "Um playground cuja largura é 5 vezes menor que o seu comprimento, tem todos os lados cercados por uma cerca de largura constante. A borda externa da cerca é 24 m maior que a borda interna, e a área da cerca é 468 m^2. Determine a área do playground."
- Questão 4, CE_B: "Um quadrado é rotacionado sobre um de seus lados. Determine o tipo de sólido de rotação."
- Questão 9, CE_B: "Imagine um sólido do tipo de um anel (uma aliança, um pneu). Este sólido é seccionado por 4 planos paralelos passando: a) através do eixo do anel; b)

através do ponto médio do raio interno do anel; c) através da extremidade do raio interno do anel; d) eqüidistante das extremidades dos raios internos e externos. Represente (mesmo aproximadamente) a forma de cada secção".

- Questão 12, CE_B "Como estão situados dois segmentos no espaço se eles estão projetados: a) sobre um ponto; b) sobre um segmento; c) sobre dois pontos; d) sobre um segmento e um ponto fora dele?"
- Questão 13, CE_B "Como está situado um triângulo retângulo no espaço em relação ao plano de projeção se está projetado: a) sobre um segmento de reta; b) sobre um triângulo retângulo; c) sobre um triângulo obtusângulo?"
- Questão 14, CE_B: Um cubo de madeira pintado com uma aresta de 10 cm está dividido em pequenos cubos, cada um com 1 cm de aresta. Quantos cubos pequenos têm uma face pintada? a) duas? b) três? c) nenhuma face pintada?"

Além dessas seis questões, outras quatro mereceram atenção pois foi encontrado apenas um acerto total na questão 10 (CE_B) e acerto parcial nas demais, a saber:

- Questão 5, CE_B: "Que superfície se forma ao se rotacionar um triângulo retângulo sobre um cateto?"
- Questão 6, CE_B: "Qual é o sólido obtido pela rotação de um triângulo retângulo sobre um eixo paralelo a um de seus catetos?"
- Questão 10, CE_B: "Imagine um cubo no qual uma esfera está inscrita (portanto, tangenciando os pontos médios das faces do cubo) e uma esfera está circunscrita (tocando os vértices). Desenhe a forma da secção por um plano que passa paralelo a dois lados do cubo, através do centro da esfera interna".
- Questão 11, CE_B: "Como está situado um segmento no espaço em relação ao plano de projeção se: a) está projetado sobre um ponto; b) sua projeção é igual ao próprio segmento; c) sua projeção é menor que o próprio segmento?"

Outro dado referiu-se ao item (a) da questão 1 da subprova B. Quando foi perguntado aos sujeitos quantos vértices, arestas e faces possui um cubo, 70.6% deles não souberam enumerar nenhum desses elementos, parecendo indicar que esses alunos não possuem as habilidades básicas e os conhecimentos mínimos a respeito dos sólidos geométricos.

Esse objeto espacial, o cubo, é a base da construção da prova de raciocínio espacial da BPR-5. Nesse instrumento era necessário conhecer as faces de um cubo, já que todas as questões avaliam o movimento desse sólido, sendo identificado através da mudança de posição de suas faces.

Foi determinada também a correlação entre o tempo de solução e a nota na prova ($r = .354$, $p = .000$), significativa e positiva. A Figura 10 mostra a relação gráfica entre os sujeitos da escola pública e particular, entre o desempenho dos sujeitos nessa prova e o tempo gasto para a sua solução:

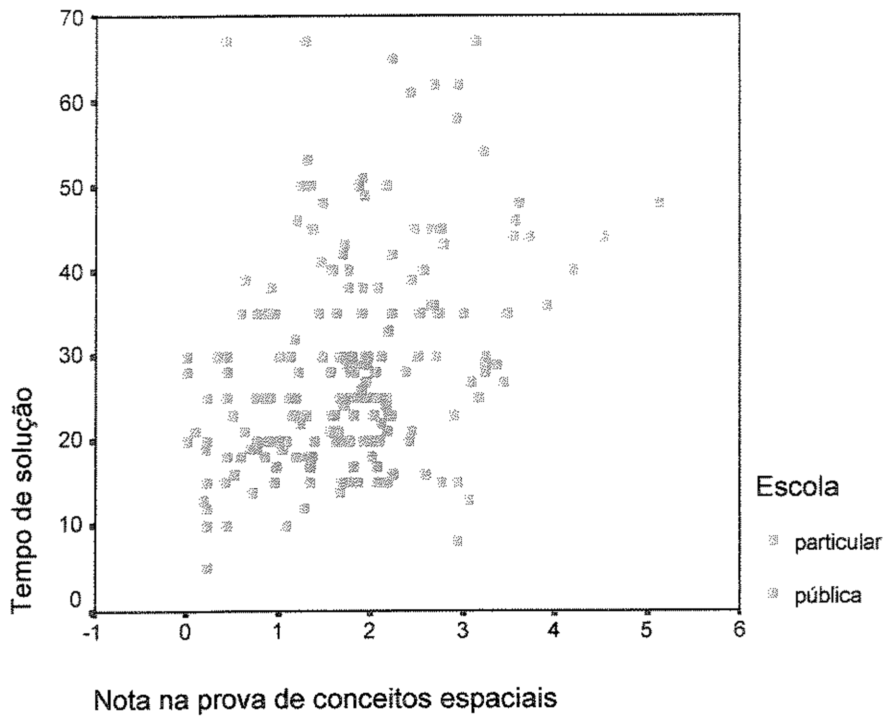


Figura 10: Diagrama de dispersão entre a nota obtida na prova de CE segundo o tempo de solução.

Sendo essa relação significativa, em geral os sujeitos que tiveram um desempenho melhor na prova foram aqueles que gastaram mais tempo para a solução dos problemas. Não se pôde afirmar que esta seja a causa das diferenças de desempenho, mas pode estar indicando que os sujeitos que, desde o início, não conseguiram resolver as questões, não mostraram persistência na solução dos problemas.

Raciocínio Espacial

A aplicação desse teste psicológico teve por objetivo avaliar a capacidade de raciocínio espacial dos sujeitos, independentemente de um conteúdo específico. Os sujeitos responderam a vinte questões, com um tempo limite estabelecido em 18 minutos. Muitos sujeitos não terminaram a prova devido a essa restrição, mas ela constituiu-se num fator importante para destacar os sujeitos que conseguiram executar a tarefa no tempo determinado.

A distribuição da nota obtida no teste de raciocínio espacial não apresentou normalidade (*K-S* (201) = 0.65, *p* = .038). O histograma mostrado na Figura 11 permite verificar que a curva normal está muito próxima da simetria, o que indicaria uma proximidade quanto a normalidade da distribuição:

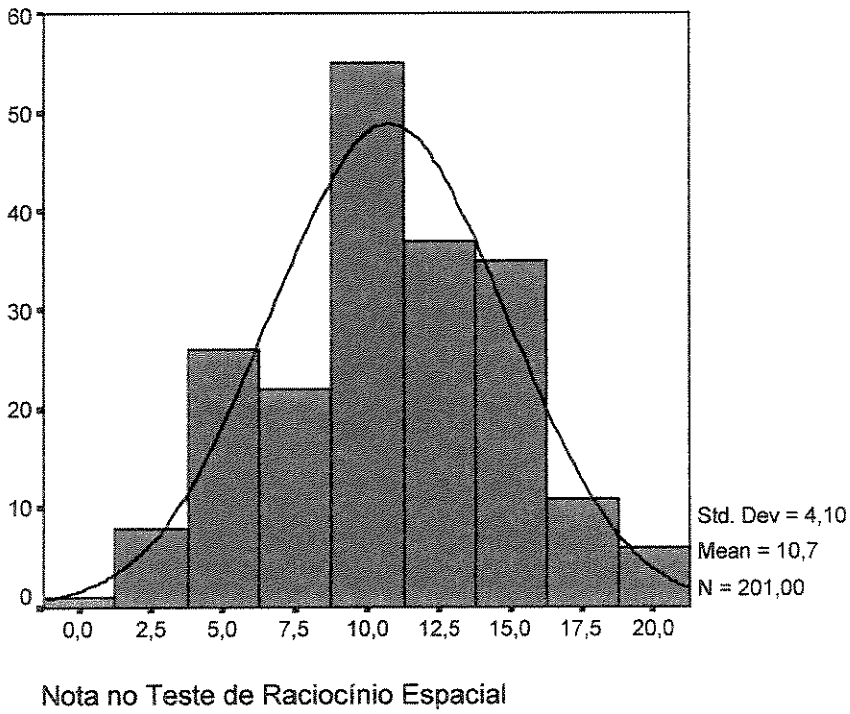


Figura 11: Histograma das notas dos sujeitos obtidas na prova RE.

Uma outra análise, usando como fator a variável escola, mostrou que a distribuição era normal para a escola particular (*K-S* (107) = 0.82, *p* = .075), o que não aconteceu com as notas na escola pública (*K-S* (94) = 0.111, *p* = .006). Os diagramas de ramos e folhas a respeito destes resultados encontram-se no Anexo VI.

Foram analisadas as diferenças de desempenho dos sujeitos segundo a escola, o gênero, o período e a turma. Em relação às três primeiras variáveis, não foram encontradas diferenças significativas de desempenho no teste (*ts* (199) = -0.506, 0.502, 1.531, *ps* = .614, .616, .127, respectivamente). Quando as turmas foram analisadas, foi encontrada diferença significativa de desempenho ($F(6, 194) = 2.168$, $p = .048$). O Teste Tukey HSD, com nível de significância .05, indicou a turma A_2 como a que teve o melhor desempenho, distinguindo-se das demais turmas.

Tabela 9

Médias do desempenho dos sujeitos na prova RE de acordo com a turma

Turma	***M***	***SD***	**Mínimo**	**Máximo**
A_1	10.0	4.5	2	19
B_1	11.7	3.3	6	18
C_1	10.0	4.5	2	18
A_2	12.7	3.3	4	20
B_2	10.0	4.3	2	19
C_2	10.6	3.6	3	19
D_2	9.7	4.4	0	19
Geral	10.7	4.1	0	20

Além da Tabela 9 indicar a maior média para o menor desvio padrão da classe A_2, inferindo assim sobre o desempenho, acima da média dos demais, a Figura 12 mostra que a amplitude dos percentis entre 25% e 75%, em relação ao desempenho dessa classe, encontra-se acima da amplitude das demais turmas. Em suma, não só em relação à média mas também em relação à mediana, a turma A_2 apresentou um desempenho mais satisfatório:

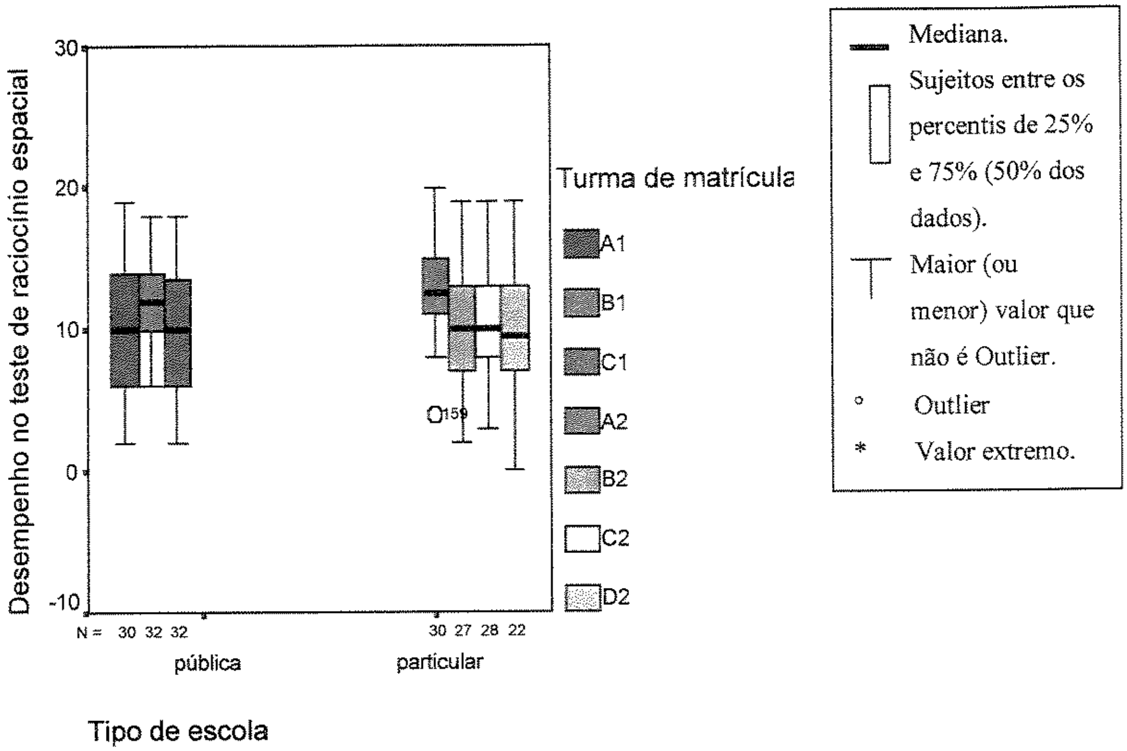


Figura 12: Box-plot relativo ao desempenho dos sujeitos na prova RE.

Os resultados aqui apresentados, relativos ao teste de raciocínio espacial, mostram a nota calculada de zero a 20, obtida a partir da soma da pontuação dos sujeitos em cada uma das 20 questões, tendo sido atribuído um ponto para cada questão correta. O estudo de validação do teste, apresentado na forma de manual técnico (Primi e Almeida, 2000), permitiu a normalização dos escores dos sujeitos, definida como escore padrão normalizado (EPN), com *M* = 100 e *SD* = 15. Para a amostra dessa pesquisa foram utilizados dois procedimentos. Em primeiro lugar, o escore de cada sujeito foi transformado em um EPN de acordo com a tabela fornecida pelo manual técnico, a fim de se saber como foi o desempenho dos sujeitos em relação à amostra de validação do teste. A seguir, foi feita a normalização, de acordo com os mesmos critérios de média e desvio padrão para os sujeitos dessa pesquisa, escore que foi chamado de EPN_2. A Tabela 10 fornece os valores comparativos desses dois critérios:

Tabela 10

Escores Padrões Normalizados da amostra segundo dois critérios

Escola	Estatísticas	EPN	EPN_2
Pública	*M*	90.2	99.3
	SD	13.6	14.3
Particular	*M*	92.2	100.5
	SD	15.9	15.7
Total	*M*	91.3	100.0
	SD	14.9	15.0

Analisando o EPN, os sujeitos dessa amostra apresentaram um desempenho abaixo da média dos sujeitos que participaram da validação do teste. Para verificar se essa diferença entre as médias do EPN e do EPN_2 da amostra era estatisticamente significativa, foi aplicado o teste t para amostra emparelhada, tendo sido obtida uma resposta positiva ($t\,(200) = -24.227$, $p = .000$). Outras análises, agrupando os sujeitos de acordo com as variáveis escola, gênero ou período não foram feitas, pois repetiriam os resultados já descritos, calculados a partir da nota RE.

De modo geral, os sujeitos apresentaram desempenhos muito semelhantes neste teste de raciocínio espacial, quando avaliados em relação às variáveis do estudo. A última análise a ser detalhada é a que tem relação com a idade dos sujeitos.

A variável idade

Van Hiele (1986) forneceu alguns indícios de que o desenvolvimento biológico faz parte do desenvolvimento do pensamento, mas não indicou precisamente em que idades ocorrem mudanças, nem tão pouco que tipos exatamente ocorrem e de que forma.

A variável idade, nesse sentido, foi então excluída da análise geral das variáveis, para receber um outro tipo de tratamento, em fases de idade, cuja descrição se encontra na Tabela 11:

Tabela 11

Distribuição dos sujeitos de acordo com a fase de idade.

Fase	Faixa etária	*n*	%	% acumulada
Em fase	16-17 anos	113	56.2	56.2
Leve defasagem	18-19 anos	65	32.3	88.5
Defasagem acentuada	Acima de 20 anos	23	11.5	100
Total		201	100.0	100.0

Os sujeitos foram denominados dessa forma, segundo a relação idade por série. Foram analisados os dados obtidos nos instrumentos e comparados os desempenhos dos sujeitos de acordo com a classificação executada, mostrada na Tabela 11. Não houve diferença significativa em relação ao nível de desenvolvimento (χ^2 (8, N = 201) = 9.098, p = .344), em relação às notas VH_1, VH_2 e VH_3 (Fs (2, 198) = 0.837, 2.668, 2.508, ps = .434, .072, .084, em ordem), e a nenhuma das notas obtidas através da prova de CE_A, CE_B, CE_C e CE (Fs (2, 198) = 1.954, 0.90, 1.419, 2.366, ps = .144, .914, .244, .097).

Seguindo com as análises, foram encontradas diferenças significativas em relação à nota PE (F(2, 198) = 8.258, p = .000) e à nota VH (F(2, 198) = 4.261, p = .015), além do desempenho na prova RE (F (2, 198) = 5.711, p = .048). A Tabela 12 indica o desempenho dos sujeitos nesses instrumentos:

Tabela 12

Médias obtidas nas provas VH, PE e de RE segundo as fases de idade dos sujeitos.

	VH		PE		RE	
Fase	***M***	***SD***	***M***	***SD***	***M***	***SD***
Em fase	4.0	1.5	5.4	1.8	11.5	4.1
Leve defasagem	3.4	1.3	4.5	1.6	10.1	3.8
Defasagem acentuada	3.1	1.4	4.2	1.8	8.1	4.1
Geral	3.8	1.5	4.9	1.8	10.7	4.1

Para verificar quais eram as que se destacaram (em desempenho superior ou inferior) foi realizado o Teste Tukey – HSD, sendo que os resultados indicaram que os sujeitos classificados em fase formaram um grupo que se destacou em relação ao resto da amostra. De forma mais específica, pode-se dizer que, na prova de percepção, os sujeitos em fase apresentaram um desempenho diferente em relação ao grupo de leve defasagem; e que, no teste de raciocínio espacial, houve uma distinção entre os grupos em fase e defasagem acentuada. Neste estudo não há possibilidade de inferir com certeza qual é a razão dessa diferença, mas é provável que os sujeitos em fase estariam freqüentando a escola de forma contínua, enquanto que os demais, com leve ou acentuada defasagem, ou são alunos repetentes em alguma série (portanto menos habilidosos) ou teriam interrompido seus estudos em algum momento de sua vida escolar.

Enquadramento em um nível de desenvolvimento em Geometria

A intenção, nesse tópico, foi analisar as diferenças de desempenho dos alunos enquadrados em um nível de desenvolvimento do pensamento em Geometria, em relação às notas VH_1, VH_2, VH_3, VH, PE, CE_A, CE_B, CE_C, CE e RE. Os sujeitos classificados como indefinidos também foram considerados nessa análise.

