UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

EFEITOS DE UMA ESTRATÉGIA DIFERENCIADA DE ENSINO DO CONCEITO DE MATRIZES

MARIA HELENA FIGUEIREDO SANCHES

ORIENTADORA: PROFª. DRª. MÁRCIA R. F. DE BRITO

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida por Maria Helena Figueiredo Sanches e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: ___/___/___

Assinatura: ____

Comissão Julgadora:

____

____

____

____

2002

CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO ELABORADA PELA BIBLIOTECA DA FACULDADE DE EDUCAÇÃO/UNICAMP
Bibliotecária: Rosemary Passos - CRB-8ª/5751

Sanches, Maria Helena Figueiredo.
Sa55e Efeitos de uma estratégia diferenciada do ensino dos conceitos de matrizes / Maria Helena Figueiredo Sanches. - Campinas, SP: [s.n.], 2002.

Orientador: Márcia Regina Ferreira de Brito.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Matrizes (Matemática). 2. Conceitos. 3. Psicologia educacional. 4. Educação matemática. I. Brito, Márcia Regina Ferreira de. II Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo verificar a eficácia de um método diferenciado do ensino de matrizes, analisando o desempenho, caracterizado pelas notas obtidas em dois instrumentos por sujeitos submetidos a duas estratégias diferentes de ensinar esse conceito. O ponto de partida foi a idéia de que o uso dos conceitos espontâneos, no ensino de um novo conceito, favorece a aprendizagem. Os sujeitos foram 105 alunos de uma escola particular de Santo André, no ABC paulista, regularmente matriculados no segundo ano de quatro cursos técnicos profissionalizantes, com idades que variavam de 15 a 18 anos. Os sujeitos foram divididos em grupo experimental e controle, sendo que os instrumentos aplicados à eles, tanto no pré como no pós-teste, foram duas provas matemáticas, tipo lápis e papel, que versavam sobre matrizes, aplicadas simultaneamente durante as aulas de matemática. O grupo experimental foi submetido a uma intervenção com dinâmicas de grupo, utilização de situações-problema elaboradas a partir dos conhecimentos prévios dos alunos e realização de atividades interdisciplinares com o uso dos conceitos de matrizes até então estudados. Já para o grupo controle o conteúdo foi apresentado em sua forma final, sendo dadas as definições, o desenvolvimento das fórmulas e exercícios de fixação. Após a intervenção, tanto no grupo controle quanto no grupo experimental, foram aplicadas as duas provas usadas no pré-teste, que nesse momento, foram usadas como pós-teste. Foram encontradas diferenças significativas ($p<0,05$) no desempenho dos sujeitos dos dois grupos, tendo o grupo experimental apresentado melhor rendimento.

Palavras-chave: formação de conceitos; solução de problemas; psicologia da educação matemática; ensino de matrizes.

ABSTRACT

The main objective of this classroom-based research was to verify the differences between two methods using to teach the concept of matrices. Subjects (ages between 15-18) were submitted to two different ways of teaching the concept and the starting point was the idea that using spontaneous concepts will facilitate learning. Subjects were 105 students of a private school, divided into experimental and control group. Instruments in pre and pos test were two paper and pencil tests about matrices, applied simultaneously during the mathematics classes. Experimental group's class included group- studies and problem solving activies, involving the use of the concept of matrices. The control group content was presented in its final form, complete definitions, development of formulas and exercises. Analysis showed a significant difference ($p \leq 0{,}050$) between the two groups with experimental overperforming control group.

Key-words: concept formation; problem solving; psychology of mathematics education; teaching matrices.

AGRADECIMENTOS

À Deus que me possibilitou superar todos os obstáculos que se interpuseram no meu caminho.

À professora Drª. Márcia Regina de Brito pelos ensinamentos, orientação e incentivo no desenvolvimento deste estudo e por sua compreensão nos momentos difíceis.

À professora Drª. Claudette Maria Medeiros Vendramini pela imprescindível assessoria na realização dos cálculos estatísticos contidos neste estudo.

Aos responsáveis pela biblioteca da UNICAMP pela orientação e apoio durante a realização desta pesquisa.

Aos funcionários da Secretaria de pós-graduação pelo bom atendimento.

À todos os professores da UNICAMP com os quais muito aprendi e que tornaram possível este estudo.

Aos colegas e amigos do grupo de pesquisa em Educação Matemática, PSIEM/UNICAMP, pelo incentivo e sugestões dadas durante o decorrer da pesquisa.

Aos meus familiares, em especial a minha filha Luciana pela compreensão nos momentos de ausência e pelas leituras e comentários feitos.

À todos os meus alunos com os quais muito aprendi e à escola na qual realizou-se este estudo, por me possibilitar um ensino diferenciado.

Os caminhos que levam às grandes vitórias na vida tem faces tortuosas, e nem sempre é fácil acertar qual a direção. Mas Deus, nos ensinou que existe um caminho no qual viveríamos debaixo da vitória e este caminho é o Senhor, aquele que tudo pode e cujo plano jamais perecerá. Aquele que sustentou meus sonhos como rocha e me ajudou nesta conquista.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

Delimitações do Estudo 01

CAPÍTULO II

Um Breve Histórico sobre Matrizes..........08

CAPÍTULO III

Alguns Estudos sobre os Conceitos de Matrizes..........17

Análise dos livros didáditos..........24

CAPÍTULO IV

Alguns Subsídios Teóricos para a Prática Pedagógica 35

A Teoria Genética e a Aprendizagem Escolar 36

Algumas Contribuições de Vygotsky para o Ensino-aprendizagem 41

A Aprendizagem Significativa segundo Ausubel e outros 46

Algumas Contribuições de Vergnaud para o Ensino-aprendizagem 55

Conceitos: Formação e Desenvolvimento Conceitual 58

Algumas considerações sobre Solução de Problemas 64

CAPÍTULO V

Delineamento da Pesquisa..74

Objetivos do Estudo 77

Sujeitos 78

Instrumentos Utilizados 78

Procedimentos da Pesquisa..79

CAPÍTULO VI

Resultados e Análise de Dados..83

Análise Descritiva dos Sujeitos em Relação ao Curso e a Idade 83

Desempenho dos Sujeitos por Grupo (Controle e Experimental), Tipo de prova (Não formal e Formal) no Pré-teste............... 88

Desempenho dos Sujeitos por Grupo (Controle e Experimental), Tipo de Prova (Não-Formal e Formal) no Pós-teste..89

Desempenho Comparativo dos Sujeitos em Relação ao Grupo, Tipo de Prova no Pré e Pós-teste..91

Desempenho de todos os Sujeitos da Pesquisa em Relação aos Testes (Pré e Pós) e aos Tipos de Prova 93

Desempenho Comparativo dos Sujeitos, por Grupo, Tipo de Prova no Pré e Pós-teste, referente as questões 1, 4 e 5 da prova não formal e as questões 6,7,8 e 9 da prova formal..94

Desempenho dos Sujeitos por Grupo nas Questões 5,6 e 7 no Pré e Pós-teste...................96

Desempenho dos Sujeitos em relação as questões 6a, 6b e 6c por Grupo no Pré e Pós-teste..98

CAPÍTULO VII

Conclusões e Implicações do Estudo...101

REFERÊNCIAS 106

ANEXOS 112

Anexo.1 Questões propostas por Glidden 113

Anexo.2 Exemplos da Utilização de Matrizes propostos por Alexander 119

Anexo.3 Relação dos Livros Didáticos Analisados 121

Anexo.4 Exemplo de Atividades, Sugestões de Alunos e fotos de alguns trabalhos 122

Anexo.5 Prova I 131

Anexo.6 Prova II 135

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1. Estatística Descritiva das Médias Obtidas pelos Sujeitos por Curso e Tipo de Prova no Pré-teste..85

Tabela 2. Médias e Desvio Padrão dos Sujeitos por Tipo de Prova e Grupo no Pré-teste...88

Tabela 3. Médias e Desvio Padrão dos Sujeitos por Tipo de Prova e Grupo no Pós-teste.....89

Tabela 4. Resumo da Análise de Variância (ANOVA) 90

Tabela 5. Médias e Desvio Padrão por Tipo de Prova e Grupo..94

Tabela 6. Resumo da Análise de Variância (ANOVA) das Médias dos Sujeitos nas Questões 1,4 e 5 da Prova não Formal e Questões 5,6,7,8 e 9 da Prova Formal.................................95

Tabela 7. Número e Porcentagem de Acertos, nas Questões 6a, 6b e 6c da Prova não Formal, no Pré-teste do Grupo Controle...97

Tabela 8. Número e Porcentagem de Acertos, nas Questões 6a, 6b e 6c da Prova não Formal, no Pré-teste do Grupo Experimental...98

Tabela 9. Número e Porcentagem de Acertos, nas Questões 6a, 6b e 6c da Prova não Formal, no Pós-teste do Grupo Controle...98

Tabela 10. Número e Porcentagem de Acertos, nas Questões 6a, 6b e 6c da Prova não Formal no Pós-teste do Grupo Experimental..99

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Distribuição do Número de Sujeitos de Acordo com o Curso..............................83

Figura 2. Box-plot das Médias dos Sujeitos na Prova não Formal por Curso no Pré-teste dos Grupos Controle e Experimental 86

Figura 3. Box-plot da Médias dos Sujeitos na Prova Formal por Curso no Pré-teste dos Grupo Controle e Experimental..87

Figura 4. Box-plot das Médias dos Sujeitos nas Provas não Formal e Formal por Grupo no Pré-teste..88

Figura 5. Box-plot das Médias dos Sujeitos nas Provas não Formal e Formal por Grupo no Pós-teste..89

Figura 6. Médias dos Sujeitos por Tipo de Prova no Pré e Pós-teste para o Grupo Controle e Experimental..91

Figura 7. Médias dos Sujeitos no Pré e Pós-teste para o Grupo Controle e Experimental..92

Figura 8. Médias dos Sujeitos no Pré e Pós-teste por Tipo de Prova...................................93

Figura 9. Médias nas Questões 5,6 e 7 da Prova Formal por Grupo no Pré e Pós-teste.......96

CAPÍTULO I

DELIMITAÇÕES DO ESTUDO

O movimento de educação matemática em todo o mundo levou a uma série de questionamentos sobre o papel formativo e instrumental da Matemática; passou-se a discutir a necessidade de que o ensino da Matemática privilegiasse a formação global do indivíduo com vistas a uma maior inserção social. (Imenes, 1989; D'Ambrosio, 1990)

De acordo com esses autores, o ensino deve resultar em uma aprendizagem mais significativa. A aprendizagem deve capacitar o indivíduo a se relacionar de maneira consciente com o meio social e instrumental, permitindo o seu desenvolvimento intelectual, tornando-o capaz de fazer escolhas. Para tanto, é necessário se considerar: a natureza do conhecimento e do processo de ensino-aprendizagem; o conhecimento significativo de conceitos e princípios; os procedimentos e estratégias necessárias para a solução de problemas; a representação do conhecimento; a experiência passada; o desenvolvimento de competências e habilidades; a influência do ambiente, das atitudes, da tecnologia; a relação da Matemática com outras áreas do conhecimento humano e a construção histórica do conhecimento, dentre outras.

O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM,1980) redigiu o documento "Agenda para Ação" no qual estão propostas algumas diretrizes para o ensino da Matemática. De acordo com o referido documento, deve ser dada ênfase aos aspectos sociais, antropológicos e lingüísticos da aprendizagem, bem como, ao ensino através da solução de problemas.

Em 1986, foi realizado, no Kuwait, um simpósio promovido pela *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI,1986) no qual foram discutidos os principais temas da educação matemática, temas estes que deveriam, segundo o documento, ser entendidos em uma perspectiva abrangente e integrativa. Os principais temas listados foram: **a.** Tecnologia, Sociedade e Matemática; **b.** Matemática escolar, sociedade e objetivos gerais da educação; **c.** os objetivos da Matemática escolar dentro do contexto da educação geral; **d.** a Matemática no currículo escolar; **e.** o conteúdo do currículo da Matemática escolar; **f.** como será a escola e a sala de aula nos anos noventa?

Em outra frente, o *National Council of Supervisors of Mathematics* (NCSM,1990) definiu o que seria essencial no ensino de Matemática, para o século XXI. Estabeleceu-se que, além dos conceitos e princípios matemáticos, o indivíduo deveria ser capaz de raciocinar com clareza, saber se comunicar, reconhecer e aplicar conhecimentos matemáticos em situações cotidianas.