A Tabela 13 mostra os resultados obtidos através da análise de variância (ANOVA) da prova VH_1, cujo objetivo era saber se existiam diferenças de desempenho segundo o nível de desenvolvimento:

Tabela 13

Distribuição das médias da pontuação na prova VH_1, de acordo com o nível de desenvolvimento em Geometria[12]

Nível	*n*	*M*	*SD*	Estatística	*p*
0	19	3.6	0.8		
1	92	7.4	1.4		
2	52	7.5	1.4	$F(4, 196) =$	.000
3	13	8.0	1.6	55.389	
Indefinido	25	4.5	1.3		
Total	201	6.7	1.9		

A Tabela 13 mostra diferenças estatisticamente significativas entre níveis (Teste Tukey, com nível de significância $p \leq .05$) sendo que os sujeitos classificados no nível zero ou como indefinidos obtiveram as menores médias em relação ao restante da amostra, formando um grupo diferente em relação aos demais níveis.

Na verdade, em relação às provas VH_1, VH_2, VH_3 e VH, eram esperadas diferenças significativas entre os grupos, já que foram comparados diferentes critérios em um mesmo instrumento.

Tabela 14

Distribuição das médias da pontuação na prova VH_2, de acordo com o nível de desenvolvimento em Geometria.

Nível	*n*	*M*	*SD*	Estatística	*p*
0	19	2.4	13		
1	92	3.0	1.2		
2	52	6.9	1.2	$F(4, 196) =$	.000
3	13	6.9	1.3	99.242	
Indefinido	25	4.9	1.6		
Total	201	4.5	2.2		

[12] Nas tabelas de 13 a 21, os grupos estatisticamente diferentes tiveram suas células hachuradas na cor cinza. As diferentes graduações indicam os grupos resultantes.

Com o uso do teste Tukey, não foram encontradas diferenças significativas apenas entre os grupos que formam os níveis 0 e 1 e entre os níveis 2 e 3. Segundo a prova VH_2, a amostra foi dividida em três grupos estatisticamente diferentes: um formado pelos sujeitos de níveis 0 e 1, outro formado pelos sujeitos de níveis 2 e 3 e um terceiro formado pelo grupo dos indefinidos. Isso parece indicar que o desempenho dos sujeitos nas cinco questões da prova VH_2 foi gradual em relação ao nível em que o indivíduo foi enquadrado.

Essa mesma análise foi executada em relação à prova VH_3, cujos resultados são mostrados na Tabela 15:

Tabela 15

Distribuição das médias da pontuação na prova VH_3 de acordo com o nível de desenvolvimento em Geometria.

Nível	***n***	***M***	***SD***	**Estatística**	***P***
0	19	17	1.7		
1	92	1.7	1.4		
2	52	1.9	1.6	$F(4, 196) =$ 33.906	.000
3	13	6.5	0.9		
Indefinido	25	4.5	2.8		
Total	201	2.4	2.2		

Em relação à prova VH_3, as diferenças de desempenho foram estatisticamente significativas entre os grupos formados pelos sujeitos de níveis 0, 1 e 2, outro grupo formado pelos sujeitos de nível 3 e o último formado pelo grupo dos indefinidos.

A próxima análise referiu-se à comparação entre dois critérios de correção da prova Van Hiele: o nível e a nota VH, cujos resultados são apresentados na Tabela 16:

Tabela 16

Distribuição das médias da pontuação na prova VH de acordo com o nível de desenvolvimento em Geometria.

Nível	***n***	***M***	***SD***	**Estatística**	***p***
0	19	2.2	1.0		
1	92	3.1	0.8		
2	52	4.5	0.9	$F(4, 196) =$ 74.669	.000
3	13	6.8	0.8		
Indefinido	25	4.6	1.3		
Total	201	3.8	1.5		

Os resultados apresentados na Tabela 16, em conjunto com os resultados do teste Tukey, implicaram em diferenças significativas de desempenho em praticamente todos os grupos, com exceção do grupo de nível 2 e dos indefinidos, que formaram um único grupo. Isso pode estar indicando que os sujeitos que não foram classificados em nenhum grupo estariam mais próximos do nível 2. Como era esperado, apesar dos critérios de computação serem diferentes, todos os sujeitos agrupados em um determinado nível apresentaram diferenças de desempenho em relação ao desempenho geral na prova.

O próximo instrumento a ser avaliado é a prova de percepção (PE) em relação aos níveis de desenvolvimento em Geometria. A distribuição das médias nessa prova, junto com os resultados estatísticos, são apresentados na Tabela 17:

Tabela 17

Distribuição das médias da pontuação na prova PE de acordo com o nível de desenvolvimento em Geometria.

Nível	***n***	***M***	***SD***	**Estatística**	***p***
0	19	3.5	1.7		
1	92	4.7	1.6		
2	52	5.9	1.4	$F(4, 196) =$ 12.804	.000
3	13	6.4	1.7		
Indefinido	25	4.4	1.9		
Total	201	4.9	1.8		

Novamente, foram encontradas diferenças significativas entre os grupos, segundo os níveis ($p < .05$). Em relação à prova PE, foram dois os grupos resultantes: um formado pelos níveis 0 e 1 e pelo grupo indefinido, e um segundo grupo formado pelos níveis 2 e 3.

Com relação à análise dos dados obtidos através da prova de conceitos espaciais, foi aplicada a análise de variância da prova CE_A, com o objetivo de verificar se existiriam diferenças de desempenho determinadas pelo nível de desenvolvimento:

Tabela 18

Distribuição das médias da pontuação na prova CE_A de acordo com o nível de desenvolvimento em Geometria.

Nível	***n***	***M***	***SD***	**Estatística**	***p***
0	19	1.5	1.2		
1	92	2.0	1.7		
2	52	2.2	1.5	$F(4, 196) =$ 2.613	.037
3	13	3.3	2.6		
Indefinido	25	2.1	1.4		
Total	201	2.1	1.7		

Houve diferença estatisticamente significativa entre os sujeitos do nível 0 e os sujeitos do nível 3, quando foram comparados os seus desempenhos em relação à prova CE_A. Outra prova de conceitos espaciais, CE_B, também teve seus resultados analisados segundo os níveis de desenvolvimento em Geometria, como descrito na Tabela 19:

Tabela 19

Distribuição das médias da pontuação na prova CE_B de acordo com o nível de desenvolvimento em Geometria.

Nível	*n*	*M*	*SD*	Estatística	*p*
0	19	0.2	0.3		
1	92	0.2	0.3		
2	52	0.3	0.4	$F(4, 196) =$ 3.051	.018
3	13	0.6	0.8		
Indefinido	25	0.3	0.5		
Total	201	0.2	0.4		

Houve diferença estatisticamente significativa ($p < .05$) e o teste Tukey indicou que os sujeitos do nível 3 foram aqueles que se diferenciaram em relação à prova CE_B. Em relação à prova CE_C, não foram encontradas diferenças significativas entre os grupos (F (4, 196) =1.545, $p = .191$). Quando analisados os resultados desse instrumento, este foi o único caso em que não foram encontradas diferenças de desempenho de acordo com os níveis dos sujeitos. Em seguida, a prova de conceitos espaciais foi analisada como um todo (CE), conforme mostrado na Tabela 20:

Tabela 20

Distribuição das médias da pontuação na prova CE de acordo com o nível de desenvolvimento em Geometria

Nível	*n*	*M*	*SD*	Estatística	*p*
0	19	1.3	0.8		
1	92	1.6	0.9		
2	52	1.9	0.9	$F(4, 196) =$ 3.496	.009
3	13	2.3	1.2		
Indefinido	25	1.8	0.7		
Total	201	1.7	0.9		

Foram encontradas diferenças significativas entre os níveis extremos, ou seja, o grupo de sujeitos de nível 1 e o grupo de sujeitos de nível 3 eram estatisticamente diferentes em desempenho na prova de conceitos espaciais. A Tabela 21 indica a distribuição dos sujeitos em relação aos níveis de desenvolvimento e o desempenho no último instrumento analisado, a prova de raciocínio espacial, RE:

Tabela 21
Distribuição das médias da pontuação na prova RE de acordo com o nível de desenvolvimento em Geometria.

Nível	***n***	***M***	***SD***	**Estatística**	***p***
0	19	6.5	3.3		
1	92	10.4	3.8		
2	52	12.2	4.1	$F(4, 196) =$ 8.799	.000
3	13	11.8	4.1		
Indefinido	25	11.6	3.1		
Total	201	10.7	4.1		

A diferença significativa estava no grupo de nível 0. O que ocorreu de atípico em tal distribuição foi que o crescimento gradativo das médias segundo os níveis 0, 1, 2 e 3 não foi obedecido, sendo que os sujeitos do nível 2 obtiveram médias maiores que os sujeitos do nível 3, mas não suficientemente significativa (Teste Tukey, com nível de significância $p \leq .05$).

Esse tópico teve por objetivo analisar os dados dos sujeitos segundo o enquadramento em níveis de desenvolvimento do pensamento em Geometria. Com exceção do último instrumento, o RE, o desempenho dos sujeitos manteve a gradação entre desempenho e níveis. O próximo item teve por objetivo verificar se existiam relações lineares entre os instrumentos, quando comparadas as variáveis duas a duas.

Relações lineares entre os constructos

Em seguida, procurou-se estabelecer a relação entre o nível de desenvolvimento do pensamento em Geometria, a percepção de figuras geométricas e a habilidade para conceitos espaciais. Nesse sentido, foram determinadas primeiramente as relações, evidenciadas pelas correlações de Pearson (*r*), mostradas na Tabela 22:

Tabela 22

Correlações de Pearson entre as notas obtidas através da prova VH, prova PE, prova CE e RE.

		VH	PE	CE	RE
VH	*r*	1.000	0.445	0.287	0.358
	p		0.000	0.000	0.000
PE	*r*		1.000	0.361	0.444
	p			0.000	0.000
CE	*r*			1.000	0.433
	p				0.000
RE	*r*				1.000
	p				

As células hachuradas indicam quais resultados foram considerados estatisticamente significativos. Todas as relações foram altamente significativas (*ps* = .000), o que indica que os sujeitos que tiveram um bom desempenho em uma prova, em geral, obtiveram o mesmo resultado nas outras provas, enquanto que os sujeitos que obtiveram um mau desempenho em um instrumento, mantiveram essa posição nos demais, indicando uma relação linear entre as provas. Em outras palavras, os sujeitos apresentaram desempenho semelhante em provas que avaliaram a percepção de figuras geométricas, em provas que avaliaram a habilidade para manipular mentalmente conceitos espaciais, em provas que avaliaram o raciocínio espacial e em provas que avaliaram o nível de desenvolvimento do pensamento em geometria.

Foi feita uma outra análise relativa às subprovas, isto é, os mesmos instrumentos foram analisados, porém com outro enfoque, mais específico, a fim de se saber se as relações indicadas na Tabela 22 continuariam existindo. A Tabela 23 mostra as correlações de Pearson calculadas para as variáveis VH_1, VH_2, VH_3, PE, CE_A, CE_B, CE_C e RE:

Tabela 23

Correlações de Pearson entre as notas obtidas através da prova Van Hiele (VH_1, VH_2 e VH_3), prova de percepção (PE), prova de conceitos espaciais (CE_A, CE_B e CE_C) e raciocínio espacial (RE).

		VH_1	VH_2	VH_3	PE	CE_A	CE_B	CE_C	RE
VH_1	*r*	1.000	0.113	-0.037	0.361	0.139	0.030	0.087	0.281
	p		0.110	0.604	0.000	0.049	0.677	0.221	0.000
VH_2	*r*		1.000	0.155	0.392	0.192	0.194	0.120	0.354
	p			0.028	0.000	0.006	0.006	0.089	0.000
VH_3	*r*			1.000	0.220	0.231	0.099	0.028	0.154
	p				0.002	0.001	0.162	0.690	0.029
PE	*r*				1.000	0.472	0.201	0.064	0.444
	p					0.000	0.004	0.368	0.000
CE_A	*r*					1.000	0.298	-0.063	0.302
	p						0.000	0.375	0.000
CE_B	*r*						1.000	0.040	0.126
	p							0.577	0.076
CE_C	*r*							1.000	0.298
	p								0.000
RE	*r*								1.000
	p								

Quando os alunos foram avaliados de acordo com o desempenho na totalidade de um instrumento, foram verificadas relações lineares. Todavia, quando os instrumentos foram tomados como subprovas, nem sempre esse tipo de relação foi mantida.

A nota CE_C foi a que menor quantidade de relações significativas apresentou, apenas com a prova de raciocínio espacial. Ela não tem relação significativa nem mesmo com as outras subprovas A e B do mesmo instrumento, que em princípio avaliam o mesmo constructo. Isso talvez ocorra pelo modo de apresentação das questões em cada prova, as duas primeiras com enunciado verbal, e a outra como teste de figuras.

Em uma investigação mais refinada, foram executados diagramas de dispersão entre a nota de conceitos espaciais C e as demais, a fim de constatar se haveriam outras formas de relação entre essas variáveis. Constatou-se uma quantidade razoável de notas próximas de zero que poderiam estar influenciando tais cálculos. Foram então eliminados os sujeitos que apresentaram um rendimento abaixo de 0.5 na prova CE (5% da nota máxima dez, possível de ser obtida), resultando em *n* = 160. Uma nova matriz de correlações de Pearson foi calculada, sendo que além da relação significativa entre a nota de conceitos espaciais C e a de raciocínio espacial, houve outra também entre a nota no nível 1 de Van Hiele e a nota de conceitos espaciais ($r = .169$, $p = .032$).

Quando analisadas as notas obtidas na prova Van Hiele, foi encontrada relação significativa somente entre os níveis 2 e 3. E entre as subprovas de conceitos espaciais, a única relação significativa foi entre a habilidade para conceitos espaciais no plano e no espaço (CE_A e CE_B). Houve um maior número de relações significativas entre a habilidade de percepção e o raciocínio espacial. A percepção não foi relacionada apenas à habilidade para conceitos espaciais, apresentada na forma de figuras (CE_C), e o raciocínio espacial não foi relacionado aos conceitos espaciais em relação à Geometria Espacial (CE_B).

O fato da percepção não estar relacionada ao teste que avaliou os conceitos espaciais na forma de figuras (CE_C) pode indicar que, quando a habilidade para conceitos espaciais é requerida nessa forma, ela pede uma habilidade de manipulação mental dos elementos que é diferente da habilidade perceptual.

Como o problema de pesquisa buscava saber "quais as relações", foram usados outros testes estatísticos para verificar, além das relações existentes, como elas ocorriam e o que estaria fundamentando tais relações. A análise fatorial foi escolhida para tal investigação.

Análise Fatorial

Foram escolhidas para a primeira análise as variáveis: nota no nível 1 (VH_1), nota no nível 2 (VH_2), nota no nível 3 (VH_3), nota na prova de percepção (PE), nota de conceitos espaciais A (CE_A), nota de conceitos espaciais B (CE_B), nota de conceitos espaciais C (CE_C) e raciocínio espacial (RE). A nota ponderada da prova Van Hiele (VH) e a nota geral de conceitos espaciais (CE) não foram incluídas nessa análise para não haver influência dos dados, já que foram escolhidas outras notas relacionadas aos mesmos instrumentos.

A amostra era adequada para esse tipo de análise, segundo o índice Kaiser-Meyer-Olkin (*KMO* (28) = .703, *p* = 0.000). Foi aplicada a análise fatorial, utilizando o método de extração dos componentes principais, com rotação VARIMAX. Foram extraídos três fatores que são responsáveis por 59.3% do total de variância das oito provas. A Tabela 24 mostra os principais componentes extraídos dos instrumentos da pesquisa já citados:

Tabela 24

Principais componentes extraídos das subprovas da pesquisa – fatores rotacionados VARIMAX

Instrumentos	***Componentes***		
	1	**2**	**3**
VH_1	-0.207	0.834	
VH_2	0.433	0.269	0.399
VH_3	0.659	-0.159	0.151
PE	0.456	0.685	0.121
CE_A	0.651	0.427	-0.172
CE_B	0.591		
CE_C			0.882
RE	0.265	0.510	0.553

- FATOR 1: provas compostas por questões com <u>enunciado verbal</u>.
- FATOR 2: provas compostas por questões que requerem <u>processamento visual</u>.
- FATOR 3: provas que requerem <u>representação e manipulação mental</u>.

As células hachuradas indicam em que fatores o instrumento apresenta uma carga maior, portanto pertencente a tal fator. Os valores abaixo de .10 foram omitidos. A Figura 13 mostra a estrutura do espaço fatorial dos valores descritos na Tabela 24:

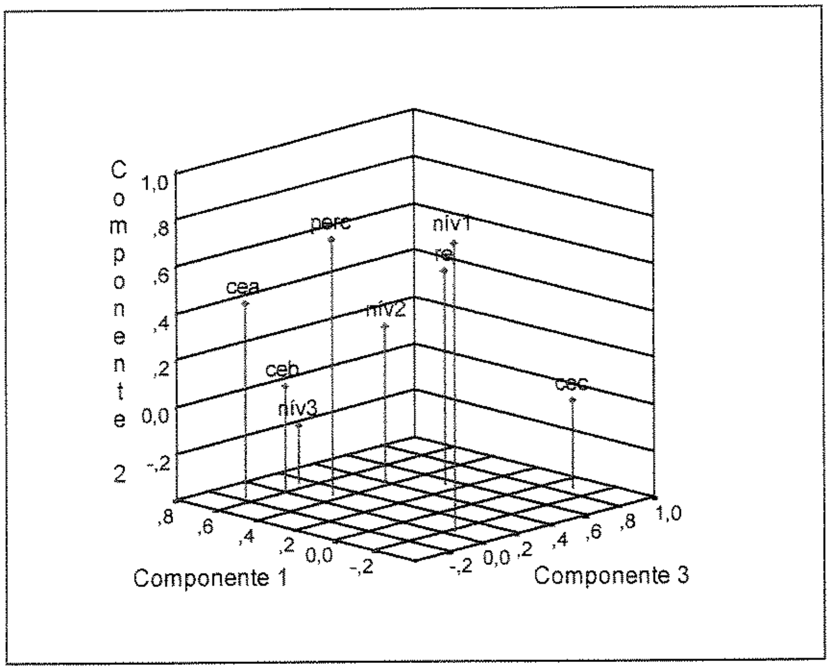


Figura 13: Espaço fatorial – fatores rotacionados VARIMAX.

A análise dos dados foi executada, sendo que o componente 1 tem cargas maiores nos instrumentos de conceitos espaciais A, conceitos espaciais B, nível 2 e nível 3 de Van Hiele; o componente 2 no nível 1 enquanto a percepção e o componente 3 em conceitos espaciais C e o raciocínio espacial.

Isso permite inferir que as provas com carga maior no fator 1 são compostas por questões com enunciado verbal. As provas de conceitos espaciais A e conceitos espaciais B requerem que o sujeito obtenha as informações a partir do enunciado para formar uma representação mental e então esboçar um diagrama ou partir diretamente para a solução do problema. Já as questões presentes nas subprovas de níveis 1 e 2 apresentam até uma ou mais figuras, porém a solução do exercício depende da interpretação das informações fornecidas em cada um dos cinco itens apresentados como resposta, que se apresentam na forma de enunciado verbal. Em outras palavras, são questões em que as alternativas são imprescindíveis para a obtenção da solução do problema. Esse fator foi responsável por 31.2% da variância.

O componente 2 estaria relacionado à habilidade de discriminação visual. Essa avaliação fundamentou-se na concepção de que se esse componente contém o nível 1 Van Hiele e a prova de percepção, que são compostas por questões que independem de cálculo aritmético ou algébrico, onde consta apenas o reconhecimento de figuras em sua totalidade, sem a interpretação de suas propriedades. É claro que em uma análise mais detalhada, é possível verificar que a prova de percepção precisa algo mais além do reconhecimento das figuras, em outras palavras, a percepção de elementos que se incluem. Esse componente respondeu por 15.2% da variância.

Já o componente 3 apresentou maiores cargas na prova de conceitos espaciais C e raciocínio espacial. Portanto, esse fator está relacionado à representação e manipulação mental de figuras, pois o sujeito necessita olhar o objeto esquematizado, formar uma imagem mental e manipulá-la para obter a solução requerida. Portanto, existe uma relação entre a habilidade para conceitos espaciais quando apresentados visualmente e o raciocínio espacial quando avaliados como foram no presente trabalho. Esse componente foi responsável por 12.9% da variância.

Ainda para responder ao problema principal dessa pesquisa, outra análise fatorial foi executada, com os mesmos métodos. A amostra foi adequada (*KMO* (3) = .628, *p* = .000), e foram escolhidas a nota ponderada (VH), a percepção (PE) e a habilidade para conceitos espaciais (CE). Um único fator foi extraído, como mostra a Tabela 25:

Tabela 25

Matriz dos principais componentes extraídos dos instrumentos da pesquisa

Instrumentos	**Componente 1**
VH	0.766
PE	0.810
CE	0.699

Com esse número de fatores não foi possível obter nem a matriz rotacionada, nem o gráfico de fatores. Esse fator foi responsável por 57.7% da variância. Isso indicou que essas provas em conjunto possuem características muito parecidas, e que de forma geral avaliam constructos muito próximos, indicando uma "habilidade geral" em relação a atividades com conceitos geométricos.

Uma última análise foi efetuada em relação aos itens das provas. Não foram inseridas as questões que apresentaram uma freqüência de acertos menor que 5% da amostra, isto é, para que uma questão fosse incluída nessa análise era necessário que pelo menos 10 sujeitos tivessem acertado integralmente a questão. Dessa forma, restaram 50 dos 68 itens, que realmente estariam apresentando a variabilidade desejável.

Não foi possível estabelecer conclusões objetivas a esse respeito, mesmo sendo a amostra adequada (*KMO* (1326) = .675, p = .000), já que foram 18 os componentes principais extraídos através de rotação VARIMAX. Esses 18 fatores foram responsáveis por 64.1% da variância e não houve um agrupamento que fosse explicável através de constructos psicológicos ou conceitos matemáticos.

CAPÍTULO VI

DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Respostas às questões de pesquisa

Como os sujeitos selecionados para a pesquisa eram alunos concluintes do Ensino Médio, era esperado que eles dominassem uma série de conceitos e demonstrassem algumas habilidades que deveriam ter sido desenvolvidas na escola desde o Ensino Fundamental. Isso não foi confirmado pelos dados obtidos no presente trabalho. Os alunos não conheciam uma série de objetos matemáticos e não possuíam habilidades em nível considerado satisfatório para continuar seus estudos em nível superior ou para transferir conhecimentos para situações fora da escola.

Sobre o desempenho dos sujeitos, não existia inicialmente a intenção de pesquisar diferenças em relação ao gênero, mas a revisão da literatura na área da habilidade de percepção e de conceitos espaciais indicou resultados mais satisfatórios para sujeitos do gênero masculino em comparação aos demais. Por este motivo, as diferenças de desempenho segundo o gênero foram incluídas no presente trabalho.

Em uma linha de raciocínio mais geral, não se pode afirmar nessa pesquisa que os sujeitos do gênero masculino tenham apresentado um desempenho superior aos sujeitos do gênero feminino. Analisando a amostra como um todo, apenas quando avaliados em relação ao nível um de Van Hiele (VH_1), os sujeitos do gênero masculino obtiveram um desempenho significativamente melhor que os sujeitos do gênero feminino, diferença essa apenas para os sujeitos da escola particular e não da escola pública.

Se a amostra for dividida em dois grupos segundo a escola, os meninos matriculados na escola pública tiveram um desempenho superior em relação às meninas quando calculada a nota na prova Van Hiele como um todo (VH), mas não houve diferença em relação à classificação em um nível. Quando avaliada a habilidade para conceitos espaciais na forma figurativa (CE_C), as meninas da escola particular apresentaram um desempenho significativamente superior ao dos meninos da mesma escola. Assim, não seria viável, no presente estudo, admitir uma diferença de desempenho em relação ao gênero e indicar um tratamento diferenciado para esses grupos como aconselham algumas pesquisas nessa área.

Das 11 variáveis obtidas – a saber, nível Van Hiele (nível), nota no nível 1 (VH_1), no nível 2 (VH_2), no nível 3 (VH_3), nota ponderada (VH), nota de percepção (PE), nota de conceitos espaciais A (CE_A), de conceitos espaciais B (CE_B), de conceitos espaciais C (CE_C), de conceitos espaciais (CE) e de raciocínio espacial (RE) – houve diferença de desempenho entre os grupos de sujeitos da escola pública e da escola particular em apenas quatro variávies. Contudo, não se pode dizer que os sujeitos da escola particular são mais habilidosos ou possuem mais conhecimentos, já que eles foram superiores apenas no nível dois de Van Hiele (VH_2) e em conceitos espaciais de Geometria Espacial (CE_B).

Os alunos da escola pública por sua vez obtiveram melhores desempenhos no nível três de Van Hiele (VH_3) e em conceitos espaciais figurativos (CE_C). Se forem cruzados esses resultados com aqueles indicados pela análise fatorial, a única inferência que pode ser feita é que os alunos da escola particular selecionados para essa amostra tiveram desempenho melhor em algumas provas com enunciado verbal, já que a subprova de nível dois (VH_2) e de conceitos espaciais de Geometria Espacial (CE_B) foram classificadas em um mesmo fator. Esses dados parecem também indicar que os sujeitos da escola pública possuem habilidade de representação mental mais desenvolvida que os alunos da escola particular, selecionados para o presente estudo.

Retomando a questão de pesquisa, elaborada com o intuito de saber que tipo de conhecimento geométrico um aluno deve dominar para obter um bom desempenho durante a solução de problemas, deve-se lembrar que a questão era:

Quais são as relações entre o desempenho em provas que avaliam o nível de desenvolvimento do pensamento em Geometria, a percepção geométrica e a habilidade para trabalhar com conceitos espaciais?

A melhor forma de responder a essa pergunta é tomar os resultados da análise fatorial, que direcionaram a investigação para a forma de apresentação de cada atividade matemática nos instrumentos. Em outras palavras, uma atividade matemática requer um conjunto de habilidades, e não apenas uma habilidade específica, o que vai de encontro ao enfoque adotado nesse trabalho sobre habilidades matemáticas, desenvolvido por Krutetskii (1976).

A habilidade para conceitos espaciais foi analisada em relação à forma de apresentação das questões que ora exigiam uma representação e manipulação mental de objetos – fossem eles figuras planas, sólidos geométricos ou elementos espaciais, tais como planos e retas – ora exigiam habilidade verbal.

A atividade apresentada na forma de enunciado verbal requer uma codificação das informações fornecidas como um primeiro estágio de solução, ou seja, esse tipo de atividade parece ser mais difícil, já que o sujeito pode fracassar nessa etapa, que antecede a formação de uma imagem mental. Essa afirmação pode ser feita baseada nas médias obtidas nas subprovas de conceitos espaciais de problemas no plano (CE_A) e em conceitos espaciais de Geometria Espacial (CE_B), além do grande número de questões que nenhum dos sujeitos conseguiu solucionar.

A solução de problemas com enunciado verbal exige um certo grau de prontidão e empenho durante a sua solução, maior que em questões que já apresentam um esquema ou esboço figurativo, como na subprova de conceitos espaciais na forma de teste de figuras (CE_C). Esse resultado confirma os já encontrados por outros pesquisadores citados anteriormente nesse trabalho, tais como Brito, Fini e Garcia (1994) e Alves (1999).

Ainda sobre a habilidade para conceitos espaciais, a relação encontrada entre as questões apresentadas como teste de figuras (CE_C) e a prova de raciocínio espacial (RE) confirma que nestes não há uma grande interferência de uma outra forma de habilidade estudada aqui, como a habilidade verbal. O aluno, durante a execução dessa atividade, já possui um esquema pronto e necessita executar uma imagem mental e posteriormente a sua manipulação para a obtenção da solução do problema.

Sobre a relação dessas habilidades com o nível de desenvolvimento do pensamento em Geometria, a partir do momento em que esses níveis deixam de requerer somente habilidades visuais, como no segundo e terceiro níveis, em que o aluno deve conhecer propriedades das figuras e relacioná-las, estando já embutida uma habilidade verbal de codificação de informações que foi ligada à forma de apresentação das questões que requeriam habilidade para conceitos espaciais na forma de enunciado verbal.

Portanto, na forma como esses níveis foram avaliados, o segundo e o terceiro níveis foram associados à obtenção de informações a partir das descrições verbais apresentadas nos itens das questões da prova que avaliou o nível de desenvolvimento do sujeito. Concluindo, os níveis dois e três definidos por Van Hiele (1986) requerem um certo grau de habilidade verbal para a interpretação de propriedades das figuras e suas relações.

O raciocínio espacial (RE) e a habilidade para conceitos espaciais, requeridos em testes figurativos (CE_C), não foram associados diretamente a nenhum dos três níveis, quando tomados os resultados das análises fatoriais. Em uma análise linear das variáveis, resultado das correlações de Pearson, a habilidade para conceitos espaciais na forma de teste de figuras não foi relacionada a nenhum nível, enquanto que o raciocínio espacial foi relacionado aos três.

A outra habilidade estudada neste trabalho, a perceptual, foi diretamente relacionada ao nível um, definido por Van Hiele como o visual. Neste sentido é possível afirmar que a percepção de figuras geométricas requer um nível menor de formação de conceitos, limitando-se ao reconhecimento de figuras em sua totalidade (como é definido o nível um), sem o conhecimento das propriedades das figuras.

Finalmente, o fato das correlações de Pearson entre a nota obtida na prova Van Hiele (VH), a nota obtida na prova de percepção (PE) e a nota obtida na prova de conceitos espaciais (CE) serem todas altamente significativas, bem como o fato de a análise fatorial entre essas provas indicar apenas um único fator, contempla para uma forma geral de conhecimento e habilidade quando o pano de fundo das atividades são os conceitos geométricos.

Outro resultado importante referiu-se ao desempenho dos sujeitos nas provas que requeriam habilidades. Quando os sujeitos foram agrupados em níveis de enquadramento, o desempenho nessas provas foi gradualmente melhor, evidenciando que os sujeitos que estavam em um nível superior de pensamento em geometria, ou seja, aqueles que conheciam as propriedades das figuras e sabiam relacioná-las, possuíam também habilidades mais desenvolvidas.

Portanto, os componentes das habilidades matemáticas escolhidos para a investigação do presente estudo – a saber, percepção geométrica e habilidade para trabalhar com conceitos espaciais – estão presentes no pensamento em geometria e possuem uma forte relação com a aprendizagem de conceitos em vários níveis, além da presença da habilidade verbal, resultante do estudo.

Implicações do Estudo

Este trabalho foi executado dentro dos pressupostos da Educação Matemática e, mais especificamente, da Psicologia da Educação Matemática. Segundo Resnick e Ford (1990), a Psicologia da Educação Matemática tem muito a desenvolver, assim como uma ciência do ensino que se baseie em tal Psicologia. Nesse caminho, os estudos acerca das habilidades matemáticas, do ponto de vista da Psicologia Cognitiva, tentam traçar alguns direcionamentos a fim de solucionar os problemas enfrentados em sala de aula por professores e alunos, proporcionando a melhoria do ensino e um planejamento que resulte em conquistas positivas do ponto de vista educacional.

À medida que vão sendo conhecidos os relacionamentos entre o tipo de conhecimento e as habilidades que estão presentes em cada um desses tipos de conhecimento geométrico, o professor passa a ter algumas ferramentas poderosas para a compreensão dos processos cognitivos dos alunos durante a execução de tarefas geométricas. Quando se trata de clarificar situações para os professores, sempre é um bom caminho para a efetiva compreensão dos problemas de sala de aula. Vianna (2000), nas considerações finais de seu trabalho, indicou que o caminho a ser escolhido pelo professor deve ser de um ensino voltado para a autonomia, refletindo sempre sobre os modos pelos quais se processa o conhecimento.

Em conseqüência, essas ferramentas sustentarão (ou deverão buscar sustentar) um planejamento de aula mais efetivo, no sentido de levar a uma melhor compreensão das dificuldades, buscando maneiras diferenciadas de propor situações desafiadoras para os alunos, pois:

> "Em vez de ensinar a todas as crianças da mesma maneira, acreditando que são poucos os que saem fracassados da seqüência do ensino, o professor pode ajudar cada criança a adquirir os componentes específicos de que necessita para dominar a habilidade objetivo" (Resnick e Ford, 1990, p. 75).

A solução de problemas como método de ensino tem ganho um grande espaço dentro das salas de aula. Como os resultados dessa pesquisa indicaram, o professor não deve se limitar a usar apenas problemas com enunciado verbal, mas outras situações que auxiliem os alunos a desenvolver habilidades, favorecendo a aquisição de conhecimentos, já que cada habilidade, em conjunto com outras, irá favorecer o sucesso dos estudantes na solução de problemas geométricos e, de forma mais geral, dos problemas matemáticos. Os resultados dessa pesquisa indicaram alguns fatores que podem contribuir para o sucesso na solução de problemas geométricos.

Os autores Resnick e Ford (1990) parecem indicar um excelente caminho para a continuidade deste estudo: o programa de ensino da disciplina. Segundo eles, os indivíduos que se encontram preocupados em construir um o programa de ensino capaz de orientar enfoques conceituais pretendem fornecer aos estudantes "uma sólida compreensão intuitiva das estruturas subjacentes da Matemática" (p. 128).

Como a execução do programa de ensino da disciplina depende basicamente dos professores, é necessário que eles tenham acesso a um conhecimento profundo sobre formação de conceitos. Infelizmente, muitos professores de Matemática são fruto de um ensino que evidenciou apenas o trabalho em Álgebra, deixando de lado o estudo dos conceitos geométricos. Cursos de capacitação de professores são muito louváveis, mas se o espaço de tempo for muito pequeno, não há como preparar esse profissional para ter uma visão global de toda a estrutura do conhecimento e todos os fatores que norteiam o processo de ensino-aprendizagem desses conteúdos. Portanto, é preciso um grande investimento na formação acadêmica desse profissional, a fim de suprir as lacunas do ensino fundamental e médio.

Muito já foi pesquisado sobre Matemática, mais especificamente sobre Geometria, Álgebra e Aritmética. E de várias formas alguns desses resultados têm chegado aos professores na forma de livros ou de cursos. Entretanto, ainda falta uma forma organizada de divulgação, capaz de informar não só os professores dessa disciplina, mas aos professores de toda a grade curricular do ensino básico.

Esse trabalho, que teve caráter de pesquisa básica, deixa caminhos abertos a outras investigações na área, como outras pesquisas básicas sobre assuntos relacionados, ou pesquisas aplicadas com a intenção de propor atividades que possam reforçar a bagagem dos professores na luta por um ensino de melhor qualidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, E. V. (1999). Um estudo exploratório dos componentes da habilidade matemática requeridos na solução de problemas aritméticos por estudantes do ensino médio. Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP, 190p. (Dissertação, Mestrado em Educação Matemática).

ANDERSON, J. R. (1995). Cognitive psychology and its implications. 4.ed. New York: W. H. Freeman and Company, 463p.

ARAÚJO, E. A. (1999). Influências das habilidades e das atitudes em relação a Matemática e a escolha profissional. Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP, 190p. (Tese, Doutorado em Educação Matemática).

AUSUBEL, D. P. , NOVAK, J. D. & HANESIAN, H. (1980). Psicologia educacional. Tradução Eva Nick. Rio de Janeiro: Ed. Interamericana.

BATTISTA, M. T. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry. Journal for research in mathematics education, v. 21, no. 1, 47-60.

BATTISTA, M. T. & CLEMENTS, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. Journal for research in mathematics educational, USA, v. 4, n. 3, 258-292.

BERTONHA, R. A. (1989). O ensino de Geometria e o dia-a-dia na sala de aula. Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP, 225p. (Dissertação, Mestrado em Educação – Metodologia do Ensino).

BRITO, M. R. F., FINI, L. D. T. & GARCIA, V. J. N. (1994).Um estudo exploratório sobre as relações entre o raciocínio verbal e o raciocínio matemático. Proposições, Campinas, SP, v. 5, n^0 1. 37-44. Mar.

BRITO, M. R. F., PIROLA, N., SCOMPARIN DE LIMA, V., UTSUMI, M. C., ALVES, E. V. & MENDES, C. R. (1998). An exploratory investigation about formation of quadrilaterals in second grade students. Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), v.4, 323, Stellenbosh, África do Sul.

BRITO, M. R. F. (2000). A compreensão e a solução de problemas aritméticos verbais por crianças da escola fundamental. Artigo submetido à publicação: SBP.

BISHOP, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education: a Review. Educational studies in mathematics, no. 11, 257-269.

BUSSAB, W. O. e MORETTIN, P. A. (1987). Estatística básica. São Paulo: Atual.

CARROLL, J. B. (1983). Studying individual differences in cognitive abilities: through and beyond factor analysis. In R. F. Dillon & R. R. Schmeck, Individual differences in cognition. New York: Academic Press.

________. (1992). A capacidade para a aprendizagem de uma segunda língua. In Sternberg, R., As capacidades intelectuais humanas: uma abordagem em processamento de informações. Tradução de Dayse Batista. Porto Alegre: Artes Médicas.

CASTRO, M. R., FAINGUELERNT, E. K. & MEDALHA, V. (1998). The role of visualization in teaching spatial geometry. Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), v.4, 328, Stellenbosh, África do Sul.

CATELL, R. B. (1977). Factor analysis: an introduction and manual for the psychologist and social scientist. Greenwool Press.

CAZORLA, I. M. (1998). Estatística e pesquisa em Educação: utilizando o pacote spss for windows. Texto não publicado, grupo de pesquisa em Educação Matemática – PSIEM-FE/UNICAMP, Campinas.

CONE, J. D. & FOSTER, S. L. (1994). Dissertations and theses: from start to finish. Washington: American Psychological Association.

COOPER, C. (1999). The Structure of mental Abilities. London: Routledge.

CORREA, J., SPINILLO, A.G., BRITO, M.R.F. & MORO, M.L.F. (1998). O desenvolvimento de conceitos matemáticos: temas de interesse para a Educação Matemática. In Moura, M.L. S., Correa, J. e Spinillo, A. G. (1998). Rio de Janeiro: Editora da UERJ.

COSTA NETO, P. L. O. (1977). Estatística. São Paulo: Edgar Blücher Ltda.