No Brasil, em 1992, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo lançou a terceira proposta curricular do ensino de Matemática do segundo grau (CENP,1992) (atual ensino médio), que foi elaborada pela equipe técnica de Matemática da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP). Nela, a Matemática é apresentada como elemento necessário às atividades práticas e ao raciocínio lógico.

Foram analisados, na referida proposta, alguns elementos indispensáveis no ensino da Matemática e foram apontados nove itens considerados essenciais: **1.** a participação do aluno na elaboração do seu conhecimento; **2.** a significância do programa para o aluno (entendido como veículo, instrumento de trabalho e não um fim em si mesmo); **3.** o tratamento significativo dos conteúdos visando a realidade do aluno, suas aspirações, seu estágio de desenvolvimento biológico, psicológico e intelectual; **4.** a ênfase ao processo de construção do conceito matemático; **5.** a utilização de problemas para gerar a construção de conceitos, bem como, para sintetizar as idéias já trabalhadas; **6.** a busca de concretizações sem artificialismos de maneira a favorecer a passagem do imediatamente sensível para o abstrato;**7.** o tratamento do conteúdo de forma paulatina, em um crescente aprofundamento, ampliando e aperfeiçoando as idéias nele contidas; **8.** a construção do processo da linguagem, não apresentando a linguagem matemática em sua forma final, acabada, sintética e formalizada; **9.** uso da interdisciplinaridade.

Em 1999, a Secretaria de Educação Média e Tecnológica do Ministério da Educação divulgou os Parâmetros Curriculares Nacionais (MEC,1999) para o ensino médio. Este documento indica as bases legais que regem o ensino médio e também são apresentadas, respectivamente, as competências e habilidades necessárias às áreas de Linguagens, Códigos e suas Tecnologias (englobando a Língua Portuguesa, Língua Estrangeira Moderna, Educação Física, Arte e Informática); Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (compostas por Biologia, Física, Química e Matemática); Ciências Humanas e suas Tecnologias (formada por História, Geografia, Sociologia, Antropologia, Política e Filosofia).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (MEC, 1999), a Matemática tem caráter instrumental mais amplo, uma dimensão própria, de investigação e invenção. Deve ser instrumento de raciocínio e linguagem de expressão, espaço de elaboração e compreensão de idéias desenvolvidas em estreita relação com o todo social e cultural, possuindo também uma dimensão histórica.

O documento é dividido em quatro partes (parte I - Bases Legais; parte II - Linguagens, códigos e suas Tecnologias; parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; parte IV Ciências Humanas e suas Tecnologias). Na terceira parte, são apresentados os objetivos, relativos à área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Segundo esse documento, a Matemática do nível médio tem os objetivos de levar o aluno a: **a.** compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas, possibilitando a ele o desenvolvimento de estudos posteriores além de uma formação científica geral; **b.** aplicar os conhecimentos matemáticos a situações diversas, de forma a utilizá-los para interpretar a Ciência, nas atividades tecnológicas e cotidianas; **c.** utilizar as ferramentas matemáticas para analisar e valorizar as informações oriundas das mais diversas fontes de forma crítica, no que se refere as diversas áreas do conhecimento e da atualidade; **d.** desenvolver a capacidade de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo; **e.** utilizar, com confiança, procedimentos de resolução de problemas para compreender conceitos matemáticos; **f.** ser capaz de se expressar de forma oral, escrita e graficamente em situações matemáticas, valorizando a precisão da linguagem e das demonstrações em Matemática; **g.** estabelecer conexões entre os temas matemáticos e destes com o conhecimento de outras áreas do currículo; **h.** reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito; **i.** promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança no que se refere às suas capacidades matemáticas, bem como promover o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Todos os documentos, anteriormente descritos, mostram uma preocupação crescente com a participação e importância da escola na formação dos indivíduos. Os documentos brasileiros, já mencionados, buscaram selecionar e organizar os conteúdos relativos às diversas áreas do conhecimento, visando à aprendizagem significativa, que leve à integração social, à formação cultural e ao desenvolvimento de habilidades e competências necessárias ao indivíduo.

É inegável o valor dos documentos divulgados em 1992 e 1999 pela Secretaria de Educação, tanto em nível estadual como federal, referente ao ensino de Matemática. Contudo, como observou Coll (1996) não basta que se defina, concretize e seqüencie as intenções e objetivos educativos, é necessário que se estabeleça um plano de ação para alcançar e implementar as intenções e os objetivos propostos, bem como, avaliar o nível de alcance das intenções e objetivos que guiaram esse processo.

O que se observou, no Brasil, foi que as propostas até então formuladas pelos órgãos responsáveis, não conseguiram implementar, de fato, suas intenções e objetivos. Isso ocorreu por diversos motivos, dentre eles, o não envolvimento da comunidade escolar quando do delineamento das intenções e objetivos e a ausência de um plano que viesse, de forma efetiva, conscientizar e capacitar todos os envolvidos no processo educativo.

Podemos citar como exemplo, a ênfase que essas propostas têm dado ao ensino da geometria, da probabilidade, da estatística, da utilização de situações reais para o ensino dos conteúdos, a mudança do sistema de avaliação, etc. Contudo como observou D'Ambrosio (1990, p. 28)

> (...) *embora haja o desejo de trabalhar com situações "realmente reais", essas não conseguem entrar nas salas de aula, a menos que se mude de atitude com relação à matemática. Mais que tudo, isso é o resultado de uma barreira epistemológica.. A dinâmica curricular está presente na sala de aula, mas o currículo de matemática é decidido de forma bastante conservadora, incluindo tópicos que atingiram sua forma final.*

Cabe à escola viabilizar a interação social, a formação cultural e estimular o desenvolvimento de forma harmoniosa das diversas competências e habilidades dos alunos. O professor deve ter claro que o ensino de conteúdos matemáticos não pode ocorrer alheio a estas questões.

Dentro desse contexto, é necessário que se defina a natureza e a importância dos conteúdos escolares, como observou Coll e outros (2000, p.298) quando afirmaram que:

> *Para centrar, desde o princípio, a discussão sobre sua natureza e sua importância deve-se deixar claro que, atualmente, encontramo-nos longe tanto de considerar que uma proposta de conteúdos escolares possa vir a ser um produto historicamente invariável como de considerá-la um elemento da educação do qual se possa prescindir.*

É evidente a importância dos conteúdos específicos, porém, devem ser questionados quais conteúdos estão sendo ensinados e como se verifica a ocorrência da aprendizagem. Coll e outros (2000, p. 299) apontaram que:

> *A aquisição de conhecimentos na escola ocorre em um contexto social e em um âmbito de relações interpessoais e é garantida graças à mediação de outros. Conseqüentemente, os conteúdos são um elemento altamente relevante, já que constituem o eixo em torno do qual se estruturam as relações mútuas entre professores e alunos e são o elemento cultural mediador do desenvolvimento e da aprendizagem. A seleção de conteúdos é provavelmente mais correta quando é feita levando-se em conta aquilo que o aluno conhece e as aprendizagens nas quais necessita ser ajudado, isto é, se, ao mesmo tempo, considera os que são mais significativos, do ponto de vista do desenvolvimento pessoal, e os que são mais relevantes para*

estabelecer relações significativas, culturalmente falando, com o de outros no contexto de atividades compartilhadas.

Tendo em vista a relevância do ensino dos conteúdos específicos de matemática e as dificuldades que são percebidas no ensino, o presente trabalho buscou analisar a aprendizagem dos conceitos matemáticos, centrando o foco do estudo no conceito de matriz.

A experiência como professora no ensino médio possibilitou a compreensão de que, quase sempre, o ensino-aprendizagem de matrizes é um ensino voltado para a transmissão de regras, descontextualizado da realidade e da própria Matemática, em total descompasso com os avanços tecnológicos e com os estudos já realizados pela Psicologia Educacional.

Na análise do tema matrizes, tanto na terceira proposta curricular para o ensino de Matemática no segundo grau (atual ensino médio) do Estado de S. Paulo como em alguns livros didáticos foi verificado que, apesar do estudo de matrizes fazer parte do currículo do ensino público, a proposta curricular bem como a matriz curricular de referência para o SAEB, desenvolvido pela Secretaria do Ensino Fundamental e pela Secretaria de Ensino Médio e Tecnológico, não dedicaram nenhum tópico específico a esse conteúdo. Matrizes e determinantes aparecem apenas como ferramentas ágeis na discussão e resolução de sistemas lineares, não sendo apresentada nenhuma sugestão quanto à introdução do conceito através de situações-problema e também não é feita qualquer menção à história do surgimento do conceito de matrizes.

Já nos livros didáticos analisados, verificou-se que a grande maioria apresenta uma organização cristalizada dos conteúdos e os conceitos aparecem apenas como ferramentas da resolução de sistemas lineares. Os conceitos de matrizes não aparecem em nenhum outro tipo de problema, seja de Geometria Analítica, Análise Combinatória, Vetores, Eletricidade ou outros. Além disso, não se verifica a mudança do quadro algébrico para o geométrico e vice-versa.

O conceito de matriz, embora esteja presente no cotidiano dos alunos (elaboração de tabelas, quadrado mágico, jogos, etc) e seja tratado de modo elementar desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, como se pode observar em alguns livros didáticos (a exemplo do livro de Matemática para a 5ª série de Imenes & Lellis (1997, p.77 e 93) só vai ser estudado no Ensino Médio. Sua abordagem é feita de maneira axiomática, prevalecendo a linguagem Matemática. O conceito de matriz é objeto de estudo e, poucas vezes ferramenta. Despreza-se, também, o fato da matriz ser um importante instrumento para a compreensão de outros conceitos.

A álgebra das matrizes tem importância significativa para várias ciências e encontra, cada vez mais, aplicações em diversos setores como a Economia, a Engenharia e Tecnologia, etc. Se não ocorrer uma aprendizagem significativa e relevante dos conceitos de matrizes, os estudantes poderão apresentar dificuldades, em níveis mais avançados, para compreender e aplicar outros conceitos relacionados, tais como conceitos de programação, computação gráfica, custos de produção, teoria dos grafos, circuitos elétricos, modelos econômicos lineares, entre centenas de outros.

Também deve ser considerado que o professor, poucas vezes, recorre aos conhecimentos que o estudante já possui. Os professores, muitas vezes, não apresentam problemas desafiadores e nem problemas ligados a situações cotidianas e de interesse para os estudantes, limitando o ensino às exposições orais e a resolução de exercícios e problemas na lousa. Com isso, o estudante pode sentir-se desmotivado e pouco inclinado a participar das aulas.

Considerando as sugestões das propostas apresentadas para o ensino de Matemática (NCSM,1990; PCN,1999) e a importância e relevância de um ensino que busque a formação significativa dos conceitos, bem como a construção do conhecimento pelo estudante, a partir das experiências que o mesmo já tem, tornando-se competente para aplicar esse conhecimento no cotidiano, foi formulada a seguinte questão de pesquisa:

O conhecimento anterior sobre um conceito e uma estratégia diferenciada de ensino podem auxiliar na formação dos conceitos científicos e melhorar o desempenho dos estudantes do ensino médio na solução de problemas sobre matrizes ?

CAPÍTULO II

UM BREVE HISTÓRICO SOBRE MATRIZES

O ensino-aprendizagem de um conceito torna-se mais significativo quando o professor conhece a origem e a evolução do mesmo, sendo capaz de levar o aluno a perceber como esse foi se modificando ao longo do tempo. Segundo Vergnaud (1994) é bastante produtivo quando o ensino-aprendizagem do conhecimento matemático ocorre a partir do estudo interativo do processo individual e histórico, pois quando se faz a análise dos obstáculos vividos, no passado, por estudiosos da Matemática, pode-se compreender os erros cometidos hoje pelos alunos.

Tendo em vista a idéia, subjacente ao presente trabalho, de que a apresentação dos conceitos matemáticos deve vir precedida por uma ilustração de seu desenvolvimento e de sua evolução, buscou-se traçar um breve histórico do conceito de matrizes. Porém, quando esse tópico é apresentado aos alunos do segundo grau, são tratados apenas os aspectos essenciais sobre o surgimento e a evolução dos conceitos de matrizes. Hawkins (1975, 1977a, 1977b)

De acordo com Hawkins (1975, 1977a, 1977b) que serviu de fundamento na elaboração do presente histórico, o início do estudo das matrizes e determinantes deu-se por volta do século II a.C., apesar de ser possível marcar o aparecimento do conceito no século IV a.C.. Porém, foi a partir do século XVII que as idéias reapareceram e ocorreu o desenvolvimento do conceito por meios não convencionais.