CROWLEY, M. L. (1994). O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico, In: Aprendendo e ensinando Geometria, Lindquist, M. M. e Shutle, A. P., traduzido por Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, p. 1-20.

DAVEY, G. & HOLLIDAY, J. (1992). Van Hiele: guidelines for geometry, The Australian Mathematics Teacher, Australia, v. 48, nº 2, 26-29.

DEL GRANDE, J. J. (1990). Spatial sense, Arithmetic Teacher, Feb, 14-20.

DEL GRANDE, J. J. (1994). Percepção espacial e Geometria primária, In: LINDQUIST, M. M., SHUTLE, A. P. Aprendendo e ensinando Geometria, traduzido por Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, p. 156-167.

ECHEVERRÍA, M. D. P. P. (1998). A solução de problemas em Matemática. In A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender. Juan Ignacio Pozo. Porto Alegre: Artmed.

ECHEVERRÍA, M. D. P. P., & POZO, J. I. (1998). Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender. Juan Ignacio Pozo. Porto Alegre: Artmed.

EYSENCK, M. W, KEANE, M. T. (1994). Psicologia Cognitiva: um manual introdutório. Traduzido por W. Gesser e M. H. F. Gesser. Porto Alegre: Artes Médicas.

FARIA, W. (1989). Aprendizagem e planejamento de ensino. São Paulo: Editora Ática, 86p.

FENNEMA, E. & CAPENTER, T. P. (1981). Sex-related differences in mathematics: results from national assessment. Mathematics Teacher, October, 554-559.

GARCIA, V. J. N. (1995). Um estudo exploratório sobre as relações entre o conceito de automatismo da teoria do processamento de informações de Sternberg e o conceito de pensamento resumido na teoria das habilidades matemáticas de Krutetskii. Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP (Dissertação, Mestrado em Educação Matemática).

GARDNER, H. (1996). A nova ciência da mente: uma história da revolução cognitiva. Tradução Claudia Malbergier Caon. São Paulo: USP.

GORGORIÓ, N. (1998). Exploring the funcionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. Educational Studies in Mathematics. no. 35, 207-231.

HOFFER, A. (1981). Geometry is more than proof. Mathematics Teacher, USA. v. 71, n. 1, 11-21.

JAIME, A., GUTIÉRREZ, A. (1995). Guidelines for teaching plane isometries in secondary school. The Mathematics Teacher, USA. v. 88, n° 7, 591-597.

JALLES, C. M. R. (1997). O efeito de instruções sobre estratégias metacognitivas de crianças pré-escolares em solução de problema geométrico: um estudo exploratório.

Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP. (Dissertação, Mestrado em Educação Matemática).

JESUS, M. A. S. (1999). Jogos na Educação Matemática: Análise de uma Proposta para a 5ª Série do Ensino Fundamental. Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP. (Dissertação, Mestrado em Educação Matemática).

KERLINGER, F. N. (1980). Metodologia em ciências sociais: um tratamento conceitual. São Paulo: EPU.

KERLINGER, F. N. & PEDHAZUR, E. J. (1973). Multiple regression in behavioral reseach. New York University.

KLAUSMEIER, H. J. (1977). Manual de Psicologia Educacional. aprendizagem e capacidades humanas. Harper e Row. Traduzido por Maria Célia Teixeira Azevedo de Abreu.

KÖHLER, W. (1980). Psicologia da Gestalt. Belo Horizonte: Ed. Itatiaia.

KOSSLYN, S. M. (1992). A capacidade para trabalhar mentalmente com imagens. In Robert Sternberg, As capacidades intelectuais humanas: uma abordagem em processamento de informações. Tradução de Dayse Batista. Porto Alegre: Artes Médicas.

KRUTETSKII, V. A. (1963). Um estudo da natureza, formas de desenvolvimento e diagnóstico das habilidades matemáticas. Traduzido por Márcia Regina Ferreira de Brito, das Atas do XVII Congres International de Psychologie (Acta Psychologica). Amsterdam: North-Holland Publishing.

________. (1976). The psychology of mathematical abilities in schoolchildren, Chicago: Teh University of Chicago Press. Transleted from the Russian by Joan Teller.

LEAN, G. & CLEMENTS, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. Educational Studies in Mathematics. v. 12, 267-299.

LIMA, V. S. (1996). Mapeamento cognitivo: um estudo do conceito de frações em estudantes de magistério e professores do 1° grau. Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP. (Dissertação, Mestrado em Psicologia Educacional).

LOMÔNACO, J. F. B. (1984). Aprendizagem de conceitos, In: Witter, G. P., Lomônaco, J. F. B. A Psicologia da aprendizagem, São Paulo: EPU, 59-71.

LUJAN, M. L. S. (1997). A Geometria na 1ª série do 1° grau: um trabalho na perspectiva de Van Hiele. Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP, 190p. (Dissertação, Mestrado em Educação Matemática)

NASSER, L. (1992). Using the Van Hiele theory to improve secondary school geometry in Brazil. London: University of London, 397p (Tese de PhD).

________. (1992a). A teoria de Van Hiele: pesquisa e aplicação. Rio de Janeiro: UFRJ. 16p.

NELSON, G. K. & KLAUSMEIER, H. J. (1974). Classificatory behaviors of low-socioeconomic-status children. Journal of Educational Psychology, v. 66, no. 3, 432-438.

NETO, S. PFROMM, (1987). Psicologia da aprendizagem e do ensino. EPU/ EDUSP.

OLIVEIRA, L. T. F. (1998). Habilidades espaciais subjacentes às atividades de discriminação e composição de figuras planas utilizando o tangram e o tegram. Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP, 134p. (Dissertação, Mestrado em Educação Matemática).

PEGG, J., DAVEY, G. (1991). Levels of geometric understanding, The Australian Mathematics Teacher, Australia, v. 47, nº 2, 10-13.

PIROLA, N. A. (1995). Um estudo sobre a formação de conceitos de triângulo e paralelogramo em alunos de 1º grau, Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP (Dissertação, Mestrado em Psicologia Educacional).

PRIMI, R. & ALMEIDA, L. S. (2000). BPR-5: Bateria de Provas de Raciocínio – manual técnico. Casa do Psicólogo.

RESNICK, L. B. & FORD, W. W. (1990). La enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Barcelona: Paidós.

REYNOLDS, A., WHEATLEY, G. H. (1997). A student's imaging in solving a nonroutine task. Teaching Children Mathematics. v. 4, n. 2, 100-104, Oct.

RUBINSTEIN, C. (1994). Geometria no 1º grau: qual o caminho? uma aplicação da teoria de Van Hiele em sala de aula. Rio de Janeiro: RJ. Faculdade de Educação da Universidade Santa Úrsula. (Dissertação, Mestrado em Educação Matemática).

SÃO PAULO (1986). Proposta curricular para o ensino de Matemática: 2º grau. São Paulo: Secretaria Estadual de Educação/CENP, 393p.

SÃO PAULO (1986a). Proposta curricular para o ensino de Matemática: 1º grau. São Paulo: Secretaria Estadual de Educação/CENP.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL (1997). Parâmetros curriculares nacionais: introdução, Brasília: MEC, v.1.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL (1997a). Parâmetros curriculares nacionais: Matemática, Brasília: MEC, v.3.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA (1999). Parâmetros curriculares nacionais: ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias, Brasília: MEC, parte III, 58p.

SHAW, J. M., THOMAS, C., HOFFMAN, A. & BULGREN, J. (1995). Using concept diagrams to promote understanding in geometry, Teaching Children Mathematics, v.2, n° 3, 184-189. Nov.

SPALLETA, A. G. (1998). Desenvolvimento das habilidades matemáticas: um estudo sobre as relações entre o desempenho e a reversibilidade de pensamento na solução de problemas. Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP. (Dissertação, Mestrado em Educação Matemática).

STERNBERG, R. (1992) As capacidades intelectuais humanas: uma abordagem em processamento de informações. Tradução de Dayse Batista. Porto Alegre: Artes Médicas.

________. (1998). Abilities are forms of developing expertise. Educational Researcher, v. 27, n°. 3, 11-20, Apr.

________. (2000). Psicologia Cognitiva. Porto Alegre: Artes Médicas.

SUPER, D. E. & BOHN JR., M. J. (1972). Psicologia educacional. São Paulo: Ed. Atlas.

USISKIN, Z. (1982). Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry. CDASSG Project. The University of Chicago (ERIC Document Reprodution Service No. ED 220 288).

USISKIN, Z. (1994). Resolvendo os dilemas da Geometria escolar, In: LINDQUIST, M. M., SHUTLE, A. P. Aprendendo e ensinando Geometria, traduzido por Hygino H. Domingues, SP: Atual, p. 21-39.

UTSUMI, M. C. (2000). Atitudes e habilidades envolvidas na solução de problemas algébricos: um estudo sobre o gênero, a estabilidade das atitudes e alguns componentes da habilidade matemática. Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP. (Tese, Doutorado em Educação Matemática).

VAN HIELE, P. M. (1986). Structure and insight: a theory of mathematics education. Orlando, USA: Academic Press, Inc. 246p.

VIANNA, O. A. (2000). O conhecimento geométrico de alunos do Cefam sobre figuras espaciais: um estudo das habilidades e dos níveis de conceito. Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP. (Dissertação, Mestrado em Educação Matemática).

WARREN, E. & ENGLISH, L. (1995). Facility with plane shapes: a multifaceted skill. Educational Studies in Mathematics, Australia, nº 28, 365-383.

WITTER, G. P. (1996). Pesquisa científica e nível de significância. Estudos de Psicologia, v. 13, n. 1, 55-63.

Anexo I

Questionário Informativo

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

CARO ALUNO

Eu, Viviane Rezi, professora de Matemática e mestranda em Educação Matemática da UNICAMP, venho por meio desta solicitar a sua colaboração quanto ao desenvolvimento de pesquisa científica sobre habilidades matemáticas, orientada pela Profa. Dra. Márcia Regina F. de Brito.

Para isso, você deve responder uma série de questões. Todas as provas serão acompanhadas de instruções a fim de ajudá-lo na solução de cada uma delas. Peço que nenhuma questão deixe de ser resolvida e que a honestidade tenha grande presença nas respostas do questionário.

É necessário ressalvar que elas não constarão como nota escolar, mas o seu desenvolvimento com empenho será de grande validade para solução de alguns problemas presentes nas escolas do nosso país.

Desde já, agradecendo a atenção dispensada,

Viviane Rezi

ALUNO:______________________________________ nº________ 3ª série______

ESCOLA:___________________________________ CIDADE:_______________

PERÍODO: _____________________

ASSINATURA:________________________________

DADOS DOS ALUNOS

1. Tipo de escola em que estuda:
   ( ) pública ( ) particular

2. Idade: __________ anos

3. Sexo:
   ( ) masculino ( ) feminino

4. Você já repetiu alguma série?
   ( ) sim ( ) não

ATENÇÃO: Se você respondeu **sim** na questão acima, isto é, se você repetiu alguma série, responda as questões abaixo. Caso contrário se você **nunca** foi reprovado, passe para a questão 8.

5. Quantas vezes você já repetiu de ano, isto é, quantas vezes foi obrigado a fazer a mesma série?
   1 – ( ) Uma vez 2 – ( ) Duas vezes 3 – ( ) Três vezes

   4 – ( ) Quatro vezes 5 – ( ) Cinco vezes ou mais

6. Assinale a(s) série(s) que você repetiu:

1 – ( ) 1ª série do 1º grau
2 – ( ) 2ª série do 1º grau
3 – ( ) 3ª série do 1º grau
4 – ( ) 4ª série do 1º grau
5 – ( ) 5ª série do 1º grau
6 – ( ) 6ª série do 1º grau
7 – ( ) 7ª série do 1º grau
8 – ( ) 8ª série do 1º grau
9 – ( ) 1ª série do 2º grau
10 – ( ) 2ª série do 2º grau
11 – ( ) 3ª série do 2º grau

7. Assinale a(s) matéria(s) na(s) qual(is) você foi reprovado:
   1 – ( ) Todas as matérias
   2 – ( ) Não me lembro
   3 – ( ) Matemática
   4 – ( ) Português
   5 – ( ) Ciências
   6 – ( ) Educação Física
   7 – ( ) Geografia
   8 – ( ) Desenho Geométrico
   9 – ( ) Educação Artística
   10 – ( ) História
   11 – ( ) Inglês
   12 – ( ) Física
   13 – ( ) Química
   14 – ( ) Outra. Qual?_________

8. Você cursou todo o ensino médio nessa mesma escola?
1 – ( ) sim 2 – ( ) não

ATENÇÃO: Se você respondeu Não na questão acima, isto é, você estudou também em outros colégios durante o ensino médio, responda a questão abaixo. Caso contrário, se você sempre estudou nessa escola durante o ensino médio, você terminou o questionário.

9. Liste abaixo as escolas que freqüentou durante o ensino médio, respondendo se particular ou pública:
1 - ______________________________
2 - ______________________________
3 - ______________________________
4-________________________________
5-________________________________

Anexo II

Prova Van Hiele

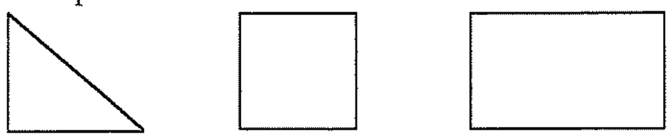
NOME:____ **no.** _______**3ª série** ____

INSTRUÇÕES

- Resolva a prova com muita atenção.
- Não é permitida comunicação entre os alunos. Caso você tenha alguma dúvida, levante a mão e espere a permissão do examinador para falar.
- É muito importante ressaltar que AS QUESTÕES APRESENTAM UMA ÚNICA RESPOSTA CORRETA.
- Caso você não solucione alguma questão escreva "NÃO SEI" e qual o motivo.
- Marque a alternativa correta referente a cada questão, utilizaldo sempre lápis.
- ***OBRIGADA E BOA PROVA!***

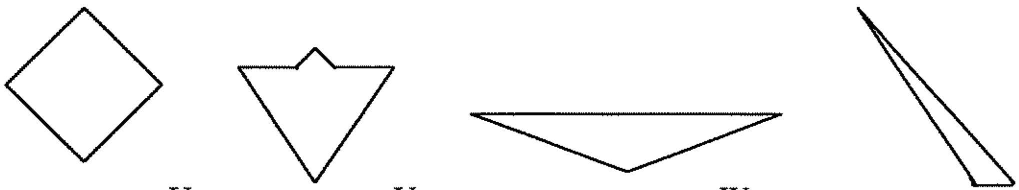
1. Qual (ou quais) dessas figuras abaixo são quadrados?

a) somente K.
b) somente L.
c) somente M.
d) somente L e M.
e) todas são quadrados.



K L M

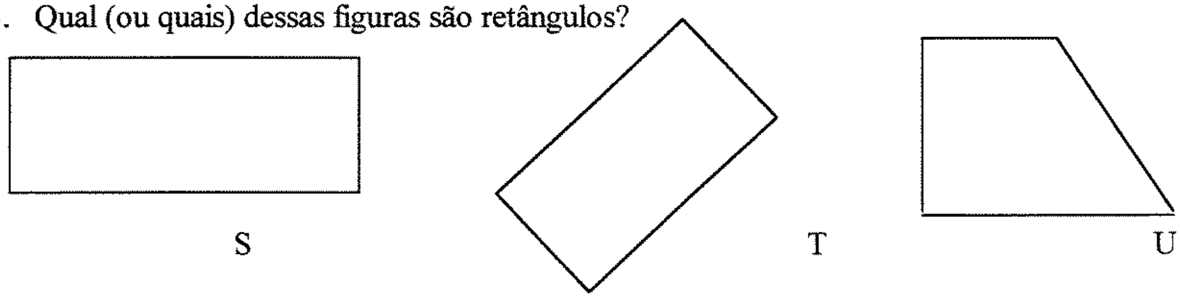
2. Qual (ou quais) dessas figuras são triângulos?



U V W X

a) nenhuma delas é um triângulo.
b) somente V.
c) somente W.
d) somente W e X.
e) somente V e W.

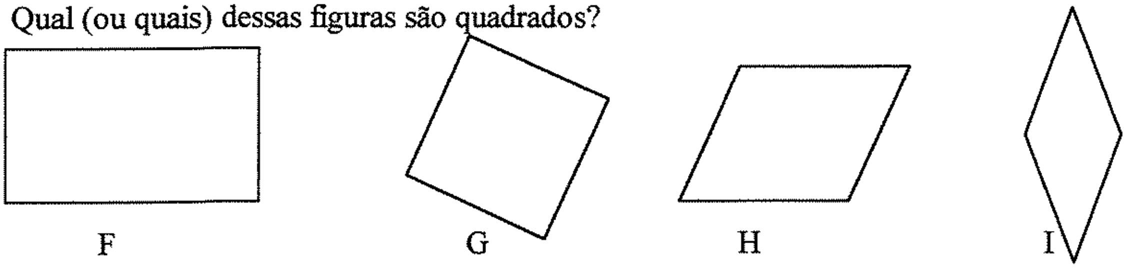
3. Qual (ou quais) dessas figuras são retângulos?



S T U

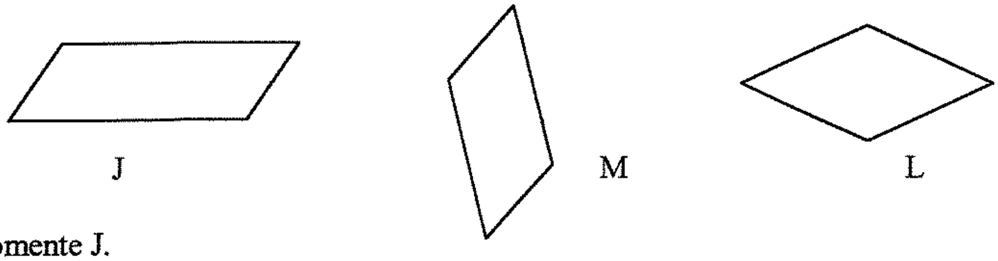
a) somente S.
b) somente T.
c) somente S e T.
d) somente S e U.
e) todas são retângulos.

4. Qual (ou quais) dessas figuras são quadrados?



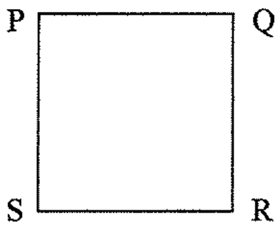
a) nenhuma delas é um quadrado.
b) somente G.
c) somente F e G.
d) somente G e I.
e) todas são quadrados.

5. Qual (ou quais) dessas figuras são paralelogramos?



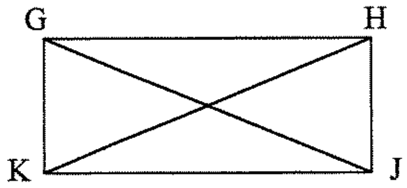
a) somente J.
b) somente L.
c) somente J e M.
d) nenhuma delas é um paralelogramo.
e) todas são paralelogramos.

6. PQRS é um quadrado.



Qual relação é verdadeira para todos os quadrados?
a) $\overline{PR}$ e $\overline{RS}$ têm o mesmo tamanho.
b) $\overline{QS}$ e $\overline{PR}$ são perpendiculares.
c) $\overline{PS}$ e $\overline{QR}$ são perpendiculares.
d) $\overline{PS}$ e $\overline{QS}$ têm o mesmo tamanho.
e) o ângulo Q é maior que o ângulo R.