O aparecimento mais formalizado dos conceitos de matrizes e determinantes ocorreu através do estudo de sistemas de equações lineares. Os babilônios estudavam problemas que conduziam às equações lineares simultâneas, sendo que algumas delas foram preservadas em blocos de barro que não se deterioraram. Por exemplo, um bloco, por volta de 300 a.C. contém o seguinte problema:

Dois campos tem área total de 1800 jardas quadradas. Um produz grãos em 2/3 de um alqueire por jarda quadrada, enquanto o outro produz grãos em 1/2 de um alqueire por jarda quadrada. Se o lucro total é de 1100 alqueires, qual o tamanho de cada campo?

Os chineses, entre 200 a.C. e 100 a.C., aproximaram-se mais do método das matrizes que os babilônios. Na verdade, é justo dizer que o texto *Nove Capítulos sobre a arte Matemática*, escrito durante a Dinastia Han, dá o primeiro exemplo cotidiano do método de matriz. Verifica-se, nesse texto, um problema semelhante ao exemplo babilônio dado acima.

Existem três tipos de milho, sendo que três pacotes do primeiro, dois do segundo e um do terceiro formam 39 unidades. Dois do primeiro, três do segundo e um do terceiro formam 34 unidades. Em um do primeiro, dois do segundo e três do terceiro formam 26 unidades. Quantas unidades de milho estão contidas em cada tipo de pacote?

Em seguida, o autor ajustou os coeficientes do sistema de três equações lineares à três incógnitas, tal como em uma tabela. A única diferença está em que, como os chineses costumam escrever de cima para baixo e da direita para a esquerda, também escreveram as linhas da matriz verticalmente.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Os métodos mais recentes, surgidos no século vinte permitem escrever as equações lineares como linhas da matriz, ao invés de colunas, mas, o método é idêntico.

O problema acima pode ser escrito através de um sistema de equações lineares da seguinte forma: $\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$ ou então: $\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}$

Mais notavelmente, o que o autor escreveu em 200 a.C. ensina o leitor a multiplicar a coluna do meio por 3 e subtrair a coluna da direita *quantas vezes for possível*; o mesmo é feito, com a primeira coluna, ou seja, multiplica-se a primeira coluna por 3 subtraindo-se a coluna da direita quantas vezes for possível.

$\bullet 3$	$\bullet 3$											
1	2	3	3	6	3	3-3	6-3-3	3	Temos então:	0	0	3
2	3	2	6	9	2	6-2	9-2 -2	2		4	5	2
3	1	1	9	3	1	9-1	3-1-1	1		8	1	1
26	34	39	78	102	39	78-39	102-39-39	39		39	24	39

Depois, a maior coluna da esquerda é multiplicada por 5 e então a coluna do meio é subtraída *quantas vezes for possível*. Isso dá:

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

o resultado é achado pelo terceiro tipo de milho, depois pelo segundo e, então, o primeiro, pela substituição anterior. Esse método agora é conhecido como método de eliminação de Gauss, que só passou a ser conhecido no começo do século dezenove.

Cardan, em *Ars Magna* no ano de 1545, propôs uma regra para resolver um sistema de duas equações lineares, chamado por ele de *regula de modo,* traduzida como *mãe das regras.* Essa *mãe das regras* é, essencialmente, o mesmo que a regra de Cramer para resolver o sistema 2x2. Embora Cardan não tenha alcançado a definição de um determinante, pode ser percebido, com a vantagem do retrospecto, que seu método conduzia à definição.

A idéia de determinante apareceu quase simultaneamente no Japão e Europa. Contudo, a primeira publicação foi de Seki, no Japão. Em 1683, Seki escreveu *Methods of solving the dissimulated problem*, obra que apresentou os métodos matriciais escritos com tabelas, que são descritos da maneira como os métodos chineses foram construídos, mesmo sem ter nenhuma palavra correspondente à *determinante.* Seki introduziu esse conceito e explicitou os métodos gerais para calculá-los, baseado em exemplos. Utilizando seus *determinantes*, Seki foi capaz de achar determinantes de matrizes 2x2, 3x3, 4x4, 5x5 e os aplicou para resolver equações.

Na Europa, a primeira aparição de um determinante surgiu em 1683, exatamente no mesmo ano, Leibniz escreveu uma carta para o Marquis de L' Hospital. Nela, ele explicou que o sistema de equações:

$$10 + 11x + 12y = 0$$

$$20 + 21x + 22y = 0$$

$$30 + 31x + 32y = 0$$

era passível de solução, porque:

$$10.21.32 + 11.22.30 + 12.20.31= 10.22.31 + 11.20.32 + 12.21.30$$

é exatamente a condição que a matriz dos coeficientes tem determinante 0. Aqui, 21,11,12,etc indicam o que deve ser escrito como a_{21} , a_{11} , a_{12} etc. Leibniz estava convencido de que uma boa notação matemática era a chave para o progresso. Então, ele experimentou diferentes notações para sistemas de coeficientes, tendo começado em 1678 e trabalhado por um período de cinqüenta anos. Os seus manuscritos, que não foram publicados, contêm mais de cinqüenta maneiras diferentes de escrever sistemas de coeficientes. Somente duas publicações, nos anos de 1700 e 1710, contêm resultados do sistema de coeficientes e esses usam a mesma notação da carta para o Marquis de L'Hospital, mencionada acima.

Leibniz usou a palavra *resultante* para certas combinações de somas dos termos de um determinante. Ele propôs o que é, essencialmente, a regra de Cramer. Também utilizava a regra segundo a qual um determinante podia ser expandido usando qualquer coluna; técnica posteriormente chamada de *expansão Laplace*. Da mesma maneira como os estudos de sistema de coeficientes de equações levaram aos determinantes, o estudo dos sistemas de coeficientes de formas quadrangulares guiou Leibniz, naturalmente, em direção à teoria da matriz.

Maclaurin escreveu *Treatise of algebra*, que só foi publicada em 1748, dois anos após a sua morte. Nesse livro, foram publicados os primeiros resultados de determinantes, provando a regra de Cramer para sistemas de 2x2, 3x3 e indicando como o caso 4x4 funcionaria. Cramer apresentou em 1750 a regra geral para sistemas nxn no artigo *Introdução para análises de curvas algébricas*. O desejo cresceu para achar as equações de um plano curvo, passando por um número de pontos dados. A regra apareceu em um artigo *Appendix* para um jornal em 1750, sem contudo ser provada.

Cramer desenvolveu a regra que hoje leva o seu nome para resolução de sistemas através de determinantes. O método só pode ser utilizado em sistemas cujas matrizes incompletas possuem determinantes não-nulos ($D \neq 0$). Assim, dado um sistema de três equações a três incógnitas (x, y, z) e sendo D_x, D_y e D_z os determinantes formados através da substituição dos coeficientes das variáveis x, y, z pelos termos independentes, a solução do sistema é dada por $x = D_x/D$, $y = D_y/D$ e $z = D_z/D$.

A partir dos trabalhos de Cramer, os estudos sobre os determinantes tornaram-se regulares na literatura. Por exemplo, Bezout, em 1764, apresentou métodos para calcular determinantes e o mesmo foi feito por Vandermonde em 1771.

Laplace, em 1772, afirmou que os métodos introduzidos por Cramer e Bezout eram impraticáveis e, em um estudo sobre as órbitas dos planetas, discutiu a solução dos sistemas das equações lineares sem cálculos, usando apenas determinantes. Inesperadamente, Laplace utilizou a palavra “resultante” para o que nós chamamos agora de “determinante”, uma surpresa, sabendo que a mesma palavra fora usada por Leibniz. Laplace deu detalhes de um determinante que hoje recebe o mesmo nome em sua homenagem.

Lagrange, em um artigo publicado em 1773, mostrou as identidades para determinantes funcionais de ordem 3x3. Contudo, esse comentário foi tardio, uma vez que o próprio Lagrange não havia visto nenhuma conexão entre o seu trabalho e o trabalho de Laplace e o de Vandermond. Porém esse artigo de 1773, mostrou pela primeira vez, o que agora é conhecido como a interpretação de volume do sólido formado pelos pontos, cujas coordenadas são colocadas na forma de um determinante. Lagrange mostrou que o tetraedro formado por O(0,0,0) e os três pontos M(x,y,z), M'(x',y',z'), M"(x", y",z"), possue volume.

$$1/6\, [\, z\,(x'y'' - y'x'') + z'(\, y\,x'' - xy'') + z''(\, xy' - yx'\,)\,].$$

O termo determinante foi, primeiramente, introduzido por Carl F. Gauss em *Disquisitiones arithmeticae* de 1801, quando eram discutidas as formas quadráticas, e esse termo foi usado porque se referia àquilo que determinava as propriedades das formas quadráticas. Nesse mesmo trabalho, o referido autor colocou os coeficientes das suas formas quadráticas em formas retangulares variadas e descreveu a multiplicação de matriz, que ele pensava ser como uma composição, não tendo, portanto, tratado do conceito de matriz algébrica.

O método de eliminação, que já havia sido tratado em *Nove capítulos sobre a arte matemática*, de 200 a.C., foi usado por Gauss em um trabalho, no qual ele estudou a órbita do asteróide Pallas. Usando observações feitas entre 1803 e 1809, Gauss obteve um sistema de seis equações lineares com seis incógnitas e criou um método sistemático para resolver tais equações, que hoje é conhecido como método de eliminação de Gauss.

Cauchy, em 1812, usou, pela primeira vez o termo determinante no sentido moderno. O trabalho de Cauchy é o mais completo dos primeiros trabalhos sobre determinantes, tendo reprovado os primeiros resultados obtidos e dando novos resultados menores e agrupados. Em 1812, o teorema da multiplicação para determinantes foi provado pela primeira vez, em uma reunião no *Institut de France*.

Mais tarde em 1826, Cauchy, no contexto das formas quadráticas, em *n* variáveis, usou o termo *tableau* para a matriz de coeficientes. Ele obteve resultados de diagonalizações de uma matriz e introduziu também a idéia (mas não o termo) de matrizes similares, mostrando que se duas matrizes são similares, elas têm a mesma equação característica, o que provou novamente, no contexto de formas quadráticas, que toda matriz real simétrica é diagonalizável.

No trabalho de D'Alembert sobre o estudo do movimento de um barbante com massas presas a ele em vários pontos, surge, novamente, o sistema de equações lineares.

Nem Cauchy, nem Jacques Sturm (que havia trabalhado na resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias) perceberam a generalidade das idéias que eles estavam introduzindo e trataram-nas em contextos específicos, nos quais estavam trabalhando. Jacob, por volta de 1830, e, depois, Kronecker e Weierstrass, em 1850 e 1860, também estudaram os resultados da matriz, mais uma vez em um contexto especial: a noção de uma transformação linear. Jacob publicou, em 1841, três tratados sobre determinantes que foram muito importantes, pois, pela primeira vez, a definição de um determinante era feita de forma algorítmica.

Cayley publicou em 1841, a primeira contribuição inglesa para a teoria dos determinantes, usando duas linhas verticais para anotar o determinante, e isto acabou tornando-se um padrão.

O primeiro a usar o termo matriz foi Joseph Sylvester, em 1850, tendo definido matriz como *um arranjo de termos num quadrilátero*. Em 1851, depois de deixar a América e voltar à Inglaterra, Sylvester se tornou advogado e nessa época conheceu Cayley, também advogado. Com ele passou a dividir seu interesse pela Matemática. Desta amizade, resultaram vários trabalhos científicos publicados pela dupla Cayley-Sylvester.

Arthur Cayley cedo percebeu a importância do conceito de matriz e, em 1853, publicou uma nota mostrando, pela primeira vez, o inverso de uma matriz. Em 1855, em uma publicação, surgiu o termo matriz associado a arranjos retangulares, em particular a arranjos quadrados de números.

Três anos mais tarde, em 1858, foi publicada a *Autobiografia da teoria das matrizes* de Cayley que contém a primeira definição de uma matriz, em termos abstratos. Ele mostrou que as variedades dos coeficientes estudados, anteriormente, para formas quadráticas e transformações lineares são casos especiais do conceito geral.

O avanço conceitual de Cayley se deve ao fato de ter introduzido as matrizes como objetos matemáticos em si. Ele foi o primeiro a perceber o potencial destes objetos para operações algébricas, definindo adição, multiplicação, multiplicação escalar e inversa. Cayley provou também que no caso da matriz 2x2 existe uma correspondência com a equação característica própria e declarou que efetuou a prova para as matrizes 3x3, contudo, não achou necessário fazer uma prova formal para uma matriz de qualquer grau.