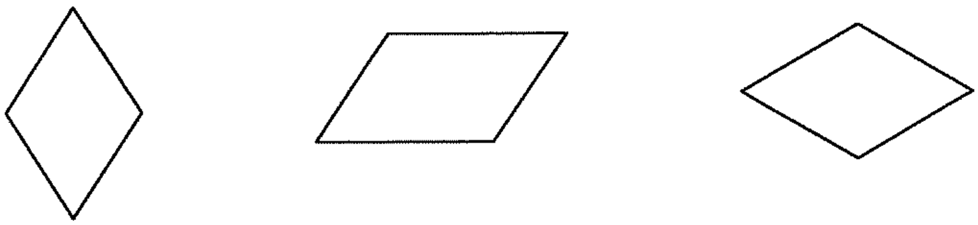
7. No retângulo GHJK, GJ e HK são as diagonais.



Qual de (a) a (d) não é verdadeira em todo retângulo?

a) há quatro ângulos retos.
b) há quatro lados.
c) as diagonais têm o mesmo tamanho.
d) os lados opostos têm o mesmo tamanho.
e) todas de (a) a (d) são verdadeiras em todo retângulo.

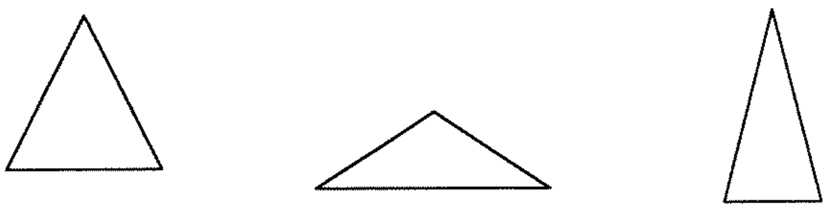
8. Um losango é uma figura de 4 lados com todos os lados do mesmo tamanho. Veja os três exemplos:



Qual de (a) a (d) não é verdadeira para todo losango?

a) as duas diagonais têm o mesmo tamanho.
b) cada diagonal é a bissetriz de dois ângulos do losango.
c) as duas diagonais são perpendiculares.
d) os ângulos opostos têm a mesma medida.
e) todas de (a) a (d) são verdadeiras para todo losango.

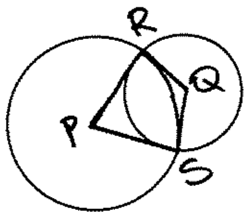
9. Um triângulo isósceles é um triângulo com dois lados de mesma medida. Veja aqui três exemplos.

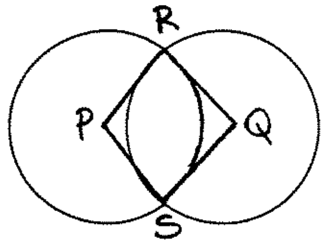


Qual de (a) a (d) é verdadeira em todo triângulo isósceles?

a) os três lados devem ter o mesmo tamanho.
b) um lados deve ter o dobro da medida de outro lado.
c) deve haver pelo menos dois ângulos com a mesma medida.
d) os três ângulos devem ter a mesma medida.
e) nenhuma de (a) a (d) é verdadeira para todo triângulo isósceles.

10. Dois circulos com centros em P e Q se interceptam em R e S para formar uma figura de 4 lados PRQS. Veja os exemplos:





Qual de (a) a (d) não é sempre verdade?

a) PRQS terá sempre dois pares de lados de mesmo tamanho.
b) PRQS terá sempre pelo menos dois ângulos de mesma medida.
c) as linhas PQ e RS serão perpendiculares.
d) os ângulos P e Q terão a mesma medida.
e) todas de (a) a (d) são verdadeiras.

11. A seguir há duas afirmações:

Afirmação 1: a figura F é um retângulo.

Afirmação 2: a figura F é um triângulo.

Qual é a correta?

a) se 1 é verdadeira, então 2 é verdadeira.
b) se 1 é falsa, então 2 é verdadeira.
c) 1 e 2 não podem ser ambas verdadeiras.
d) 1 e 2 não podem ser ambas falsas.
e) nenhuma de (a) a (d) é correta.

12. A seguir há duas afirmações:

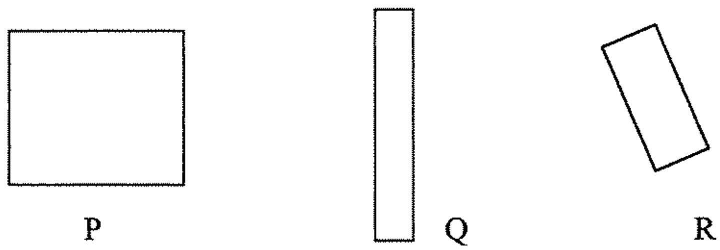
Afirmação S: Δ ABC tem três lados de mesmo tamanho.

Afirmação T: no Δ ABC, $\angle$ B e $\angle$C têm a mesma medida.

Qual é a correta?

a) as afirmações S e T não podem ser ambas verdadeiras.
b) se S é verdadeira, então T é verdadeira.
c) se T é verdadeira, então S é verdadeira.
d) se S é falsa, então T é falsa.
e) nenhuma de (a) a (d) é correta.

13. Qual (ou quais) dessas figuras pode ser chamada de retângulo?



a) todas podem.
b) somente Q.
c) somente R.
d) somente P e Q.
e) somente Q e R.

14. Qual é verdadeira?
a) todas as propriedades dos retângulos são propriedades dos quadrados.
b) todas as propriedades dos quadrados são propriedades dos retângulos.
c) todas as propriedades dos retângulos são propriedades dos paralelogramos.
d) todas as propriedades dos quadrados são propriedades dos paralelogramos.
e) nenhuma de (a) a (d) é verdadeira.

15. O que todos os retângulos têm que alguns paralelogramos não têm?
a) lados opostos iguais.
b) diagonais iguais.
c) lados opostos paralelos.
d) ângulos opostos iguais.
e) nenhuma de (a) a (d).

Anexo III

Prova de Percepção –
Série IV de Krutetskii (1976)

NOME:____ no ______ 3ª série_____

INSTRUÇÕES

- Responda a prova à lápis, com muita atenção.
- Não é permitida comunicação entre os alunos. Caso você tenha alguma dúvida, levante a mão e espere a permissão do examinador para falar.
- É muito importante ressaltar que AS QUESTÕES PODEM APRESENTAR VÁRIAS RESPOSTAS CORRETAS. COLOQUE TODAS QUE VOCÊ LEMBRAR!!!
- Caso você não solucione alguma questão escreva "NÃO SEI" e qual o motivo.
- O tempo de solução será anotado PELO EXAMINADOR no momento em que você entregar a prova.
- Após isso, retorne ao seu lugar e permaneça em silêncio para o início do próximo teste.
- OBRIGADO E BOA PROVA!

1. (fig. 6) Quantos são os segmentos (e quais são eles?)

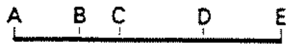


Fig. 6

2. (fig. 7) Quantos são os ângulos retos?

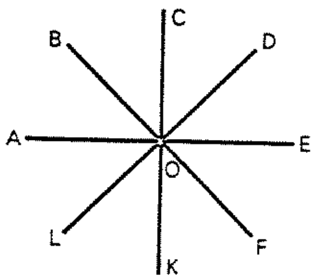


Fig. 7

3. (fig. 8) Quantos setores são mostrados (e quais são eles?)

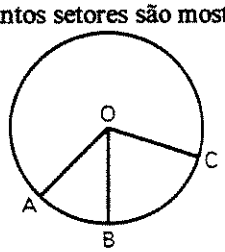


Fig. 8

4. (fig. 9) Quantos são os ângulos (e quais são eles?)

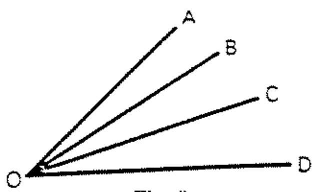


Fig. 9

5. (fig. 10) Quantos são os triângulos (e quais são eles?)

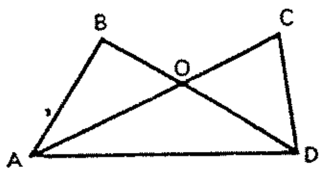


Fig. 10

6. (fig. 11) Que figuras podem ser vistas nessa figura (incluindo os triângulos?)

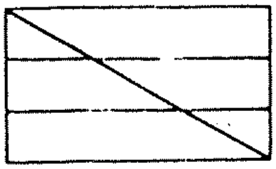


Fig. 11

7. Pinte:
a. A parte do plano comum às três figuras (fig. 12a)
b. A parte comum ao círculo e ao triângulo (fig. 12b)
c. A parte comum ao triângulo e ao retângulo (fig. 12c)

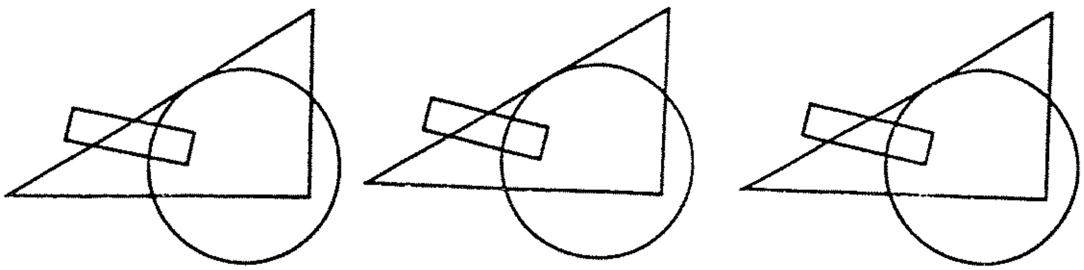


Fig. 12a Fig. 12b Fig. 12c

8. (fig. 13) O que é o segmento AB nessa figura?

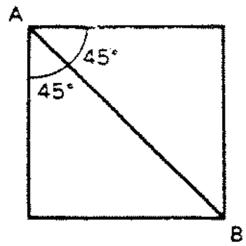


Fig. 13

9. (fig. 14) O que o segmento AC representa?

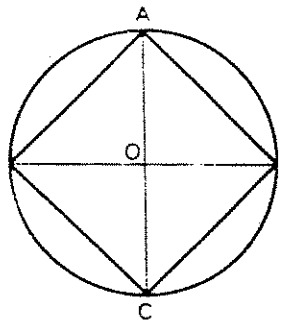


Fig. 14

10. (fig. 15) O que é o segmento KE nessa figura?

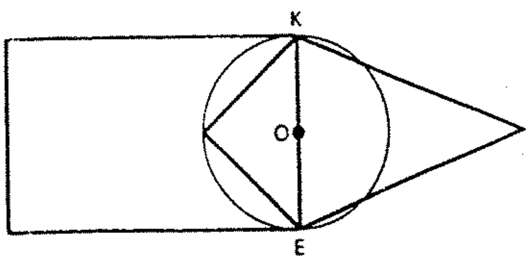


Fig. 15

Anexo IV

Prova de Conceitos Espaciais – Série XXV de Krutetskii (1976)

NOME:____ no _______ 3ª série_____

INSTRUÇÕES

- Responda a prova à lápis, com muita atenção.
- Não é permitida comunicação entre os alunos. Caso você tenha alguma dúvida, levante a mão e espere a permissão do examinador para falar.
- É muito importante ressaltar que AS QUESTÕES APRESENTAM APENAS UMA RESPOSTA CORRETA.
- Caso você não solucione alguma questão escreva "NÃO SEI" e qual o motivo.
- O tempo de solução será anotado PELO EXAMINADOR no momento em que você entregar a prova.
- OBRIGADO E BOA PROVA!

A. TESTE GEOMÉTRICO (PROBLEMAS NO PLANO)

1. O diâmetro de um círculo é igual a 17 cm. Dada uma reta, ela terá pontos em comum com o círculo se a distância entre a reta e o centro for igual a:
a. 6 cm?
b. 8,5 cm?
c. 10 cm?

2. São dados dois círculos, cujos raios são 2cm e 3 cm. A distância entre os seus centros é 4 cm. Eles se interceptam?

3. a) Que ângulo faz o ponteiro das horas em 2 horas? b) E em 20 minutos?
c) E o ponteiro dos minutos em 10 minutos? d) E em 20 minutos?

4. Uma reta está a 8 cm do centro de um círculo cujo raio é 4 cm. Determine a distância máxima e mínima da reta aos pontos do círculo. (Observação: a distância entre um ponto e uma reta é determinada pela perpendicular traçada do ponto a reta)

5. Dados um círculo e um ponto fora dela. A partir desse ponto são traçadas uma tangente e uma secante. O que é maior, a distância entre o ponto dado e o ponto de tangência ao círculo ou o segmento externo da secante ao ponto?

6. Dado um quadrado. O ponto médio de cada lado é ligado ao ponto médio do lado consecutivo. a) Que figura é obtida a partir dessa construção? b) Que parte da área do quadrado dado constitui a área da figura construída?

7. Um terreno é fechado por uma cerca com 128 m de perímetro. O comprimento é 3 vezes maior que a largura. Qual é o comprimento e a largura do terreno?

8. Um playgroud cuja largura é 5 vezes menor que o seu comprimento, tem todos os lados cercados por uma cerca de largura constante. A borda externa da cerca é 24m maior que a borda interna, e a área da cerca é 468 m^2. Determine a área do playgroud.

B. TESTE GEOMÉTRICO (GEOMETRIA ESPACIAL)

1. a) Quantos vértices, arestas e faces possui um cubo? b) Quantas arestas originam-se de cada vértice do cubo? c) Quantas são as diagonais de superfície do cubo?

2. Através de um ponto fora do plano, quantas linhas retas podem ser traçadas paralelas ao plano?

3. Uma caneta está atrelada ao fim de outra, que tem qualquer posição no espaço. Que superfície este fim descreve?

4. Um quadrado é rotacionado sobre um de seus lados. Determine o tipo de sólido de rotação.

5. Que superfície forma-se ao se rotacionar um triângulo retângulo sobre um cateto?

6. Qual é o sólido obtido pela rotação de um triângulo retângulo sobre um eixo paralelo a um de seus catetos?

7. a) Qual é a forma da secção de um cubo paralela a uma face lateral? b) Qual é a forma da secção diagonal de um cubo?

8. Qual é a forma de uma secção de um cilindro paralela ao seu eixo?

9. (fig. 45) Imagine um sólido do tipo de um anel (uma aliança, um pneu). Este sólido é seccionado por 4 planos paralelos passando:
a. através do eixo do anel;
b. através do ponto médio do raio interno do anel;
c. através da extremidade do raio interno do anel;
d. eqüidistante às extremidades dos raios internos e externos.
Represente (mesmo aproximadamente) a forma de cada secção.

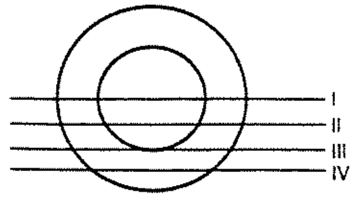


Fig. 45

10. Imagine um cubo na qual uma esfera está inscrita (portanto, tangenciando os pontos médios das faces do cubo) e uma esfera está circunscrita (tocando os vértices). Desenhe a forma da secção por um plano que passa paralelo a dois lados do cubo, através do centro da esfera interna.

11. Como está situado um segmento no espaço em relação ao plano de projeção se:
a. está projetado sobre um ponto;
b. sua projeção é igual ao próprio segmento;
c. sua projeção é menor que o próprio segmento?

12. Como estão situados dois segmento no espaço se eles estão projetados:
a. sobre um ponto;
b. sobre um segmento;
c. sobre dois pontos;
d. sobre um segmento e um ponto fora dele?

13. Como está situado um triângulo retângulo no espaço em relação ao plano de projeção se está projetado:
a. sobre um segmento de reta;
b. sobre um triângulo retângulo;
c. sobre um triângulo obtusângulo?

14. Um cubo de madeira pintado com uma aresta de 10 cm está dividido em pequenos cubos, cada um com 1 cm de aresta. a) Quantos cubos pequenos têm uma face pintada? b) duas? c) três? d) nenhuma face pintada?

15. Um balão subiu primeiro 200m, então passou 100m a noroeste, caiu 100m, e viajou 500m a nordeste. Então ele voltou e viajou 1oom a sudeste. Então caiu 100m. De quanto é a distância entre o balão e o ponto de partida?

C. TESTE DE FIGURAS
1. Conte quantos cubos são mostrados (fig. 46)

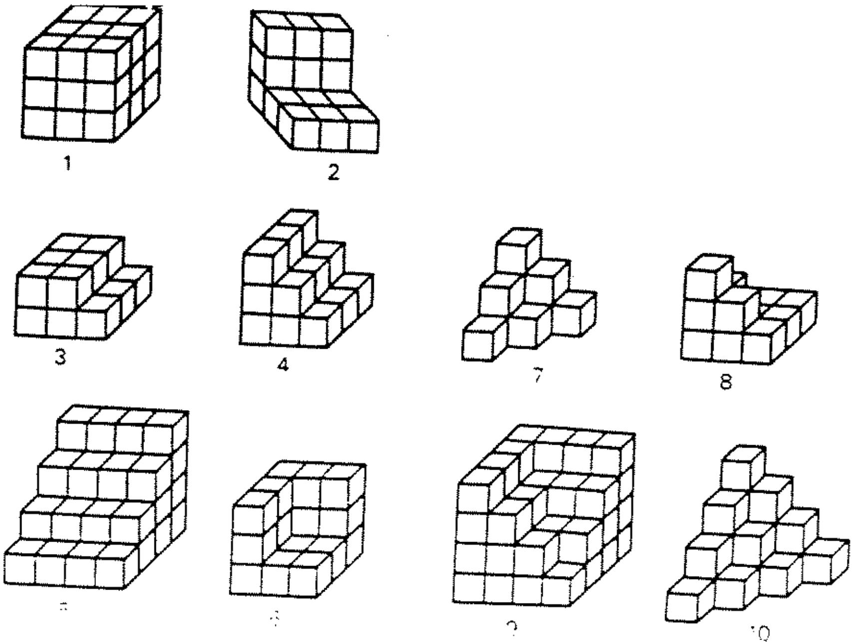


Fig. 46

1)	4)	7)	10)
2)	5)	8)	
3)	6)	9)	

2. Marque a posição da cruz nas figuras 2, 3 e 4. (fig. 47)

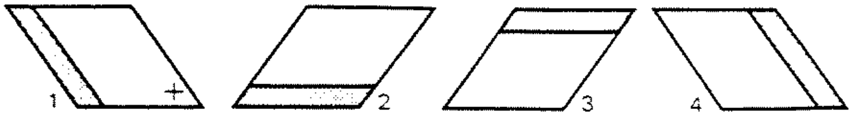
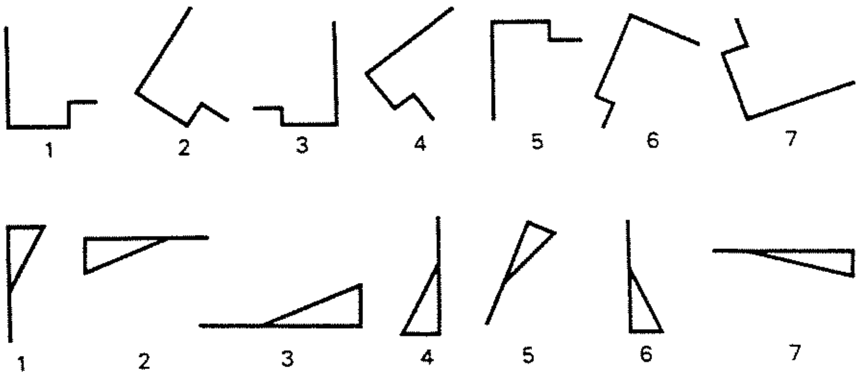
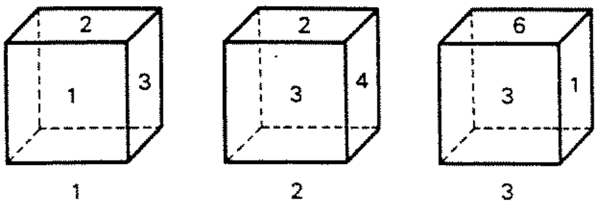


Fig. 47

3. Quais das figuras da direita é a mesma figura mostrada no extremo esquerdo? (fig. 48)



4. Um cubo é mostrado (fig. 49) com as faces determinadas pelos números 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Determine com números as faces escondidas nas três representações.



Anexo V

Tabelas

Tabela 26: p-valor obtido nos testes estatísticos na relação entre as variáveis.

	Escola	Gênero	Idade	Turma	Período
Nível	.240	.087	.334	.549	.913
VH_1	.255	.020	.434	.578	.083
VH_2	.036	.301	.072	.173	.486
VH_3	.048	.786	.084	.001	.021
VH	.505	.402	.015	.057	.080
PE	.128	.324	.000	.000	.005
CE_A	.714	.247	.144	.024	.069
CE_B	.000	.814	.914	.000	.011
CE_C	.026	.092	.244	.068	.137
CE	.358	.504	.097	.025	.061
RE	.614	.616	.004	.048	.127

Tabela 27: p-valor obtido nos testes estatísticos na relação entre as variáveis – esc. Pública

	Gênero	Idade	Turma
Nível	.083	.289	.634
VH_1	.078	.291	.593
VH_2	.257	.007	.206
VH_3	.137	.670	.005
VH	.042	.039	.054
PE	.186	.136	.494
CE_A	.256	.674	.271
CE_B	.261	.770	.097
CE_C	.419	.465	.380
CE	.155	.280	.182
RE	.340	.055	.170

Tabela 29: p-valor obtido nos testes estatísticos na relação entre as variáveis – escola particular.

	Gênero	Idade	Turma	Período
Nível	.284	.113	.510	.397
VH_1	.037	.447	.496	.188
VH_2	.764	.255	.658	.220
VH_3	.311	.171	.051	.198
VH	.666	.119	.121	.055
PE	.786	.019	.000	.000
CE_A	.591	.580	.017	.005
CE_B	.052	.037	.203	.593
CE_C	.019	.177	.167	.823
CE	.097	.424	.023	.093
RE	.718	.632	.028	.004

Anexo VI

Diagramas de Ramo e Folha

Diagrama 1 de Ramo e folha - nota no nível 1

```
Freqüência    Ramo &  Folha
   7,00 Extremes    (=<2,0)
  30,00        4 .  000000000000000
    ,00       4 .
    ,00       5 .
    ,00       5 .
  67,00        6 .  000000000000000000000000000000000
    ,00       6 .
    ,00       7 .
    ,00       7 .
  75,00        8 .  0000000000000000000000000000000000000
    ,00       8 .
    ,00       9 .
    ,00       9 .
  22,00       10 .  00000000000
Largura do ramo:   1
Cada folha:       2 case(s)
```

Diagrama 2 de Ramo e Folha - nota no nível 2

```
Freqüência   Ramo &  Folha
   9,00       0 .  0000
    ,00       1 .
  45,00        2 .  0000000000000000000000
    ,00       3 .
  69,00        4 .  0000000000000000000000000000000000
    ,00       5 .
  51,00        6 .  0000000000000000000000000
    ,00       7 .
  23,00        8 .  00000000000
    ,00       9 .
   4,00      10 .  00
Largura do Ramo:   1
Cada folha:       2 case(s)
```

Diagrama 3 de Ramo e folha - nota no nível 3

```
Freqüência  Ramo &  Folha
  61,00        0 .  000000000000000000000000000000
    ,00       0 .
    ,00       1 .
    ,00       1 .
  74,00        2 .  0000000000000000000000000000000000000
    ,00       2 .
    ,00       3 .
    ,00       3 .
  39,00        4 .  0000000000000000000
    ,00       4 .
    ,00       5 .
    ,00       5 .
  19,00        6 .  000000000
    ,00       6 .
    ,00       7 .
    ,00       7 .
```

```
   8,00      8 . 0000
Largura do Ramo:  1
Cada folha:      2 case(s)
```

Diagrama 4 de Ramo e Folha - níveis de enquadramento

```
Freqüência   Ramo &  Folha
  19,00      0 . 000000000
    ,00      0 .
    ,00      0 .
    ,00      0 .
    ,00      0 .
  92,00      1 . 0000000000000000000000000000000000000000000000
    ,00      1 .
    ,00      1 .
    ,00      1 .
    ,00      1 .
  52,00      2 . 00000000000000000000000000
    ,00      2 .
    ,00      2 .
    ,00      2 .
    ,00      2 .
  13,00      3 . 000000
  25,00 Extremes    (>=4)
Largura do ramo:  1
Cada folha:      2 case(s)
```

Diagrama 5 de Ramo e folha - Teste de raciocínio espacial - Escola particular

```
Freqüência  Ramo &  Folha
   1,00 Extremes    (=<,0)
   1,00      2 . 0
   2,00      3 . 00
   3,00      4 . 000
   3,00      5 . 000
   4,00      6 . 0000
   5,00      7 . 00000
   8,00      8 . 00000000
  11,00      9 . 00000000000
  15,00     10 . 000000000000000
  10,00     11 . 0000000000
   6,00     12 . 000000
  11,00     13 . 00000000000
   8,00     14 . 00000000
   5,00     15 . 00000
   5,00     16 . 00000
   3,00     17 . 000
   1,00     18 . 0
   4,00     19 . 0000
   1,00     20 . 0
Largura do ramo:     1,00
Cada folha:      1 case(s)
```

Diagrama 6 de Ramo e Folha - Teste de raciocínio espacial - Escola pública

```
Freqüência   Ramo & Folha
     ,00      0 .
    5,00      0 . 22233
    6,00      0 . 444555
   14,00      0 . 66666666667777
   10,00      0 . 8888899999
   14,00      1 . 00000000011111
   20,00      1 . 22222222222223333333
   12,00      1 . 444444444555
   10,00      1 . 6666677777
    3,00      1 . 889
Largura do ramo:    10,00
Cada folha:      1 case(s)
```

Anexo VII

Gráficos

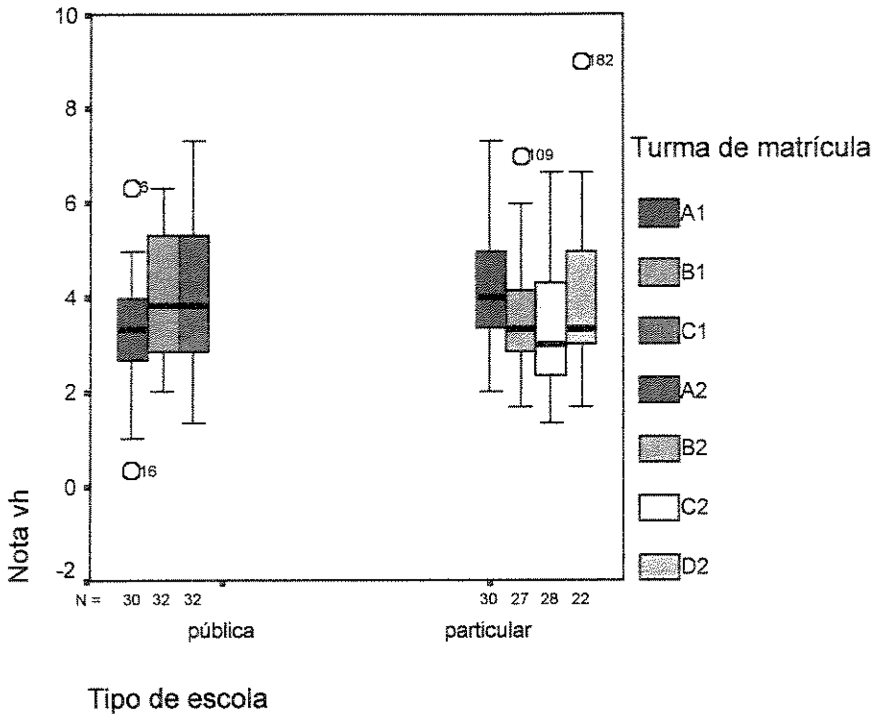


Figura 14: Box-plot do desempenho dos sujeitos por turma – prova van Hiele.

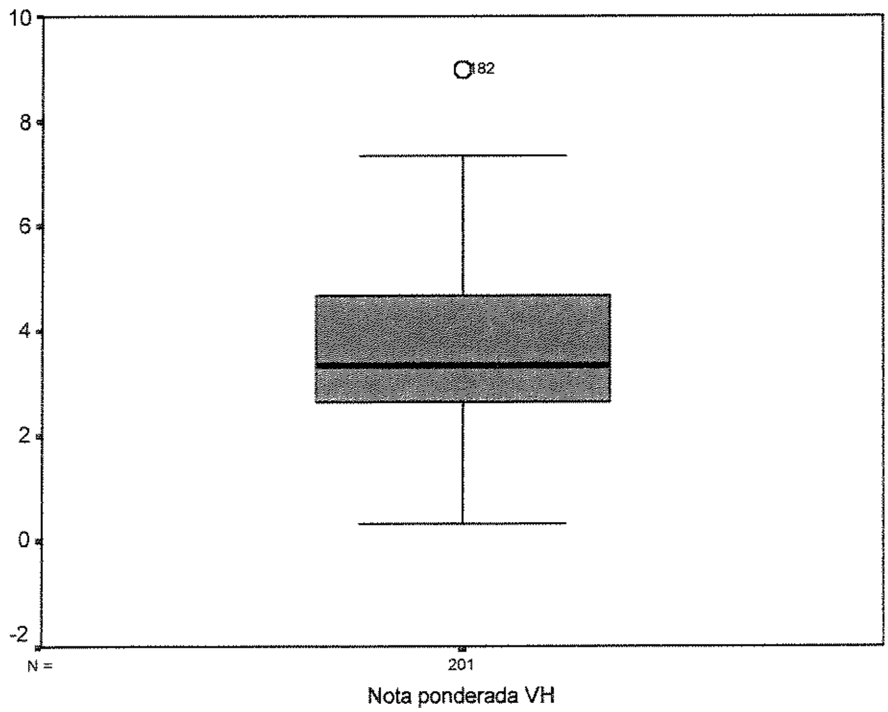


Figura 15: Box-plot do desempenho dos sujeitos na prova Van Hiele.

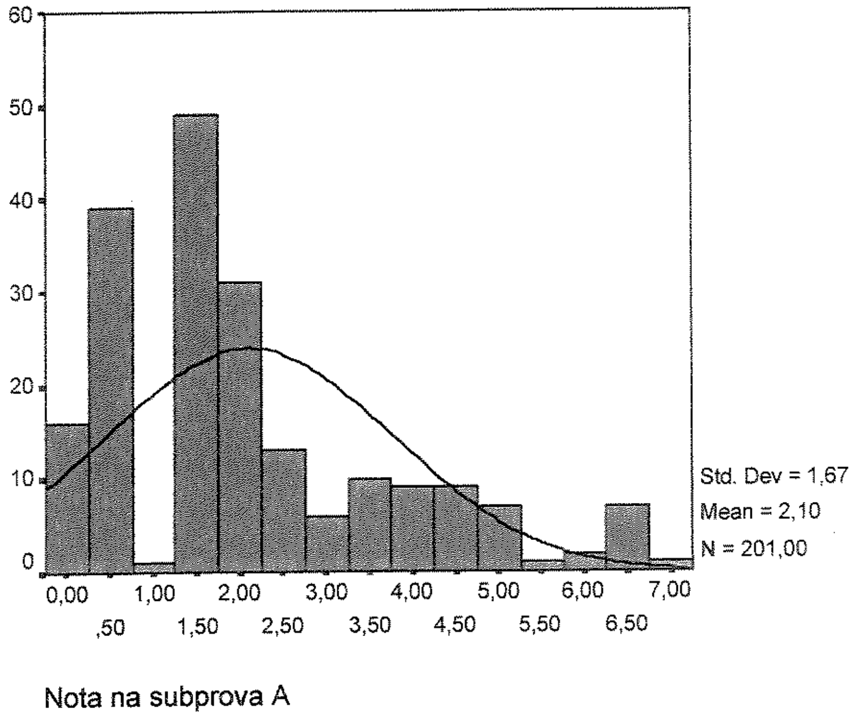


Figura 16: Distribuição das médias dos sujeitos de acordo com o desempenho na prova CE_A.

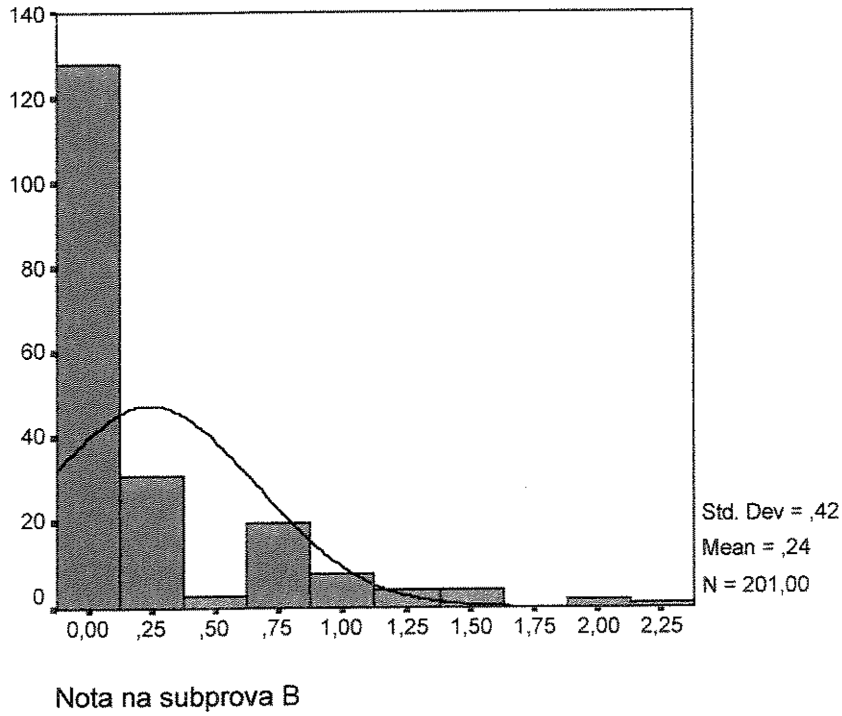


Figura 17: Distribuição das médias dos sujeitos de acordo com o desempenho na prova CE_B.

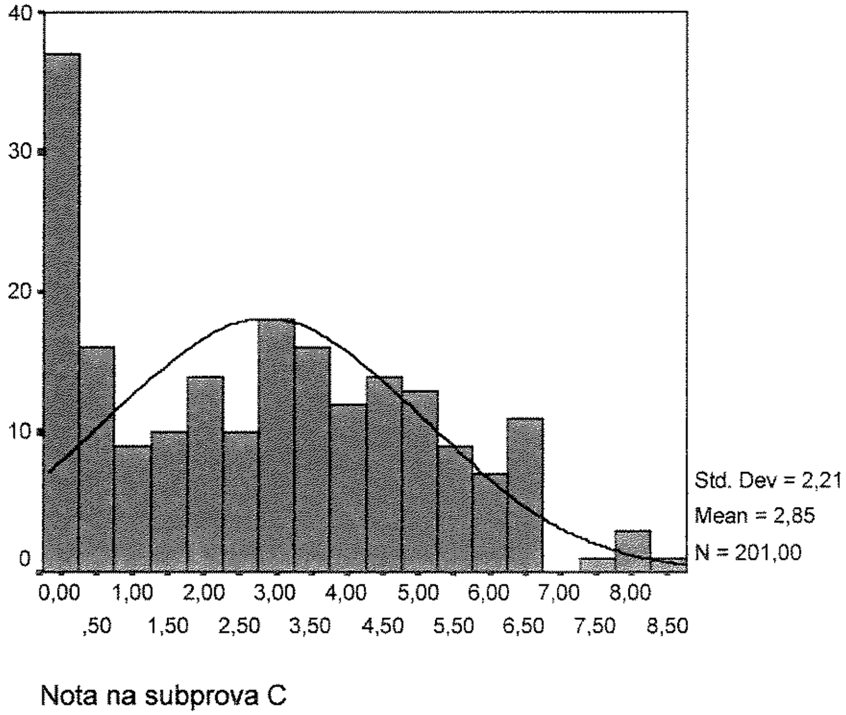


Figura 18: Distribuição das médias dos sujeitos de acordo com o desempenho na prova CE_C.