Aos vinte e cinco anos Cayley, já havia escrito vinte e cinco livros de Matemática, sendo que o último de seus livros encerra boa parte de suas idéias sobre invariância matricial. Nele, propõe a definição de adição e de multiplicação de matrizes por números. Além disso, apresenta a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ como elemento neutro do produto matricial e a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ como elemento neutro da adição de matrizes.

Um resultado conhecido, em 1858, como teorema de Hamilton-Cayley foi que se designarmos por M a matriz dos coeficientes e por I a matriz identidade de ordem dois, a equação característica pode ser escrita como $|M - kI| = 0$, onde as barras verticais representam o determinante da matriz. Uma das propriedades importantes da álgebra de matrizes é que uma matriz M satisfaz à sua equação característica.

Em 1870, a forma canônica de Jordan apareceu em sua obra *Tratado de substituições e equações algébricas*, que surgiu no contexto de uma forma canônica para substituições lineares em um campo limitado.

Frobenius, em 1878, escreveu um trabalho importante de matrizes *Substituições lineares e formas bilineares*, embora não mostrasse nenhum conhecimento do trabalho de Cayley. Frobenius provou resultados importantes de matrizes canônicas como representativos de classes equivalentes de matrizez, embora não tenha utilizado o termo matriz.

Frobenius também provou, em 1868, o resultado geral pelo qual uma matriz se corresponde com sua equação característica, trabalhando a definição do grau de uma matriz que foi usada em seu trabalho, com formas regulares e a definição de matrizes ortogonais.

Em 1896, Frobenius, influenciado pelo livro *Autobiografia da teoria das matrizes* escrito por Cayley em 1858, começou a usar o termo matriz. Desprezou o fato que Cayley só provou o teorema *Cayley Hamilton* para as matrizes 2x2 e 3x3 e, generosamente, atribuiu o mérito a Cayley, ignorando o fato de que ele foi o primeiro a provar o teorema geral.

Foi Weierstrass quem primeiro usou uma definição axiomática de um determinante em uma conferência, mas somente em 1903 após sua morte, este estudo foi publicado com o título *A teoria determinante*. Neste mesmo ano, foram republicadas as conferências de Kronecker sobre determinantes. Com essas duas publicações, a teoria moderna de determinantes ocupou seu lugar. Mas a teoria da matriz foi desprezada por muito tempo, antes de se tornar uma teoria completamente aceita. Segundo Cayley, o desenvolvimento das matrizes se originou dos determinantes como modo conveniente de exprimir uma transformação.

Um texto importante que reconheceu as matrizes e colocou-as em seu lugar apropriado foi *Introdução à Álgebra Avançada* de Bôcher, publicado em 1907, juntamente com os textos de Turnbull e Aitken escritos em 1930 e o de Mirsky *Uma introdução à Álgebra Linear* publicado em 1955, que levaram a teoria das matrizes a alcançar seu papel, como um dos mais importantes tópicos da Matemática. O trabalho de Cayley sobre a Álgebra das matrizes, juntamente com o de outras Álgebras não comutativas propiciou no século XX um avanço significativo no estudo da Álgebra mais formalizada.

CAPÍTULO III

ALGUNS ESTUDOS SOBRE OS CONCEITO DE MATRIZES

Embora tenham sido pesquisadas as seguintes fontes: ERIC, PSYCLIT, UNIBIBLI (base bibliográfica do acervo da USP, UNESP e UNICAMP), ANPED, PROBE, entre outras, não foram encontrados muitos trabalhos desenvolvidos sobre o ensino-aprendizagem de matrizes para o ensino médio.

Assim, optou-se por apresentar aqui não apenas pesquisas sobre a aprendizagem dos conceitos de matrizes, mas também, relatos sobre a formação e o ensino de conceitos.

O estudo de Pirola (1995), sobre a formação e o ensino do conceito de triângulo e paralelogramo que teve como sujeitos 137 alunos de uma escola da rede Oficial de Ensino do Estado de São Paulo, verificou que para o ensino dos conceitos em geometria, analisado de acordo com os pressupostos teóricos de Klausmeier, o professor deve identificar o nível em que o aluno se encontra, bem como disponibilizar uma variedade de exemplos e não-exemplos e atributos definidores dos conceitos estudados, além de possibilitar aos alunos o estabelecimento de relações supra-ordenadas e subordinadas e propor problemas desafiadores cuja solução envolva os conceitos aprendidos. Os resultados dessa pesquisa indicaram que os alunos de 7ª série apresentaram um desempenho melhor que os das outras séries. Isto comprovou que a série em que o aluno se encontrava não determinava que estes possuíam conceitos de triângulo e paralelogramo de forma mais abrangente no que se referia aos seus atributos definidores e também com relação a exemplos e não-exemplos. No presente estudo, quando da elaboração da estratégia diferenciada do ensino dos conceitos de matrizes, procurou-se identificar o nível dos alunos com relação aos conceitos, bem como disponibilizar exemplos e não-exemplos e propor problemas e situações desafiadoras tal como sugere o estudo de Pirola.

Lima (1996) desenvolveu um estudo com 19 alunas de 4º magistério e com 7 professoras de 1º grau (1ª a 4ª séries) da rede particular de ensino da cidade de Campinas e que responderam a três instrumentos destinados a coleta de dados (questionário, teste matemático e mapeamento cognitivo). A pesquisa teve como objetivo estudar a formação do conceito de fração com base na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel. Segundo esse estudo, no ensino de um conceito deve-se considerar sua origem e sua evolução através dos tempos, pois ao se refazer o caminho que o conceito de fração teve através da história, verifica-se que é o mesmo que o estudante deverá percorrer. Para a formação do conceito de fração faz-se necessário, também, que o professor utilize o constructo mental que o aluno dispõe (fração como parte de alguma coisa) de forma a relacioná-lo ao conceito como entidade pública. Outro fator de relevância na aprendizagem significativa seria oferecer ao aprendiz problemas desafiadores que levassem a um processo de reflexão sobre o conceito de fração.

Os resultados desse estudo indicaram que as alunas de magistério obtiveram melhor desempenho no mapa cognitivo e no teste matemático, já as professoras tiveram um desempenho menor no mapa cognitivo, deixando de responder as questões do teste matemático ao se sentirem inseguras quanto as respostas a serem dadas. Verificou-se, também, que a formação deficitária das professoras com relação ao conceito de fração não foi sanada com o tempo de magistério, cursos de aperfeiçoamento ou com o conhecimento dos materiais didáticos e que os alunos de magistério não conseguiram formar o conceito de fração de forma significativa, embora soubessem aplicar as "técnicas" para solução de problemas relativos às frações. Este estudo mostrou que a aprendizagem de um conceito torna-se mais significativa quando o professor leva o aluno a perceber como o mesmo foi se modificando através dos tempos e assinala a importância da utilização dos conceitos enquanto constructo mental na formação do conceito de fração, bem como a necessidade da utilização de problemas que levem a reflexão, pois quando o professor apenas "reproduz" o conceito com a utilização de fórmulas e problemas nos quais o mesmo é aplicado de maneira direta isto pode propiciar uma aprendizagem não significativa. O presente estudo procurou considerar o que Lima assinala como importante para a formação significativa dos conceitos.

De maneira semelhante ao proposto no presente estudo, Oliveira (1996) comparou dois métodos diferentes de ensino de frações, tendo como sujeitos 58 alunos da 5ª série do 1º grau de uma escola pública. Uma das classes foi escolhida para ser o grupo experimental, sendo submetida a um ensino baseado em princípios construtivistas, enquanto na outra classe os conceitos foram abordados da maneira convencional. Este estudo mostrou que a aprendizagem do conceito de fração foi influenciada pelo método utilizado para se ensinar este conceito, sendo que o grupo experimental, submetido a um ensino diferenciado, obteve melhor desempenho.

Os relatos de autores como González (1998) serviram de base para a formalização do presente trabalho, sendo por isso apresentado com maior riqueza de detalhes. Esse autor desenvolveu um estudo com o objetivo geral de verificar como o conceito de matriz era apresentado nos livros didáticos. Os objetivos específicos do estudo foram: **a.** descrever qual é o conceito de matriz apresentado por estudantes de economia e compará-los com aqueles apresentados nos livros didáticos mais usados; **b.** determinar a interpretação natural de matriz e o conceito formal de matriz; **c.** contrastar o conceito formal de matriz com o apresentado nos livros didáticos e com os dos estudantes; **d.** apresentar algumas sugestões sobre o ensino de matriz para os cursos de economia.

Após revisar vários livros didáticos de Álgebra Linear, González (1998) optou pela definição formal de matrizes proposta por Armando Rojo (1973) em seu livro de Álgebra II. Os dados foram coletados através de questionários, respondidos por 464 estudantes do curso de economia. As perguntas mais relevantes do questionário solicitavam que os sujeitos escrevessem sobre o conceito de matriz e a utilização do livro texto. Além disso, deveria ser indicado o(s) nome(s) do(s) livro(s). Os resultados apontaram que matriz é um arranjo de números em linhas e colunas, e esta é, de fato, a definição mais comum apresentada nos livros. Apenas cinco sujeitos responderam tratar-se de uma função que vai do produto cartesiano de dois intervalos naturais I_m x I_n em um corpo K (definição formal de matriz). Do total de sujeitos, 16,2% responderam erroneamente e 53,0% deixaram a questão em branco sendo que destes 215 estão nos primeiros quatro semestres do curso. Foi verificado que eram usados sete livros sendo a maioria para estudantes a partir do quinto semestre e que os livros texto influenciavam a aquisição do conceito de matriz. A maior parte dos mesmos apresentavam a interpretação natural, contribuindo assim para a continuação desse tipo de apresentação do conceito. Contudo, se o livro texto era usado apenas como fonte de exercícios, não poderia modificar, de forma essencial, os conceitos que os alunos já possuíam. O autor chegou às seguintes conclusões: **a.** o conceito formal de matriz não é retido pelos alunos, quando a eles é dada a interpretação natural de matriz; **b.** a interpretação natural de matriz é o conceito retido pelos alunos que estudaram Álgebra Linear; **c.** embora o conceito de matriz faça parte do programa de Matemática do segundo ano de ciências, do ciclo diversificado, ele não é retido; **d.** o professor deve realizar um esforço adicional se deseja que os alunos assimilem o conceito formal de matriz, já que os livros texto, em sua maioria, apresentam a interpretação natural e, para efeitos do processo de ensino, é importante ir além da interpretação natural do conceito de matriz, em razão da importância do conceito de função.

Os resultados obtidos por González (1998) parecem ser semelhantes ao que ocorre em algumas escolas brasileiras, onde alguns dos livros didáticos utilizados, tanto no ensino médio como no superior, apresentam uma interpretação natural de matriz ao invés do conceito formal.

O exposto acima é uma das razões pela qual se optou pela abordagem natural do conceito de matriz, pois como mostrou a pesquisa de González, esse é o conceito retido pelos universitários que, em sua maioria, já possuem um conhecimento de Matemática muito maior, além de uma maior capacidade de abstração quando comparados aos estudantes do nível médio. Deduz-se, então, que se o conceito formal não foi retido pelos universitários o mesmo poderia ocorrer com os sujeitos deste estudo.

Glaister (1992) observou que os professores têm gasto cada vez mais tempo, buscando maneiras de apresentar as idéias matemáticas usando exemplos práticos e, mais importante, como mostrar conceitos tão abstratos através do uso de exemplos simples e imediatamente aplicáveis. Ele também discutiu os conceitos de grau, sistemas indeterminados e consistência em Álgebra Linear, especificamente na teoria de matrizes, no contexto de um quebra-cabeça famoso, o quebra-cabeça 2x2, onde dados quatro números a,b,c e d, é possível encontrar os números p,q,r e s e preencher a tabela de adição (1).

$$(1) \qquad \begin{array}{c|cc} + & r & s \\ \hline p & a & c \\ q & b & d \end{array}$$

Esse tipo de quebra-cabeça que utiliza a álgebra das matrizes pode ser investigado em níveis diferentes, tendo como sujeitos estudantes de todas as idades. Além disso, esse tipo de investigação ilustra, de um modo prático e verificável, idéias bastante abstratas, como particularmente os conceitos de grau, de sistemas indeterminados, infinidade de soluções bem como o método de eliminação de Gauss. A experiência mostrou que, quando se classifica sistemas lineares quanto ao número de soluções, através da Regra de Cramer, os alunos encontram dificuldade para compreender e abstrair que um sistema indeterminado admite infinitas soluções. Esse tipo de quebra-cabeça torna a discussão do número de soluções de um sistema algo mais concreto e claro.

Leder (1991) realizou um estudo com vinte e um professores universitários experientes e competentes, mas que não ensinavam Matemática e dois professores de Matemática do terceiro grau que agiram como instrutores. O estudo consistiu de quatro sessões de ensino, que duraram mais que duas manhãs e tiveram como objetivo melhorar a compreensão das dificuldades experimentadas ao se aprender Matemática, bem como identificar as estratégias pedagógicas que estariam exacerbando ou minimizando essas dificuldades. Os instrutores foram encorajados a apresentar a matéria escolhida (Teorema de Pitágoras e Matrizes) de forma clara, lógica e compreensível. Os sujeitos deviam prestar atenção a mesma, tomando notas, discutindo e fazendo perguntas sempre que algo não estivesse claro. Além disso, eram solicitados a anotar suas reflexões e as conclusões de sua experiência pedagógica. Também foram solicitados a responder as questões: "O que torna este assunto difícil para mim? O que eu ou meu instrutor podemos fazer para que este assunto se torne claro?". Os sujeitos foram solicitados a fazer anotações nos cadernos e estas incluíam comentários sobre a ansiedade associada a solução das questões matemáticas, sobre a natureza e a estrutura da experiência, reflexões sobre o processo de aprendizagem, sobre a eficácia das várias estratégias pedagógicas, as dificuldades com a terminologia utilizada, a confusão criada pelo uso de exemplos e ilustrações, a dificuldade encontrada em relação ao tempo versus quantidade de matéria desenvolvida e, também, a respeito da falta de oportunidade de falar sobre os conceitos novos. A análise das anotações mostrou que, embora os sujeitos do estudo fossem professores universitários, apresentaram grande dificuldade para compreender o produto de matrizes e a sua não comutatividade.

Nesse estudo de Leder (1991), os sujeitos foram encorajados a pensar em voz alta, a fazer anotações e a participar com questionamentos que pudessem dar significado ao conteúdo estudado. Isso foi feito com a finalidade de propiciar uma aprendizagem mais significativa. Porém nas salas de aulas regulares, quantos alunos responderiam ao questionamento do professor sobre as dificuldades experimentadas? Quantos alunos teriam condições de identificá-las e descrevê-las? Qual seria a natureza das respostas dadas pelos professores aos estudantes? Os dados das entrevistas, os comentários dos estudantes, bem como a experiência de compartilhar em classe levaram à conclusão de que os professores poderiam ter maior empenho na utilização efetiva dos significados buscando também oferecer desafios apropriados aos estudantes. Contudo, para responderem às necessidades individuais de seus alunos, os professores necessitam de um bom conhecimento dos conceitos e das idéias matemáticas.

Muitas vezes, quando se propõe situações compartilhadas nas salas de aulas regulares, pode não acontecer o envolvimento dos alunos. Assim, faz-se necessário buscar outras formas que permitam investigar os significados construídos pelos alunos a respeito dos conceitos matemáticos que estão sendo ensinados. Por esta razão, buscou-se, no presente estudo, levantar os conhecimentos prévios relativos aos conceitos envolvidos e oferecer desafios que pudessem levar a uma ampliação destes conceitos pelos estudantes.

Glidden (1990) desenvolveu atividades para obtenção de gráficos finitos, usando matrizes. A atividade que propôs é um exemplo da maneira como é possível introduzir informalmente matrizes, usando gráficos finitos e também a possibilidade de analisar os gráficos finitos, examinando as representações de matrizes correspondentes a eles. Em razão dessa introdução às matrizes ser feita apoiada em problemas contextualizados e requerendo apenas conhecimentos superficiais de computação, faz com que as mesmas se tornem acessíveis para a maioria dos estudantes do nível secundário. O referido autor usou, para desenvolver o trabalho, folhas de atividades e um jogo de transparência para discussão. As atividades propostas tinham como objetivo capacitar os estudantes a escrever, a interpretar e a representar a matriz de um gráfico finito; esboçar o gráfico finito representado por uma matriz;

descobrir algumas propriedades elementares das matrizes e explorar a adição de matrizes. O pré-requisito exigido era que os estudantes deveriam estar familiarizados com gráficos finitos. Foram propostas atividades em grupos com a utilização da Matemática para se modelar problemas do mundo real e a compreensão das conexões matemáticas. Tais procedimentos transformam o estudante em um solucionador de problemas matemáticos, capacitado a argumentar matematicamente. A isto é adicionada a economia de expressão que as matrizes proporcionam (já que um gráfico finito por maior que seja pode ser representado por uma única matriz); a sua aplicação, na solução de problemas do mundo real, ilustra a utilidade desse conteúdo matemático.

As atividades desenvolvidas por Glidden (1990) (Anexo 1) são de grande importância, pois, ao se escrever as matrizes a partir dos gráficos finitos e vice-versa e ao solucionar problemas contextualizados, aumenta a probabilidade do aluno atribuir significados ao conteúdo, possibilitando assim uma maior compreensão do conceito de matriz.

Alexander (1985) sugeriu a utilização de técnicas de aplicação de matrizes para a Matemática no nível secundário (Anexo 2). O autor afirmou que no ensino desse tema deveria ser usada a aplicação de matrizes para determinar a equação de uma reta que passa por dois pontos ou de uma parábola que passe por três pontos não colineares. Esse método, que se baseia em matrizes e suas inversas, permite determinar funções lineares, quadráticas e de grau superior a dois.

A utilização de matrizes como ferramenta para a solução de função linear, quadrática e de grau superior a dois permite que se estabeleçam conexões importantes entre os diversos conteúdos matemáticos que, normalmente, são apresentados em sua forma final, pronta e acabada, possibilitando também um avanço na aprendizagem do conceito.

Análise dos livros didáticos

A pesquisa de Gonzáles (1998), citada anteriormente, concluiu que os livros didáticos influenciavam na aquisição do conceito de matriz e que ao ser usado apenas como fonte de exercícios, não poderiam modificar, de forma essencial, os conceitos que os alunos já possuíam. Por essa razão optou-se pela análise de alguns livros didáticos.

Para atender as finalidades do presente estudo realizou-se um levantamento em 10 escolas da rede pública das cidades de São Bernardo do Campo e Santo André, nas quais foi constatado que a maioria dos professores de Matemática do ensino médio não adotavam livro didático. Isso não implica que os professores não sofram a influência dos mesmos na sua prática pedagógica. Ao contrário, a maioria utiliza mais de um livro didático para elaboração de suas aulas e de suas apostilas.

Já os professores das escolas particulares, seja no ensino médio propedêutico ou profissionalizante, adotavam livro didático e/ou paradidáticos. Também faziam uso de apostilas que, na maioria das vezes, haviam sido produzidas com o auxílio desses livros. Aparentemente, os livros didáticos influem de várias maneiras no trabalho do professor.

A análise do conceito de matriz como aparece em alguns livros didáticos, selecionados dentre aqueles mais freqüentemente usados, permite perceber como os professores se apropriam desse conceito e apresentam-no aos alunos. A análise considerou: **a.** a história e a epistemologia do conceito; **b.** organização, linguagem, notação e abordagem do conceito de matrizes; **c.** obstáculos epistemológicos e didáticos. **d.** problemas do tipo aberto ou fechado que possibilitem o desenvolvimento lógico, a recontextualização e a repersonalização por parte dos alunos. Utiliza-se, neste estudo a definição dada por Almouloud A. S (1997) no que se refere a abertura do problema (resposta sugerida ou não, método de solução sugerido ou não) e **e.** verificação da dialética ferramenta-objeto, utilizando-se para isso a definição dada por Douady R. (1993), ou seja, um conceito tem o estatuto de ferramenta quando ele intervém na solução de um problema e tem o estatuto de objeto quando é o objeto da aprendizagem.

A escolha dos livros para análise não foi aleatória. Além de serem escolhidos os mais usados pelos professores das escolas pesquisadas, foram considerados também editoras diferentes, autores conceituados, livros reeditados e os de primeira edição e as abordagens diferenciadas. De acordo com esse critério, foram selecionados seis livros (Anexo 3) e foi verificado como é apresentado o conceito em questão.

O conceito de matriz no livro a.

O livro Novo Bezerra Matemática, 2º grau, volume único de Bezerra e Jota (1994) da editora Scipione é apresentado em um volume único que contém todo o conteúdo das três séries do ensino médio. Há a introdução do conceito de matriz sem nenhuma menção histórica, fornecendo de imediato a definição, que é a seguinte: *Sejam m e n dois números naturais não nulos. Chama-se matriz do tipo m x n (lê-se m por n) qualquer tabela de m . n números dispostos em m linhas e n colunas.*

São utilizados exemplos puramente algébricos, sem nenhuma aplicação prática, seguidos de exercícios de fixação do tipo fechado. Nos exercícios, prevalece a linguagem matemática. Os problemas propostos como desafio seguem o mesmo esquema, não se verificando, mudança de quadro. A utilização dos conjuntos inteiros nos exercícios, quase como via de regra, pode levar ao surgimento de obstáculos didáticos, ou seja, os alunos poderão vir a ter dificuldades para solucionar problemas que envolvam outros conjuntos como o dos racionais, irracionais, reais, complexos e também exercícios que envolvam outros conceitos como as razões trigonométricas, logarítmos, gráficos finitos, etc

A organização dos conteúdos é fechada e em sua forma final. Os conceitos são apresentados formalizados e, em nenhum momento, aparecem como ferramenta nos exercícios ou problemas. Além disso, não há qualquer referência ao conceito de matriz como uma álgebra não comutativa.

Os exemplos dados abaixo, apresentados no livro a, (pp. 234-235) podem esclarecer melhor a maneira como o exercício é tratado:

09. Dada as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5 7

Calcule:

a) 2A *b)-7B* *c) ½ (A + B')* *d) 5A' -3 (A'+ 2B)*

11. Efetue os seguintes produtos de matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

O conceito de matriz no livro b.

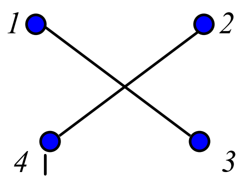
Na análise do livro Matemática e Vida, 2º grau, volume 2 de Bongiovanni e Laureano (1993) da editora Ática, verificou-se que a maior parte dos conteúdos estão dispostos em "espiral", apresentando tópicos de história na introdução de cada um dos temas. Há muitas ilustrações pertinentes aos assuntos abordados.

Nos diversos problemas abordados, houve mudança do quadro algébrico para o geométrico e vice-versa. O conceito de matriz não é apresentado apenas como um conteúdo formalizado, mas também como uma ferramenta. Os autores deste livro trabalharam os conteúdos de matrizes, determinantes e sistemas lineares de maneira interligada, sem apresentá-los compartimentalizados .

Nos exercícios propostos, os autores introduzem os conceitos de geometria analítica e apresentam o conceito de matriz como ferramenta útil para a resolução dos exercícios. Nos problemas de desafio, nota-se preocupação com o desenvolvimento do raciocínio lógico, da espacialidade e da criatividade. De acordo com os critérios de análise, pode-se inferir que neste livro os conteúdos são tratados de maneira a minimizar os possíveis obstáculos didáticos.

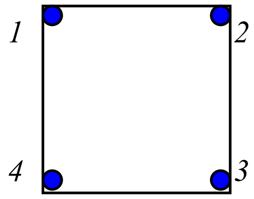
Exemplos de exercícios, apresentados no livro b, (pp.248,249,250 e 260) são dados a seguir:

02.



Associar a essa figura uma matriz 4x4, usando a_{ij} = 1 se os pontos i e j estiverem ligados, caso contrário, usar a_{ij}=0

443. O quadrado desenhado abaixo tem lados medindo 4, em alguma unidade de comprimento.



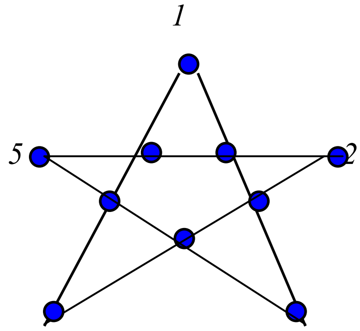
Construa a matriz 4x4, sendo a_{ij} igual à distância entre os pontos i e j.