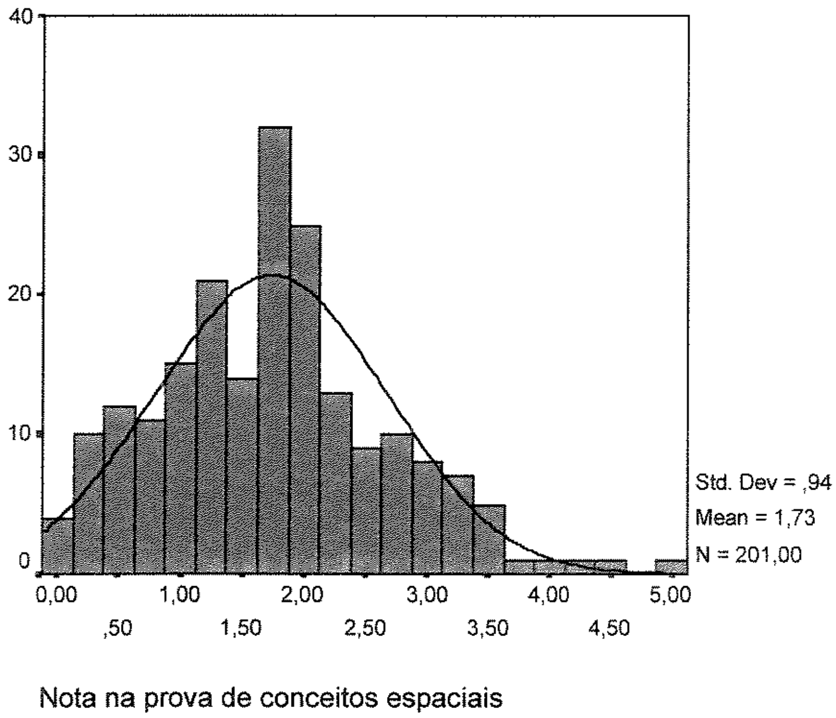
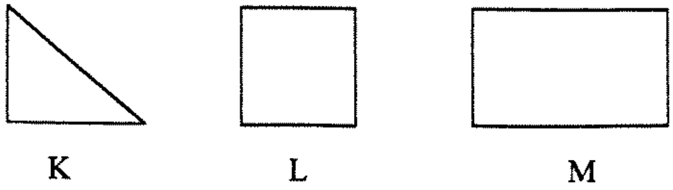
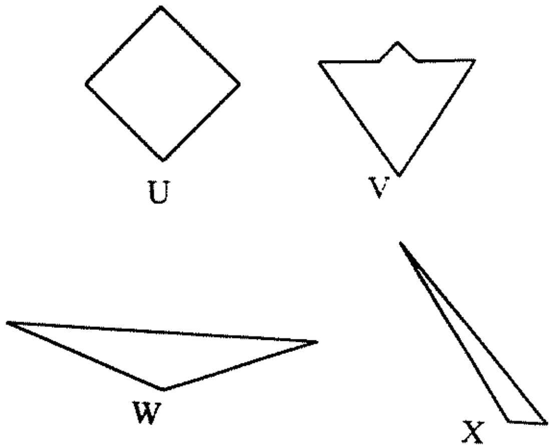


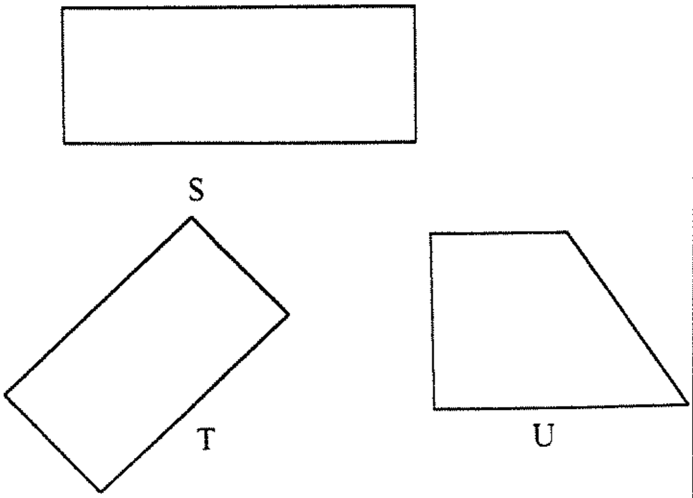
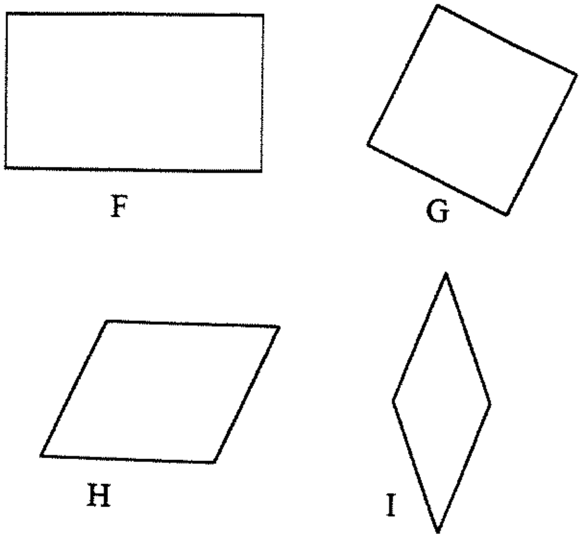
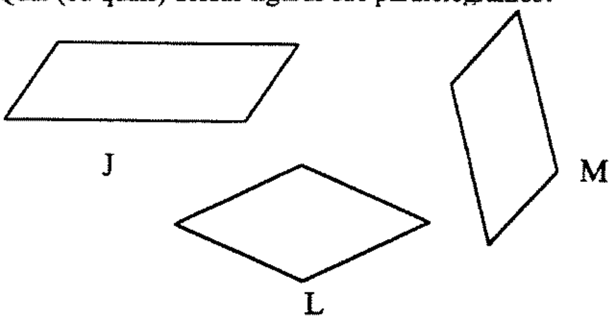
Figura 19: Distribuição das médias dos sujeitos de acordo com o desempenho na prova CE

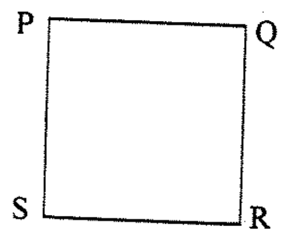
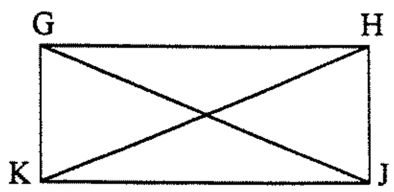
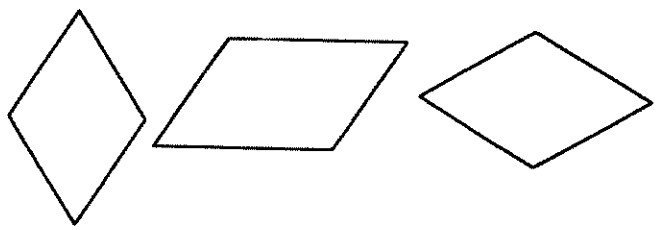
Anexo VIII

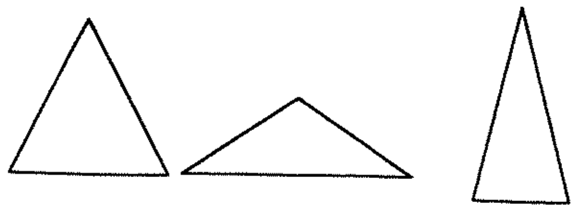
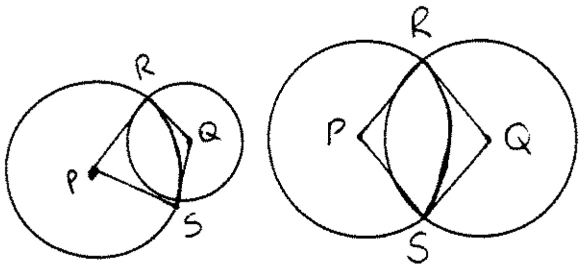
Análise dos instrumentos

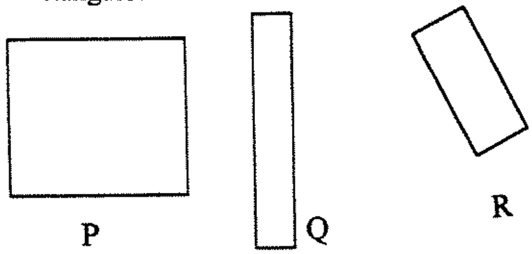
Quadro 3: Descrição dos conceitos e processo de solução das questões que compuseram a prova Van Hiele.

QUESTÃO	CONCEITOS MATEMÁTICOS	PROCESSO DE SOLUÇÃO	RESPOSTA CERTA
1) Quais dessas figuras abaixo são quadrados?  a) somente K; b) somente L; c) somente M; d) somente L e M; e) todas são quadrados.	Triângulo, quadrado, retângulo	Identificação de figuras geométricas planas, mais especificamente do quadrado.	Alternativa B: somente L
2) Qual (ou quais) dessas figuras são triângulos?  a) nenhuma delas é um triângulo; b) somente V; c) somente W; d) somente W e X; e) somente V e W.	Quadrado, triângulo, figura não poligonal.	Identificação de figuras geométricas planas, mais especificamente dos triângulos.	Alternativa D: somente W e X.

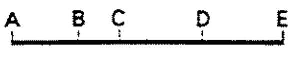
3) Qual (ou quais) dessas figuras são retângulos?  a) somente S; b) somente T; c) somente S e T; d) somente S e U; e) todas são retângulos.	Retângulo, trapézio.	Identificação de figuras geométricas planas, mais especificamente dos retângulos.	Alternativa C: somente S e T.
4) Qual (ou quais) dessas figuras são quadrados?  a) nenhuma delas é um quadrado; b) somente G; c) somente F e G; d) somente G e I; e) todas são quadrados.	Retângulo, quadrado, paralelogra-mo, losango.	Identificação de figuras geométricas planas, mais especificamente dos quadrados.	Alternativa B: somente G.
5) Qual (ou quais) dessas figuras são paralelogramos?  a) somente J; b) somente L: c) somente J e M; d) nenhuma delas é um paralelogramo; e) todas são paralelogramos.	Paralelogramos em várias posições no plano.	Identificação de figuras geométricas planas, mais especificamente dos paralelogramos, independente da posição no espaço.	Alternativa E: todas são paralelogramos.

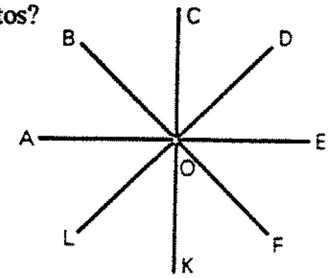
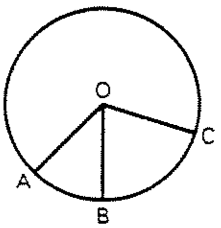
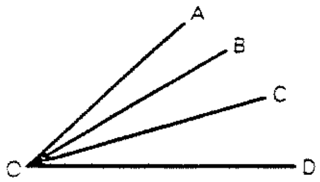
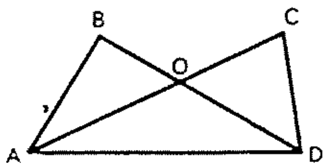
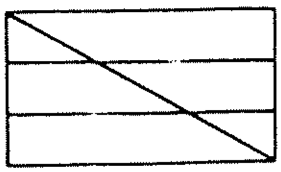
6) PQRS é um quadrado.  Qual relação é verdadeira para todos os quadrados? a) PR e RS têm o mesmo tamanho; b) QS e PR são perpendiculares; c) PS e QR são perpendiculares; d) OS e QS têm o mesmo tamanho; e) o ângulo Q é maior que o ângulo R.	Elementos e propriedades dos quadrados.	Conhecer as propriedades dos quadrados que envolvem os lados, as diagonais e os ângulos internos.	Alternativa B: QS e PR são perpendiculares.
7) No retângulo GHJK, GJ e HK são as diagonais.  Qual de (a) a (d) <u>não</u> é verdadeira em todo retângulo? a) há quatro ângulos retos; b) há quatro lados; c) as diagonais têm o mesmo tamanho; d) os lados opostos têm o mesmo tamanho; e) todas de (a) a (d) são verdadeiras em todo retângulo.	Elementos e propriedades dos retângulos.	Conhecer as propriedades dos retângulos que envolvem os lados e as diagonais.	Alternativa E: todas de (a) a (d) são verdadeiras em todo retângulo.
8) Um losango é uma figura de 4 lados com todos os lados do mesmo tamanho. Veja os três exemplos.  Qual de (a) a (d) <u>não</u> é verdadeira para todo losango? a) as duas diagonais têm o mesmo tamanho; b) cada diagonal é a bissetriz de dois ângulos do losango; c) as duas diagonais são perpendiculares; d) as ângulos opostos t6em a mesma medida; e) todas de (a) a (d) são verdadeiras para todo losango.	Elementos e propriedades dos losângos.	Conhecer as propriedades dos losângos que envolvem os lados, as diagonais e os ângulos.	Alternativa A: as duas diagonais têm o mesmo tamanho.

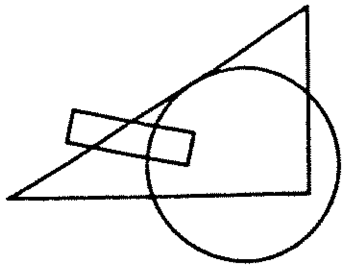
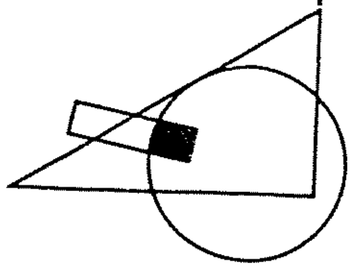
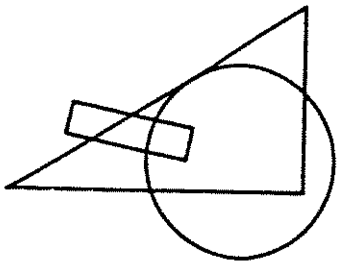
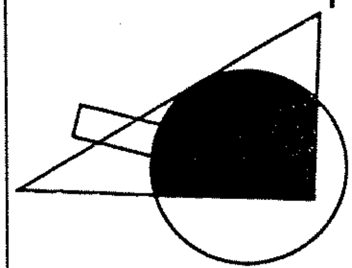
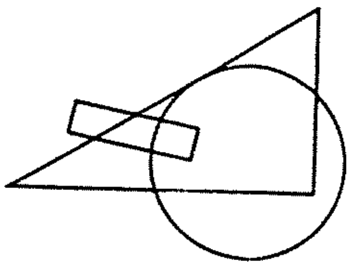
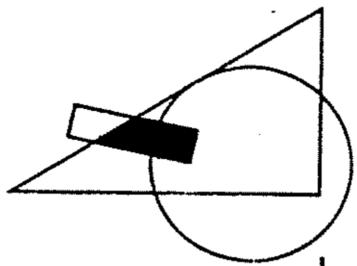
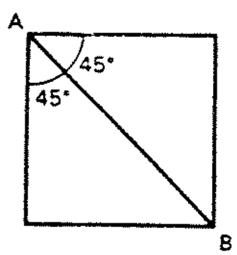
9) Um triângulo isósceles é um triângulo com dois lados de mesma medida.  Qual de (a) a (d) é verdadeira em todo triângulo isósceles? a) os três lados devem ter o mesmo tamanho; b) um dos lados deve ter o dobro da medida de outro lado; c) deve haver pelo menos dois ângulos com a mesma medida; d) os três 6angulos devem ter a mesma medida; e) nenhuma de (a) a (d) é verdadeira para todo triângulo isósceles.	Elementos e propriedades dos triângulos isósceles.	Conhecer as propriedades dos triângulos com dois lados de mesma medida, envolvendo os lados e os ângulos.	Alternativa C: deve haver pelo menos dois ângulos com a mesma medida.
10) Dois círculos com centros em P e Q se interceptam em R e S para formar uma figura de 4 lados PQRS. Veja os exemplos.  Qual de (a) a (d) não é sempre verdadeira? a) PPRQS terá sempre dois pares de lados de mesmo tamanho; b) PRQS terá sempre pelo menos dois ângulos de mesma medida; c) as linhas PQ e RS serão perpendiculares; d) os ângulos P e Q terão a mesma medida; e) todas de (a) a (d) são verdadeiras.	Elementos e propriedades do círculo.	Relacionar as propriedades do círculo com as propriedades do quadrilátero construído.	Alternativa D: os ângulos P e Q terão a mesma medida.
11) A seguir há duas afirmações: Afirmação 1: a figura F é um retângulo Afirmação 2: a figura F é um triângulo. Qual é a correta? a) se 1 é verdadeira, então 2 é verdadeira; b) se 1 é falsa, então 2 é verdadeira; c) 1 e 2 não podem ser ambas verdadeiras; d) 1 e 2 não podem ser ambas falsas; e) nenhuma de (a) a (d) é correta.	Retângulo e triângulo; relações lógicas.	O sujeito deve formar uma imagem mental do retângulo e outra do triângulo.	Alternativa D: 1 e 2 não podem ser ambas verdadeira s.
12) A seguir há duas afirmações: Afirmação S: Δ ABC tem três lados de mesmo tamanho; Afirmação T: no Δ ABC, $\angle$ B e $\angle$C têm a mesma medida. Qual é a correta? a) as afirmações S e T não podem ser ambas verdadeiras; b) se S é verdadeira, então T é verdadeira; c) se T é verdadeira, então S é verdadeira; d) se S é falsa, então T é falsa; e) nenhuma de (a) a (d) é correta.	Triângulos; relações lógicas.	O sujeito deve formar uma imagem mental das característic as descritas no enunciado.	Alternativa B: se S é verdadeira, então T é verdadeira.

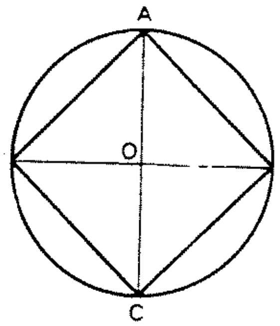
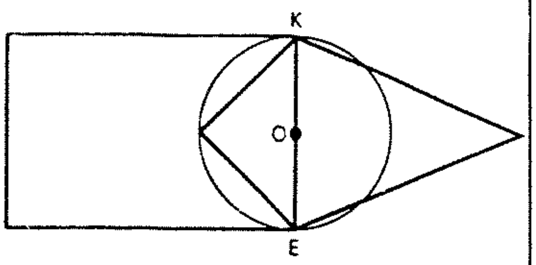
13) Qual (ou quais) dessas figuras pode ser chamada de retângulo?  a) todas podem; b) somente Q; c) somente R; d) somente P e Q; e) somente Q e R.	Retângulo, quadrado.	O sujeito deve conhecer a inclusão da classe dos quadrados em retângulos.	Alternativa A: todas podem.
14) Qual é verdadeira? a) todas as propriedades dos retângulos são propriedades dos quadrados; b) todas as propriedades dos quadrados são propriedades dos retângulos; c) todas as propriedades dos retângulos são propriedades dos paralelogramos; d) todas as propriedades dos quadrados são propriedades dos paralelogramos; e) nenhuma de (a) a (d) é verdadeira.	Retângulos, quadrados e suas propriedades.	O sujeito deve conhecer a inclusão da classe dos quadrados em retângulos, através de suas propriedades	Alternativa A: todas as propriedades dos retângulos são propriedades dos quadrados.
15) O que todos os retângulos têm que alguns paralelogramos não têm? a) lados opostos iguais; b) diagonais iguais; c) lados opostos paralelos; d) ângulos opostos iguais; e) nenhuma de (a) a (d).	Retângulos, paralelogramos e suas propriedades.	O sujeito deve conhecer a inclusão da classe dos retângulos em paralelogramos, através de suas propriedades	Alternativa B: diagonais iguais.

Quadro 4: Análise das questões que compuseram a prova de percepção.

QUESTÃO	CONCEITOS MATEMÁTICOS	HABILIDADES MATEMÁTICAS	PERCEPÇÃO INICIAL	PERCEPÇÃO TOTAL
1) Quantos são os segmentos (e quais são eles?) 	Segmento de reta; inclusão de segmento em outro de uma mesma reta.	Percepção de elementos interpenetrantes. O aluno deve ser capaz de perceber que não só AB constitui-se como um segmento, mas também AC.	4 segmentos: AB, BC, CD, DE.	10 segmentos: AB, BC, CD, DE, AC, AD, AE, BD, BE, CE.