448. Em geometria analítica (geometria das coordenadas) prova-se que a área do triângulo de vértices A(xa, ya), B (xb, yb) e C (xc, yc) é igual à metade do módulo do determinante abaixo.

$$\begin{vmatrix} xa & ya & 1 \\ xb & yb & 1 \\ xc & yc & 1 \end{vmatrix}$$

Considere um referencial cartesiano, no qual as unidades dos eixos são iguais a 1 cm e que contém os pontos A (2, 1), B(3, 4) e C (5, 6). Usando o conceito anterior, calcule a área do triângulo ABC e desenhe-o num referencial cartesiano.

451. Observe a figura abaixo:



4 *3*

Associe a essa figura uma matriz 5x5, considere a_{ij} = 2 se os pontos i e j estiverem ligados, caso contrário, utilize a_{ij}=1.

477. Divida o número 330 em 4 partes, tais que : a 1ª está para a segunda, assim como 2 está para 5; a 2ª está para a 3ª assim como 3 está para 4; e que a 3ª está para a 4ª, assim como 4 está para 5.

O conceito de matriz no livro c.

No livro Matemática para o 2º grau, volume 2 do Gentil (1996) da editora Ática, é apresentado o histórico de matrizes na introdução do capítulo. Em seguida, é dada a definição formal do conceito: *matrizes são tabelas com m linhas e n colunas, são denominadas matrizes m x n (sendo m e n números naturais diferentes de zero).*

Nos exercícios, o autor não se restringiu ao conjunto dos números inteiros na formação das matrizes, tendo utilizado, como elementos, o conjunto dos números reais, as razões trigonométricas (sen x, cos x e tg x) e os logaritmos. Verifica-se a predominância da linguagem matemática e a inexistência de situações-problema para a introdução dos conteúdos, assim como a inexistência da mudança do quadro algébrico para o geométrico e vice-versa.

Os exemplos, a seguir, ilustram os exercícios que são apresentados no livro c. (pp.152,153,157 e 168)

1- Determine as matrizes associadas aos coeficientes das incógnitas dos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x+2y = 5 \\ 2x+3y = 8 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 3x+2y = -1 \\ y - 3z = 5 \end{cases}$

5- Determinar x e y na igualdade:

$$\begin{pmatrix} \log_3 x \\ y^2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

30- Calcule o produto das seguintes matrizes, se existirem:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

O conceito de matriz no livro d.

O livro Matemática 2, 2º grau, volume 2 de Giovanni e Bonjorno (1992) da editora FTD foi o quarto livro analisado e possivelmente um dos mais utilizados pelos professores, tanto do ensino público quanto do particular. Introduz os conceitos de matrizes através de exemplos práticos, explicita a importância das matrizes para os vários ramos da ciência e da engenharia, trata de sua utilização na estatística, na economia, na física atômica, mas não faz qualquer referência ao surgimento e evolução histórica do conceito.

Coloca, após ressaltar a importância das matrizes, a definição: *Uma matriz do tipo m x n (lê-se: m x n), com m, n ≥ 1, é uma tabela formada por m.n elementos dispostos em m linhas e n colunas*

Embora os exemplos dados para introdução dos conceitos sejam práticos os exercícios não seguiram a mesma linha, pois são puramente algébricos. A quantidade de exercícios propostos é grande e caracteriza a intenção de treino, não se observando mudança de quadro algébrico para o geométrico e vice-versa. Há predominância da linguagem matemática e não se verificou a utilização de situações-problema; também não aparecem exercícios desafiadores.

Os exemplos a seguir, extraídos das páginas 175, e 177, ilustram o exposto:

1- *Dadas as matrizes:* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$

-3 4 2 5 6 1

Calcular: a) A + B

b) $A - B^t - C$

6 - *Resolva o sistema* $\begin{cases} X + Y = A + B \\ X - Y = 2A - B \end{cases}$ *Sendo* $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

O conceito de matriz no livro e.

O livro Matemática 2º grau, 8.ed.ver. de Iezzi e outros (1992) da Atual editora apresenta, no final do capítulo sobre matrizes, apenas uma breve citação histórica. A organização do conteúdo parece compartimentada, apresentando "layout" desprovido de ilustrações. O conceito de matriz é definido como na maioria dos livros didáticos, da seguinte maneira: *Uma matriz m x n é uma tabela de elementos dispostos em m linhas e n colunas.*

Os conceitos de matrizes não são introduzidos através de situações-problema, mas sim com exemplos que enfatizam a representação algébrica e a linguagem matemática. Os exercícios, em sua grande maioria, são meras repetições dos exemplos dados (exercícios de treino). Não há mudança de quadro nem estímulo ao raciocínio lógico, nem a criatividade.

É enfatizada apenas a utilidade das matrizes apontando-as como ferramentas na solução de sistemas lineares. Não são usados como ferramenta em nenhum outro tipo de problema, seja de geometria analítica, análise combinatória, vetores ou eletricidade. Dessa maneira, não se pode apontar a dialética ferramenta-objeto.

Os dois exemplos a seguir (pp.88, 105) ilustram a maneira como os exercícios são apresentados neste livro.

Dadas as matrizes (p.88)

$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$

Calcule:

a) A + B *b) B + C* *c) A - C* *d) C - B*

(p.105) Sendo $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Calcule a matriz AB - BA.

O conceito de matriz no livro f.

O livro Matemática 2º grau, volume 2 de Souza e Spinelli (1996) da editora Scipione é rico em ilustrações e os conteúdos estão organizados de maneira clara e objetiva trazendo, no final, de cada assunto, um resumo, sendo feitas ainda sugestões para os professores desenvolverem o tema.

No capítulo referente às matrizes e determinantes, alguns conceitos são introduzidos através de problemas contextualizados. Matriz é definida *como um conjunto ordenado de elementos dispostos em linhas e colunas. Você poderá usar colchetes [ ] ou parênteses ( ) para sua notação. Genericamente, uma matriz de ordem m x n pode ser escrita:* $A=(a_{ij})_{mxn}$ *com* $1\leq i\leq m$ *e* $1\leq j\leq n$.

O texto não apresenta qualquer referência histórica sobre os conceitos introduzidos. Nos exercícios propostos, não há predominância da linguagem matemática, como nos outros livros. Ao contrário, há preocupação em questionar o aluno com relação a construção dos conceitos. Verifica-se a mudança do quadro algébrico para o geométrico e vice-versa, bem como a utilização de razões trigonométricas, potências e logaritmos na formação das matrizes.

De todos os livros analisados, esse é o único que apresenta questões sobre a validação ou não, no caso do produto de matrizes, das mesmas propriedades dos números reais. Isso mostra a intenção de eliminar o obstáculo que o conjunto dos números reais apresenta para a álgebra das matrizes, no que se refere à propriedade comutativa da multiplicação.

Nos exercícios propostos, os autores sugerem aos alunos que inventem exercícios, demonstrem propriedades e justifiquem suas respostas, confrontado-as com as dos colegas. Isso evidencia a busca de apoio nas principais teorias da psicologia, que subsidiam o ensino da Matemática.

Os exercícios apresentados a seguir (pp.147, 153 e 167) explicitam a maneira como são apresentados no livro f:

R_1. Considere a matriz B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Responda:

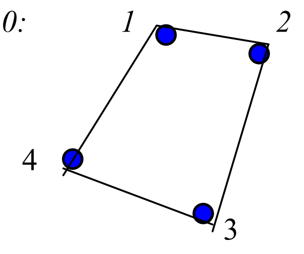
a) Qual é a ordem de B?

b) Qual é o elemento b_{32}?

c) Qual é o elemento b_{23}?

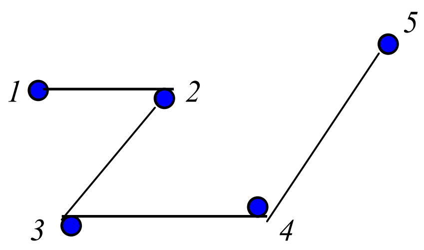
d) Quais são os elementos da 2ª linha?

20. Observe a figura cujos vértices estão numerados. A ela podemos associar a matriz $A= (a_{ij})$ 4x4 onde $a_{ij}=1$, se os vértices estiverem unidos por segmentos ou, ainda, se $i = j$; caso contrário, temos que $a_{ij} = 0$:



Portanto, a matriz A é $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Pelo mesmo código da matriz A, determine a matriz $B = (b_{ij})_{5x5}$ *associada à figura abaixo:*

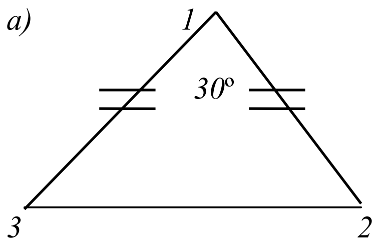


22- Proponha a um colega a construção de uma matriz D, codificando uma nova ligação para os pontos do exercício anterior, confira se ele acertou.

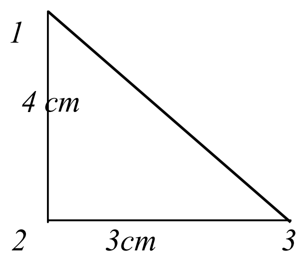
25 Considere os triângulos abaixo e escreva a matriz $B=(b_{ij})_{3x3}$ *onde* b_{ij} *é a distância entre os vértices i e j.*

Obs.: Use a lei dos cosenos para ajudar no cálculo das distâncias.

a)



b)



8- Invente duas matrizes quadradas A e B, onde A.B seja possível, e em seguida:

a) determine A.B

b) determine B.A

c) verifique se A.B = B.A

59- Compare os resultados que você obteve nos exercícios anteriores com os obtidos pelos seus colegas e responda:

Se A e B são matrizes, é válido de modo geral, que A.B = B.A ?

CAPÍTULO IV

ALGUNS SUBSÍDIOS TEÓRICOS PARA A PRÁTICA PEDAGÓGICA

O presente trabalho buscou contribuições das diferentes teorias da Psicologia (tanto do desenvolvimento como da aprendizagem) que têm servido como suporte para um efetivo planejamento de ensino. Ao planejar o ensino de um conteúdo, o professor usa, deliberadamente ou não, essas contribuições.

É importante destacar que não existe um único modelo teórico que esgote todas as possibilidades de ensino-aprendizagem e diferentes conteúdos podem ser ensinados de diferentes maneiras, dependendo de uma série de fatores que não serão tratados aqui. Serão apresentados alguns aspectos das principais teorias que têm subsidiado muitos dos trabalhos em educação matemática. Assim, o capítulo apresenta algumas das principais idéias que influem na prática pedagógica atual e são as mais comuns na área de educação matemática: o construtivismo de Jean Piaget que, embora não faça parte da fundamentação teórica deste estudo, teve amplas repercussões sobre as teorias e as práticas educativas; a noção de conceitos espontâneos e científicos de L. V. Vygotsky; a aprendizagem significativa de D. P. Ausubel e os campos conceituais de G. Vergnaud. Além disso, o capítulo também apresentará outros temas teóricos freqüentes na prática escolar: a definição de aprendizagem e a diferença entre aprendizagem e desempenho; a formação e o desenvolvimento de conceitos e a solução de problemas, finalizando com o uso de problemas que aumentam a probabilidade de ocorrência da aprendizagem significativa.

Muitas dessas teorias possuem aspectos comuns e não podem ser vistas dissociadas. Como o estudo aqui apresentado trata do uso e da eficácia de dois métodos diferenciados de ensino, considerando o desempenho em dois testes elaborados para atender aos objetivos, a parte final desse capítulo tratará do conceito de aprendizagem (em especial da aprendizagem significativa) e do desempenho na solução de problemas.

A teoria genética e a aprendizagem escolar

Embora Piaget nunca tenha desenvolvido estudos específicos sobre a aprendizagem, particularmente, a aprendizagem escolar, é indiscutível a influência de seus trabalhos sobre as concepções do desenvolvimento que vai até o início da adolescência. A maior influência recai no planejamento do ensino na escola elementar.

No presente trabalho, que se centra na formação do conceito de matriz e na solução de problemas que envolvem este conceito, foram investigadas algumas interpretações dadas por Piaget e seus seguidores a respeito do desenvolvimento cognitivo, tentando relacioná-las com a prática em sala de aula.