2) Quantos são os ângulos retos? 	Ângulo reto; intersecção de segmentos de retas.	Percepção de elementos interpenetrantes; rotação de figuras no plano. O aluno pode rotacionar a figura mentalmente (ou o próprio papel) ou ser capaz de visualizar apenas pares de retas de cada vez.	4 ângulos	8 ângulos
3) Quantos setores são mostrados (e quais são eles?) 	Setor circular; inclusão de setor circular na circunferência de origem.	Percepção de elementos interpenetrantes. A solução correta dessa questão exige que o aluno perceba que dois setores disjuntos (AB e BC) formam também um terceiro setor (AC).	3 setores: AB, BC, CA	6 setores: AB, BC, CA, AC, BA, e a circunferênci a toda.
4) Quantos são os ângulos (e quais são eles?) 	Ângulo; inclusão de um ângulo em outro.	Percepção de elementos interpenetrantes. Dois ângulos disjuntos formam também um terceiro ângulo.	3 ângulos: AOB, BOC, COD.	6 ângulos: AOB, BOC, COD, AOD, AOC, BOD.
5) Quantos são os triângulos (e quais são eles?) 	Triângulo; inclusão de um triângulo em outro.	Percepção de elementos interpenetrantes. Dois triângulos podem formar um terceiro.	3 triângulos: ABO, CDO, ADO.	5 triângulos: ABO, CDO, ADO, ABD, ACD.
6) Que figuras podem ser vistas? 	Triângulos; retângulos trapézios.	Percepção de elementos interpenetrantes. A partir de um retângulo, várias figuras são construídas.	Uma resposta entre: triângulos, retângulos e trapézios.	Todas as respostas anteriorment e citadas.

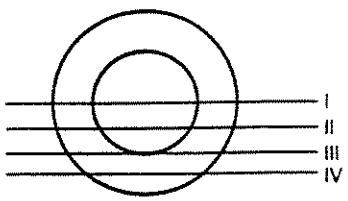
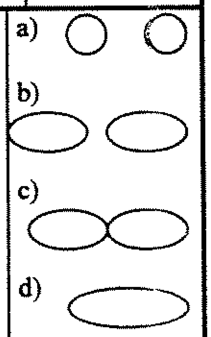
7) Pinte: a) a parte do plano comum às três figuras. 	Triângulo; círculo; retângulo.	Percepção de elementos interpenetrantes. O aluno deve perceber que parte do plano representa a área comum às três figuras.		
b) a parte comum ao círculo e ao triângulo. 	Triângulo; círculo; retângulo.	Percepção de elementos interpenetrantes. O aluno deve perceber que parte do plano representa a área comum às duas figuras, e que a terceira não faz parte da solução, portanto não interfere.		
c)a parte comum ao triângulo e ao retângulo. 	Triângulo; círculo; retângulo.	Percepção de elementos interpenetrantes. O aluno deve perceber que parte do plano representa a área comum às duas figuras, e que a terceira não faz parte da solução, portanto não interfere.		
8) O que é o segmento AB nessa figura? 	Segmento de reta; diagonal de um polígono; hipotenusa como um elemento do triângulo retângulo; bissetriz de um ângulo Â.	Percepção de elementos interpenetrantes. O aluno deve perceber que um elemento pode ser nomeado distintamente, pois possui diferentes funções.	Uma resposta entre: diagonal do quadrado, hipotenusa do triângulo, bissetriz do ângulo.	Todas as repostas anteriormente citadas.

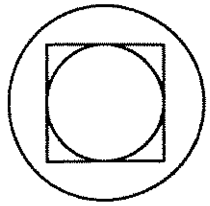
9) O que o segmento AC representa? 	Segmento de reta; diâmetro/raio de círculo; diagonal de um polígono; triângulo; bissetriz de um ângulo; hipotenusa.	Percepção de elementos interpenetran-tes. O aluno deve perceber que um elemento pode ser nomeado distintamente, pois possui diferentes funções.	Uma resposta entre: diâmetro do círculo/ corda, diagonal do quadrado, lado de um/dois triângulos, bissetriz.	Todas as respostas anterior-mente citadas.
10) O que é o segmento KE nessa figura? 	Segmento de reta; diâmetro do círculo/corda, lado do retângulo, diagonal do quadrilátero, lado de dois triângulos, hipotenusa de triângulo.	Percepção de elementos interpenetran-tes. O aluno deve perceber que um elemento pode ser nomeado distintamente, pois possui diferentes funções.	Uma resposta entre: diâmetro do círculo/corda, lado do retângulo, diagonal do quadrilátero, lado de dois triângulos, hipotenusa de triângulo.	Todas as respostas anterior-mente citadas.

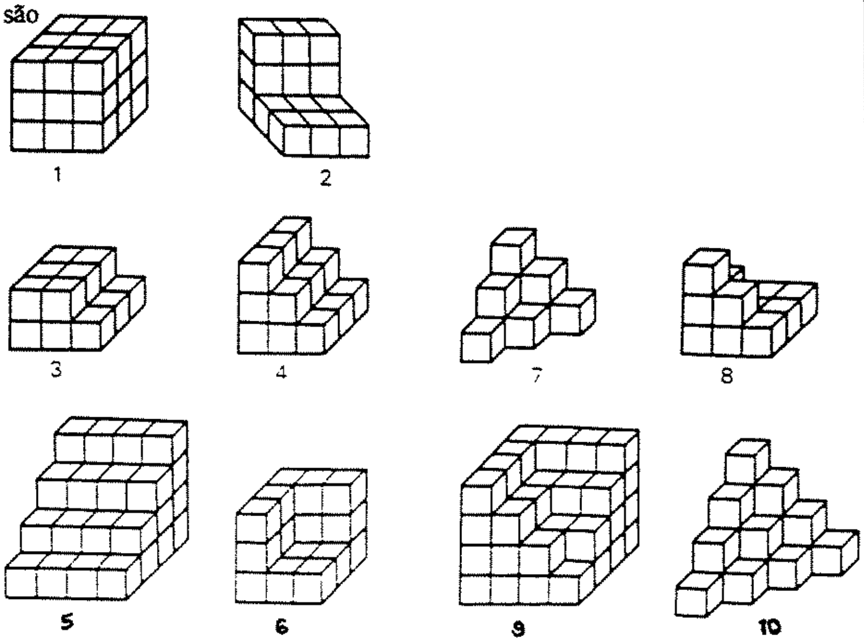
Quadro 5: Análise das questões da prova de conceitos espaciais.

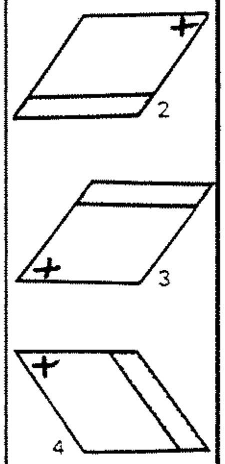
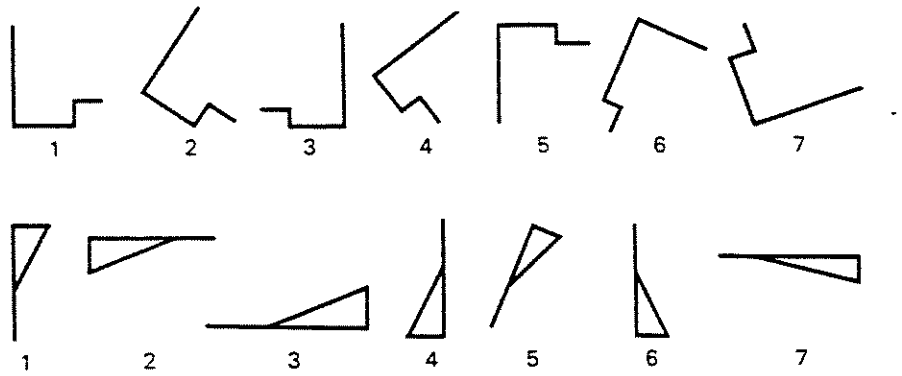
QUESTÃO	CONCEITOS MATEMÁTICOS	HABILIDADES MATEMÁTICAS	RESPOSTA CORRETA
1) O diâmetro de um círculo é igual a 17cm. Dada uma reta, ela terá pontos em comum com o círculo se a distância entre a reta e o centro for igual a: 6cm? 8,5 cm? 10 cm?	Diâmetro de um círculo; reta; intercessão de reta e círculo; distância entre reta e o centro de um círculo.	O aluno deve ser capaz de formar uma imagem mental da situação ou demonstrar habilidade em esboça-la. Deve saber que essa distância está sobre a perpendicular à reta que passa pelo centro do círculo.	Sim, dois pontos em comum; sim, um ponto em comum; não.
2) São dados dois círculos, cujos raios são 2cm e 3 cm. A distância entre os seus centros é 4 cm. Eles se interceptam?	Círculo e seu centro; distância entre dois pontos.	O aluno deve ser capaz de formar uma imagem mental da situação ou demonstrar habilidade em esboça-la, percebendo que um círculo possui o raio maior que o outro.	Sim.
3) a. Que ângulo faz o ponteiro das horas em duas horas? B. E em 20 minutos? c. E o ponteiro dos minutos em 10 minutos? d. E em 20 minutos?	Ângulo central de um círculo; Medida de ângulo central.	O sujeito precisa imaginar o trajeto do ponteiro do relógio e que medida tem o ângulo formado por essas trajetórias.	a. 60°; b. 10°; c. 60°; d. 120°.

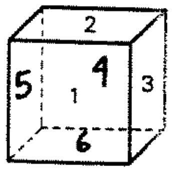
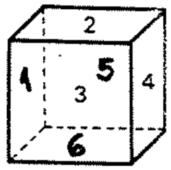
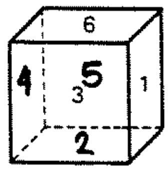
4) Uma reta está a 8 cm do centro de um círculo cujo raio é 4 cm. Determine a distância máxima e mínima da reta aos pontos do círculo. (Observação: a distância entre um ponto e uma reta é determinada pela perpendicular traçada do ponto a reta)	Distância entre reta e círculo.	O aluno deve ser capaz de formar uma imagem mental da situação ou demonstrar habilidade em esboçá-la. Mesmo que o problema enuncie o que é tal distância, o aluno deve possuir esse conceito em seu repertório de conhecimento, ou habilidade suficiente para tal.	Distância máxima é 12 cm; distância mínima é 4 cm.
5) Dados um círculo e um ponto fora dela. A partir desse ponto são traçadas uma tangente e uma secante. O que é maior, a distância entre o ponto dado e o ponto de tangência ao círculo ou o segmento externo da secante ao ponto?	Distância entre reta e círculo; reta secante e tangente ao círculo.	O aluno deve ser capaz de formar uma imagem mental da situação ou demonstrar habilidade em esboçá-la. Conseguir comparar as distâncias entre essas retas e o círculo.	Distância entre o ponto dado e o ponto de tangência.
6) Dado um quadrado. O ponto médio de cada lado é ligado ao ponto médio do lado consecutivo. a) Que figura é obtida a partir dessa construção? b) Que parte da área do quadrado dado constitui a área da figura construída?	Quadrado; ponto médio de um segmento; lados consecutivos de um polígono; área de figuras planas; proporção.	O aluno deve ser capaz de formar uma imagem mental da situação ou demonstrar habilidade em esboçá-la corretamente, unindo os pontos médios dos lados consecutivos e não dos lados opostos.	a. quadrado (as respostas losango e retângulo foram consideradas meio certo); b. a metade, ½, 50%.
7) Um terreno é fechado por uma cerca com 128 m de perímetro. O comprimento é 3 vezes maior que a largura. Qual é o comprimento e a largura do terreno?	Retângulo e seus elementos; perímetro; conhecimentos algébricos.	O sujeito pode imaginar e desenhar (ou não) a situação. Uma das soluções é construir o sistema 128 = 2a + 2b, onde a = 3b.	Largura 16m, comprimento 48m.
8) Um playgroud cuja largura é 5 vezes menor que o seu comprimento, tem todos os lados cercados por uma cerca de largura constante. A borda externa da cerca é 24m maior que a borda interna, e a área da cerca é 468 m^2. Determine a área do playgroud.	Retângulo e seus elementos; perímetro; área; constância de algumas medidas do terreno e da cerca; conhecimentos algébricos.	O sujeito pode imaginar e desenhar (ou não) a situação. Deve coordenar cálculos algébricos entre várias equações de áreas e entre comprimento e largura, como uma das soluções.	720 m^2.
1) a) Quantos vértices, arestas e faces possui um cubo? b) Quantas arestas originam-se de cada vértice do cubo? c) Quantas são as diagonais de superfície do cubo?	Cubo e seus elementos.	O sujeito deve formar a imagem mental de um cubo, sendo capaz de descompor as arestas, faces e vértices para contagem. Visualizar um vértice e as arestas que se originam.	a) 8 vértices, 12 arestas e 6 faces. b) 3 arestas. c) 12 diagonais.

2) Através de um ponto fora do plano, quantas linhas retas podem ser traçadas paralelas ao plano?	Posições relativas entre pontos, retas e planos.	Durante a solução mental, o sujeito pode esquematizar a situação (ou não), ultrapassando a idéia de somente uma reta, mas infinitas.	Infinitas retas.
3) Uma caneta está atrelada ao fim de outra, que tem qualquer posição no espaço. Que superfície este fim descreve?	Posição relativa entre duas retas.	Perceber que dois segmentos de reta podem estar se interceptando transversalmente ou sobre a mesma reta.	Um plano ou uma reta.
4) Um quadrado é rotacionado sobre um de seus lados. Determine o tipo de sólido de rotação.	Quadrado, cilindro. Rotação no espaço.	Ser capaz de compor uma rotação mental a partir de um dos lados do quadrado.	Cilindro.
5) Que superfície forma-se ao se rotacionar um triângulo retângulo sobre um cateto?	Triângulo retângulo, cone. Rotação no espaço.	Ser capaz de compor uma rotação mental a partir de um dos catetos do triângulo retângulo.	Cone.
6) Qual é o sólido obtido pela rotação de um triângulo retângulo sobre um eixo paralelo a um de seus catetos?	Triângulo retângulo, cone, cilindro. Rotação no espaço.	Ser capaz de compor uma rotação mental a partir de um dos catetos do triângulo retângulo, percebendo que surgirá uma falha na figura.	Um cone sem o cilindro central.
7) a) Qual é a forma da secção de um cubo paralela a uma face lateral? b) Qual é a forma da secção diagonal de um cubo?	Cubo. Secção paralela, secção diagonal.	Imaginar um corte paralelo a uma face e outro na diagonal do cubo.	a) quadrado. b) retângulo
8) Qual é a forma de uma secção de um cilindro paralela ao seu eixo?	Cilindro. Secção paralela.	Imaginar um corte paralelo ao eixo central do cilindro.	Retângulo
9) (fig. 45) Imagine um sólido do tipo de um anel (uma aliança, um pneu). Este sólido é seccionado por 4 planos paralelos passando: a) através do eixo do anel; b) através do ponto médio do raio interno do anel; c) através da extremidade do raio interno do anel; d) eqüidistante às extremidades dos raios internos e externos. Represente (mesmo aproximadamente) a forma de cada secção. 	Secção.	O "anel" não é uma figura trabalhada em sala de aula, portanto a solução desse problema depende apenas da habilidade do sujeito em, olhando para o esquema fornecido, imaginar o resultado das quatro secções pedidas.	

10) Imagine um cubo na qual uma esfera está inscrita (portanto, tangenciando os pontos médios das faces do cubo) e uma esfera está circunscrita (tocando os vértices). Desenhe a forma da secção por um plano que passa paralelo a dois lados do cubo, através do centro da esfera interna.	Cubo, esfera. Inscrição, circunscrição.	A representação mental dessa situação requer também a capacidade de organizar várias situações.	
11) Como está situado um segmento no espaço em relação ao plano de projeção se: a) está projetado sobre um ponto; b) sua projeção é igual ao próprio segmento; c) sua projeção é menor que o próprio segmento?	Ponto, reta, plano. Projeção.	Representar mentalmente o plano e várias posições do segmento de reta em relação a esse plano.	a) perpendicular ao plano b) paralelo ao plano c) transversal ao plano
12) Como estão situados dois segmento no espaço se eles estão projetados: a) sobre um ponto; b) sobre um segmento; c) sobre dois pontos; d) sobre um segmento e um ponto fora dele?	Ponto, reta, plano. Projeção.	Representar mentalmente o plano e várias posições dos segmentos de reta em relação a esse plano.	a) paralelos ao plano, sobre a mesma reta b) paralelos, na mesma direção c) perpendiculares, em retas distintas d) um paralelo e o outro perpendicular ao plano.
13) Como está situado um triângulo retângulo no espaço em relação ao plano de projeção se está projetado: a) sobre um segmento de reta; b) sobre um triângulo retângulo; c) sobre um triângulo obtusângulo?	Triângulo retângulo. Ponto, reta, plano. Projeção.	Representar mentalmente o plano e várias posições do triângulo retângulo em relação a esse plano.	a) perpendicular ao plano b) paralelo ao plano c) transversal ao plano
14) Um cubo de madeira pintado com uma aresta de 10 cm está dividido em pequenos cubos, cada um com 1 cm de aresta. a) Quantos cubos pequenos têm uma face pintada? b) duas? c) três? d) nenhuma face pintada?	Cubo e seus elementos.	O solucionador deve coordenar todas as partes, para conseguir contar quantos são os cubos com uma face pintada, etc..	a) 384 b) 192 c) 413

15) Um balão subiu primeiro 200m, então passou 100m a noroeste, caiu 100m, e viajou 500m a nordeste. Então ele voltou e viajou 100m a sudeste. Então caiu 100m. De quanto é a distância entre o balão e o ponto de partida?	Localização no espaço. Retângulo.	O aluno deve perceber que a altura do balão não irá variar entre a situação inicial e final, e que o percurso entre essas situações é formada por um retângulo.	500 m
1) Conte quantos cubos são mostrados.			
	Cubo.	O sujeito deve ser capaz de contar não somente os cubos que estão aparentes, mas também os que não estão.	(1) 27; (2) 15; (3) 15; (4) 18; (5) 40; (6) 19; (7) 10; (8) 13; (9) 50; (10) 18 Foi atribuído 0.5 ponto a cada item se o sujeito contou corretamente somente os cubos aparentes, sendo consideradas corretas: 19, 13, 11, 12, 22, 15, 6, 11, 28, 10.

2) Marque a posição da cruz nas figuras 2, 3 e 4. 	Paralelogramo. Rotação no plano.	O sujeito pode executar rotações no plano, ou perceber que a cruz encontra-se no ângulo agudo não hachurado.		
3) Quais das figuras da direita é a mesma figura mostrada no extremo esquerdo? 				
	Rotação no plano.	Além de identificar as figuras iguais após uma rotação, o solucionador deve perceber as diferenças entre os tamanhos dos elementos das figuras.	a) 2 b) 4	0.5 ponto: a) 4; b) 5 e 7

4) Um cubo é mostrado com as faces determinadas pelos número 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Determine com números as faces escondidas nas três representações.	Cubo. Rotação no espaço.	O sujeito deve identificar a correspondência entre as faces do cubo, numerando-as.	 1  2  3