O conhecimento científico foi um dos temas pesquisados por Jean Piaget e a construção do pensamento racional é um tema importante em seus escritos. Usando o método clínico, Piaget analisou as operações do pensamento. Os resultados encontrados por ele e vários de seus seguidores são essenciais para a compreensão da construção do conhecimento científico. Um pressuposto básico da teoria de Piaget é que a inteligência é construída através de interações. Coll (1992, p. 172) apontou que

> (...) *a análise sistemática da gênese das noções básicas do pensamento racional - espaço, tempo, casualidade, movimento, acaso, lógica das classes, lógica das relações etc. - assim como a descrição das características do pensamento concreto e formal e das estruturas lógico-matemáticas que o caracterizam, faz surgir grandes esperanças sobre a possível utilização desses conhecimentos no campo educacional e, concretamente, na aprendizagem escolar.*

A teoria do desenvolvimento, elaborada por Piaget, faz parte das teorias cognitivas e considera o pensamento como um fator de mediação entre o ambiente e o organismo, mostrando também que a estrutura cognitiva não é imutável e se desenvolve através da interação do indivíduo com o meio, ou seja, o desenvolvimento cognitivo depende das experiências do indivíduo com o meio ambiente. (Pozo, 1998a)

Segundo Pulaski (1980, pp. 201 e 202), Piaget considerava impreterível que os educadores se voltassem para a pesquisa experimental a fim de responderem a questões básicas sobre a educação, tais como: **a.** qual é o objetivo do ensino? **b.** o que devemos ensinar? **c.** como devemos ensinar?

Espera-se que o objetivo comum a todas as situações de ensino seja a aprendizagem, sendo que a ênfase da educação deve ser dada nos processos e não no desempenho final.

A aprendizagem não deve ser vista apenas sob o aspecto quantitativo, ou seja, acúmulo de informações memorizadas, mas sob o aspecto qualitativo, considerando-se as condições endógenas para aprender, de acordo com os estágios de desenvolvimento e também sem esquecer a qualidade das interações com o ambiente de ensino.

A aprendizagem é acionada graças às estruturas lógicas, quando da interação entre o sujeito e o objeto do conhecimento. Para Piaget (1970), aprendizagem é uma entre outras formas de aquisição de conhecimento, aquela que se obtém através da experiência, experiência essa que, para ele, pode ser empírica ou lógico-matemática.

O processo de aquisição de conhecimento, segundo a teoria psicogenética, é explicado pelo mecanismo de assimilação e acomodação, isto é, quando uma nova situação é apresentada ao sujeito, ele busca nas suas experiências passadas aquelas que se relacionam com a nova situação para entendê-la e interpretá-la. Nesse processo, o novo é relacionado e adaptado ao que ele tinha, algumas informações novas são acrescentadas, acarretando um conhecimento mais amplo em relação àquele contexto.

Para Piaget (1970), o progresso das estruturas cognitivas baseia-se em uma tendência de equilíbrio crescente entre assimilação e acomodação. Segundo ele, haverá desequilíbrio entre assimilação e acomodação, quando os esquemas que o sujeito possui não estiverem em equilíbrio com os esquemas que assimila, quando não houver equilíbrio entre os diversos esquemas do sujeito entre aqueles que assimila e acomoda e quando não houver integração hierárquica de esquemas previamente diferenciados, como por exemplo, ao adquirir o conceito de número complexo, o sujeito deve relacioná-lo aos conceitos que já possui, tais como os números reais, potenciação, diagrama cartesiano, seno, cosseno, etc, de forma que esse conceito se integre a nova estrutura de conceitos.

Nos estados de desequilíbrio Piaget (1975), observou dois tipos de respostas: não adaptativas e adaptativas. Na primeira, o sujeito não considera a situação como conflitiva, isto é, não considera a existência do conflito e, por conseguinte, não irá modificar seus esquemas, logo não haverá acomodação, nem tampouco aprendizagem. Já nas respostas adaptativas, o sujeito tem consciência do conflito e tenta resolvê-lo, acomodando seus esquemas o que o levará, embora nem sempre, a uma reestruturação dos conhecimentos. As respostas adaptativas podem ser de três tipos: quando a perturbação não altera o sistema de conhecimentos, por ser leve demais (exemplo: o sujeito que conhece o conjunto dos números naturais e se vê diante dos números pares e ímpares) ou forte demais o que o levará a ignorá-la (exemplo: o sujeito que só conhecendo os números naturais se vê diante dos números complexos); quando a perturbação é integrada como um item a mais no sistema de conhecimentos (exemplo: conhecendo o conjuntos dos números naturais, o sujeito se vê diante do conjuntos dos números inteiros e considera este como um conjunto a mais) e quando a perturbação passa a integrar o sistema de conhecimentos do sujeito como um todo (exemplo: quando o sujeito conhece o conjunto dos números naturais e, ao ter conhecimento do conjunto dos números inteiros, passa a considerar o primeiro como subconjunto do segundo).

De acordo com a teoria piagetiana, a aprendizagem, seja ela proveniente do ensino escolar ou não, é um ato de reconstrução daquilo que é adquirido por parte do sujeito. A verdadeira aprendizagem se integra as estruturas mentais do sujeito e não o deixa passivo, mas o capacita a atuar diante da realidade que o envolve.

Para Piaget (1970), a aprendizagem de conhecimentos específicos está diretamente ligada ao desenvolvimento de estruturas cognitivas. Portanto, deve-se esperar que a educação proporcione e favoreça esse desenvolvimento. Assim sendo, o ensino dos sujeitos, nos primeiros anos de escolarização, deve progredir até o pensamento operatório concreto; enquanto que, no ensino fundamental, deve atingir o nível do pensamento formal.

A aprendizagem escolar, vinculada aos processos de desenvolvimento e mais especificamente ao desenvolvimento operatório, tem sido alvo de severas críticas. A esse respeito, Coll (1992, pp.178 e 179) argumentou que:

> *A maneira correta de colocar a relação entre a aprendizagem escolar e o desenvolvimento operatório é, em nossa opinião, a seguinte: como realizar a aprendizagem de conteúdos específicos que resultam de uma decisão de ordem social, de maneira a não interferir negativamente no processo de desenvolvimento operatório do aluno e, se possível, favorecer este desenvolvimento? Em outros termos, o fato de uma aprendizagem escolar não ter aparentemente repercussões diretas no progresso operatório não significa que deva ser eliminada.*

De acordo com a teoria de Piaget, os conteúdos têm valor relativo, sendo enfatizados os instrumentos cognitivos, o amadurecimento da personalidade e as competências intelectuais.

Na apresentação dos novos conteúdos, o professor deve considerar aspectos como a capacidade operatória dos sujeitos (que será diferente conforme o estágio de desenvolvimento). Por exemplo, um sujeito que se encontra no nível pré-operatório poderá não compreender os aspectos abstratos dos números naturais, no estágio das operações concretas, ele poderá ter dificuldades para fazer operações no conjunto dos números inteiros e somente ter uma compreensão plena no período das operações formais.

Segundo Flavell (1975, p.371), são três as maneiras pelas quais a teoria de Piaget pode ser aplicada aos problemas educacionais. A primeira refere-se a utilização na avaliação do desenvolvimento intelectual geral da criança, ou seja, diz respeito à avaliação diagnóstica do aluno em relação ao programa escolar. A segunda refere-se ao planejamento de currículos, tendo como base os resultados encontrados por Piaget, isto é, a estruturação do conteúdo curricular precisa considerar os períodos de desenvolvimento. Já a terceira diz respeito ao método através do qual as crianças são ensinadas.

Da primeira aplicação, decorre o estabelecimento da série escolar que o aluno pode freqüentar, a determinação de programas de recuperação, dentre outras. A segunda refere-se à necessidade de adequação dos programas, considerando as etapas de desenvolvimento do aluno, lembrando que a construção de um conceito pelo aluno pode incorrer em erros por parte do mesmo, assim sendo, faz-se necessária a interferência do professor no sentido de evitar interpretações errôneas. Finalmente, da terceira, verifica-se a necessidade de engajar o aluno em atividades concretas que estejam relacionadas ao conteúdo a ser aprendido. Deve-se levar em conta, também, a importância das atividades em grupo na relação alunos e processo de aprendizagem.

Bee & Michelle (1986) apontaram que compete ao professor selecionar o material, e os experimentos que serão realizados nas aulas, estimulando as explorações adequadas ao nível do desenvolvimento cognitivo do aluno.

Os professores devem conhecer os conteúdos, adequando-os às capacidades dos alunos, ou seja, não devem ser inacessíveis, pois se não houverem estruturas apropriadas que possibilitem o processo de equilibração, não irão ocorrer interações. Da mesma maneira, se os conteúdos estiverem aquém de sua capacitação, se já estiverem incorporados às estruturas dos mesmos, também não irão ocorrer interações.

Neste contexto, cabe ao professor dirigir o processo de desequilibração e equilibração de maneira a favorecer que cada aluno construa seu próprio momento de equilíbrio. O professor deve apresentar situações-problema, nas quais os elementos apresentados permitam ao aluno utilizar os mecanismos cognitivos que possui, bem como, provocar situações de conflitos que possibilitem um avanço cognitivo do sujeito.

Tendo em vista que a aprendizagem se realiza na interação do aluno com o meio, é desejável que as propostas de ensino respeitem a seqüência dos estágios propostos por Piaget. Embora a seqüência seja imutável, cada aluno tem seu próprio ritmo de construção desses estágios, muitos atrasos e progressos ocorrem. As situações de ensino devem se adequar ao desenvolvimento cognitivo dos alunos, não devem ir além nem estar aquém da capacidade destes. É possível que, através de um ensino planejado, o professor consiga que o aluno faça construções operatórias.

Como a aprendizagem depende das experiências do sujeito, a ênfase do processo educativo deve ser dada na construção dessa aprendizagem e não apenas no desempenho final. Além desses aspectos, os conflitos desempenham um papel positivo na aprendizagem, sendo a experiência única e distinta para cada aluno, ocorrendo em constante interação. Segundo Coll e outros (1996, p. 119) *o aluno constrói o conhecimento por meio de ações efetivas ou mentais que realiza sobre o conteúdo de aprendizagem.*

Os estudos a respeito da aprendizagem e do desenvolvimento humano em conjunto com a medida das diferenças individuais irão proporcionar a chave para a descoberta dos métodos de ensino mais adequados e eficazes.

Para que se possa adequar os conteúdos escolares aos níveis de formação dos conceitos, é preciso conhecer o caminho que o aluno percorre ao construir os conhecimentos específicos. É necessário também conhecer os procedimentos usados na solução de problemas que envolvam esses conteúdos, pois só assim o professor pode intervir de forma eficaz no processo de ensino-aprendizagem.

Algumas das contribuições de Vygotsky para o ensino-aprendizagem

A concepção de Vygotsky, segundo a qual as funções psíquicas dos indivíduos se formam de acordo com seu uso e dependentes da herança cultural humana é importante para a questão educacional pois pressupõe que o desenvolvimento e a aprendizagem não são processos coincidentes; embora estejam diretamente ligados, não se produzem de maneira simétrica e paralela.

A aprendizagem e o desenvolvimento estão inter-relacionados e começam com o nascimento; a partir desse momento, as crianças vivem uma série de experiências oriundas de seu contato com adultos e crianças mais velhas no ambiente sócio-cultural.

Oliveira (1995, p.58) observaram que *a concepção de que é o aprendizado que possibilita o despertar de processos internos do indivíduo liga o desenvolvimento da pessoa a sua relação com o ambiente sócio-cultural em que vive e a sua situação de organismo que não se desenvolve plenamente sem o suporte de outros indivíduos de sua espécie.*

De acordo com Oliveira e Oliveira (1999, p.117) uma premissa importante da obra de Vygotsky é que *o desenvolvimento psíquico é resultado da ação da sociedade sobre os indivíduos para integrá-los e informá-los sobre as marcas culturais que a constituem.*

A aprendizagem está relacionada ao desenvolvimento e, de acordo com Vygotsky (1988, p. 101) é: *um aspecto necessário e universal do processo de desenvolvimento das funções psicológicas culturalmente organizadas e especificamente humanas.*

A aprendizagem escolar não parte do zero pois a criança possui uma aprendizagem pré-escolar, resultado dos conceitos espontâneos, que são formados através de sua experiência diária, no contato com as pessoas de seu ambiente, no confronto com situações concretas.

Na formação do conceito espontâneo, a motivação é interna e vai do particular para o geral, existe contato direto com o objeto. O desenvolvimento do conceito espontâneo da criança é ascendente e assistemático.

Segundo Vygotsky (1987, p. 79), *ao operar com conceitos espontâneos, a criança não está consciente deles, pois a sua atenção está sempre centrada no objeto ao qual o conceito se refere, nunca no próprio ato do pensamento.*

O desenvolvimento do conceito espontâneo deve atingir um certo nível para que a criança esteja apta a absorver um conceito científico. Os conceitos espontâneos atuam como um "trampolim" para a aquisição de conceitos científicos.

O conceito científico é um conceito não-espontâneo e sua formação depende da interferência de outras pessoas (professores, colegas), sendo que o ensino escolar desempenha um importante papel nessa formação. Na formação do conceito científico o contato com o objeto é mediado por outro conceito.

> *Os conceitos científicos constituem o meio no qual a consciência e o domínio se desenvolvem, sendo mais tarde transferidos a outros conceitos e a outras áreas do pensamento. A consciência reflexiva chega à criança através dos portais dos conhecimentos científicos.* (...) *Nos conceitos científicos que a criança adquire na escola, a relação com um objeto é mediada desde o início por algum outro conceito.* (...) *Um conceito superordenado implica a existência de uma série de conceitos subordinativos e pressupõe também uma hierarquia de conceitos em diferentes níveis de generalidade.* (...) *Os conceitos verdadeiros são os conceitos científicos, adquiridos através da instrução. (Vygotsky,1987, p. 79).*

Embora os conceitos espontâneos e científicos se desenvolvam em direções opostas, isto é, enquanto os conceitos espontâneos desenvolvem-se de "baixo para cima" através dos conceitos científicos; os conceitos científicos desenvolvem-se de "cima para baixo" através dos conceitos espontâneos, eles se relacionam e se influenciam constantemente, constituindo um processo unitário: o desenvolvimento da formação de conceitos. (Vygotsky, 1987, pp. 93-94)

Já autores como Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 92), apresentam as seguintes idéias a respeito dos conceitos científicos e espontâneos:

> (...) *os conceitos espontâneos aumentam indubitavelmente o poder significativo de correspondentes assimilados e provavelmente desestimulem a aprendizagem por recepção mecânica, podendo também, devido à sua primazia e nitidez, interferir na aprendizagem dos atributos essenciais mais precisos e categóricos.* (...) *Ao ensinar-se conceitos científicos, portanto, é essencial que se leve em consideração a natureza de seus precursores espontâneos, ou seja, explicitamente contrastar os dois grupos de atributos essenciais e indicar a razão da adoção e preferência do grupo mais abstrato e preciso.*

Tratando da formação dos conceitos nas diferentes faixas etárias, Vygotsky (1987, pp. 49 e 50) e seus colaboradores concluíram que:

> *O desenvolvimento dos processos que finalmente resultam na formação de conceitos, começa na fase mais precoce da infância, mas as funções intelectuais que, numa combinação específica, formam a base psicológica do processo de formação de conceitos amadurece, se configura e se desenvolve somente na puberdade. Antes dessa idade, encontramos determinadas formações intelectuais que realizam funções semelhantes àquelas dos verdadeiros conceitos, ainda por surgir. No que diz respeito à composição, estrutura e operação, esses equivalentes funcionais dos conceitos têm, para com os conceitos verdadeiros, uma relação semelhante a do embrião com o organismo plenamente desenvolvido.*

Para explicar as características específicas da inter-relação entre desenvolvimento e aprendizagem no âmbito escolar, Vygotsky (1988, p. 97), baseado em alguns estudos que já havia concluído, iniciou o desenvolvimento de um constructo chamado de área de desenvolvimento proximal – ZDP, definida por ele como: *a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes.*

A zona de desenvolvimento proximal seria a distância entre o nível de desenvolvimento real ,que caracteriza o conhecimento de forma retrospectiva, refere-se à etapas já alcançadas, já conquistadas pela criança, são resultado de processos de desenvolvimento que se completaram e o nível de desenvolvimento potencial que é a capacidade da criança de realizar tarefas com a ajuda de outras pessoas adultas ou companheiros mais capazes. Algumas crianças não conseguem resolver problemas sozinhas, mas conseguem fazê-lo quando auxiliadas por pistas, demonstrações, assistência, ou quando recebem uma orientação no processo.

Segundo Oliveira, (1995, pp. 59-60) é fundamental, na teoria de Vygotsky, a capacidade de algumas crianças realizarem tarefas, terem seu desempenho alterado pela interferência de alguém, pois isto caracteriza um momento do desenvolvimento, já que nem todos os indivíduos são capazes de resolver uma determinada tarefa com a ajuda de outras pessoas.

Os adultos e as crianças mais experientes assumem para Vygotsky um papel de relevância no desenvolvimento dos indivíduos mais novos. O exemplo dado por Oliveira (1995) ilustra bem este fato, pois para uma criança que já sabe amarrar os sapatos o ensino dessa habilidade não terá efeito para ela, da mesma forma não obteremos êxito se quisermos ensinar a um bebê a amarrar os sapatos, pois essa habilidade está muito distante do desenvolvimento de suas funções psicológicas. O ensino de amarrar os sapatos terá êxito com as crianças que ainda não aprenderam bem essa tarefa, mas que já tiverem desencadeado o processo de desenvolvimento dessa habilidade.

A Zona de desenvolvimento proximal é um domínio psicológico em constante transformação, ou seja, aquilo que a criança consegue realizar hoje com a ajuda de alguém, ela passará a realizar sozinha amanhã.

De acordo com a teoria de Vygotsky, o professor deve mediar a aquisição de significados socialmente compartilhados, propondo atividades, através das quais os alunos modifiquem os conhecimentos espontâneos que já possuem. O professor precisa criar situações que produzam modificações na estrutura cognitiva dos estudantes, objetivando provocar avanços que espontaneamente não ocorreriam. O professor precisa considerar que os alunos pertencentes a uma mesma faixa etária e que tenham alcançado o mesmo nível de desenvolvimento real podem atingir níveis diferentes de desenvolvimento potencial. Assim, a mediação do professor, no processo de construção do conhecimento científico (usando demonstrações, dando assistência, fornecendo pistas e instruções), nem sempre resultará em um mesmo nível de desenvolvimento conceitual.

Assim, pode-se dizer que o educador tem um papel ativo no ensino e sua intervenção no desenvolvimento do aluno deve ser deliberada, pois a escola tem como função garantir que os processos de aprendizagem impulsionem o desenvolvimento dos indivíduos.

Contudo, a intervenção que transparece nas leituras dos textos de Vygotsky não deve sugerir uma educação diretiva, pois como afirmou Oliveira (1995, p. 63): *embora Vygotsky enfatize o papel da intervenção no desenvolvimento, seu objetivo é trabalhar com a importância do meio cultural e das relações entre indivíduos na definição de um percurso de desenvolvimento da pessoa humana, e não propor uma pedagogia diretiva, autoritária.*

Vygotsky (1988) apontou que a aprendizagem é um momento essencialmente necessário e universal a fim de que se desenvolva na criança as características não naturais, porém formadas historicamente.

A aprendizagem depende, portanto, do desenvolvimento prévio e anterior. Como também do desenvolvimento proximal dos sujeitos, pois temos que considerar não só as atividades que eles são capazes de realizar de forma autônoma e independente, mas também as atividades que os alunos podem vir a aprender por meio da ajuda de outras pessoas, ou seja, as atividades que aprendem por meio de interações e mediatizações.

É importante que os professores considerem os aspectos dessa teoria, relacionados à passagem dos conceitos espontâneos para científicos e também o conceito de zona de desenvolvimento proximal, pois é um conceito importante que amplia e facilita o desenvolvimento das capacidades cognitivas das crianças.

Sternberg (2000, p. 386) coloca que as idéias de Vygotsky são contribuições significativas à ciência, contudo: *são avaliadas mais por quanto nos estimulam a ampliar nosso conhecimento, do que por quão perfeitamente representaram uma compreensão completa e definitiva da mente humana em desenvolvimento. Talvez, o máximo que possamos exigir de uma teoria é que ela seja digna de investigação posterior.*

É necessário e prioritário, no processo ensino-aprendizagem da Matemática, que o conceito matemático, que se deseja ensinar, seja importante, significativo e desafiador para o aluno, desperte a sua curiosidade e seja passível de aplicação. Através desses aspectos será possível levar o estudante a uma melhor compreensão dos conceitos. Como postulado pelas teorias de aprendizagem, a aquisição dos conhecimentos é individual e é função do grau de desenvolvimento e do nível das estruturas e das competências que regem a ação do sujeito.

A teoria da aprendizagem significativa de Ausubel

A teoria de David P. Ausubel enfatiza, de modo harmonioso, as relações entre o desenvolvimento, a aprendizagem e o ensino, sendo relevante para a compreensão do contexto educativo. Nos anos sessenta e setenta Ausubel desenvolveu uma teoria cognitiva da aprendizagem humana em sala de aula, acentuada por duas características importantes: o caráter cognitivo e o caráter aplicativo.

Ausubel preocupou-se, essencialmente, com a aprendizagem e o ensino que acontecem na sala de aula. Para ele, a aprendizagem significa, organizar e integrar o material na estrutura cognitiva, sendo que o fator isolado que mais influencia a aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe. Segundo Pozo (1998a, p. 209) *Ausubel desenvolveu uma teoria a respeito da interiorização ou assimilação, através da instrução, dos conceitos verdadeiros, que são construídos a partir de conceitos previamente formados ou "descobertos" pela criança em seu meio.*

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) enfatizaram a necessidade de se estabelecer a distinção entre a aprendizagem por recepção e aprendizagem por descoberta, bem como a distinção entre aprendizagem significativa e a aprendizagem mecânica, pois isto permite a compreensão dos tipos principais de aprendizagem (mecânica e significativa, formação de conceitos, solução de problemas verbais e não verbais).

Na aprendizagem por recepção, os conteúdos que deverão ser aprendidos pelos alunos são apresentados em sua forma final e acabada, não envolvendo qualquer descoberta independente por parte dos mesmos. A aprendizagem receptiva pode ser mecânica ou significativa.

Segundo Ausubel e outros (1980, p. 20)

> (...) *no caso da aprendizagem receptiva significativa, a tarefa ou material potencialmente significativo é compreendido ou tornado significativo durante o processo de internalização. No caso da aprendizagem por recepção mecânica, a tarefa de aprendizagem não é potencialmente significativa nem se torna significativa durante o processo.*

Na aprendizagem por descoberta o conteúdo da tarefa não é dado em sua forma final e acabada, mas deve ser descoberto pelo aluno que reorganiza o material, descobre relações, leis e conceitos incorporando-os à sua estrutura cognitiva. A aprendizagem por descoberta só será significativa se o conteúdo descoberto ligar-se de maneira não-arbitrária à estrutura cognitiva.

Segundo Coll e outros (1996) a aprendizagem por descoberta têm importância real no período pré-escolar e durante os primeiros anos de escolaridade, assim como para estabelecer os primeiros conceitos de uma disciplina em qualquer idade.

A aprendizagem significativa é um conceito central da teoria de Ausubel, sendo entendida como um processo através do qual uma nova informação é relacionada a um aspecto já existente na estrutura cognitiva do indivíduo, que seja relevante para o novo material a ser aprendido. Nesse processo a nova informação irá interagir com a estrutura de conhecimentos específicos, definida por Ausubel como conceitos subsunçores ou apenas "subsunçores" pré-existentes na estrutura cognitiva do indivíduo. Os subsunçores vão ficando mais elaborados e mais capazes de ancorar novas informações a medida que a aprendizagem significativa acontece. Já na aprendizagem automática a nova informação tem pouca ou nenhuma interação com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva, ou seja, ela é armazenada de forma arbitrária, não havendo ligação a conceitos subsunçores específicos.

Ausubel e outros (1980, p. 23) apontaram que a aprendizagem significativa,

> *ocorre quando a tarefa de aprendizagem implica relacionar, de forma não arbitrária e substantiva (não literal), uma nova informação a outras com as quais o aluno já esteja familiarizado, e quando o aluno adota uma estratégia correspondente para assim proceder. A aprendizagem mecânica, por sua vez, ocorre se a tarefa consistir de associações puramente arbitrárias, como na associação de pares, quebra-cabeça, labirinto, ou aprendizagem de séries e quando falta ao aluno o conhecimento prévio relevante necessário para tornar a tarefa potencialmente significativa, e também (independentemente do potencial significativo contido na tarefa) se o aluno adota uma estratégia apenas para internalizá-la de uma forma arbitrária, literal.*

A aprendizagem por descoberta, da mesma forma que a aprendizagem receptiva, pode ser mecânica ou significativa dependendo das condições sob as quais a aprendizagem se realiza, ou seja, a aprendizagem por recepção ou por descoberta só será significativa se a nova informação incorporar-se de forma não-arbitrária e não-literal à estrutura cognitiva, caso a nova informação seja relacionada à estrutura cognitiva de uma forma arbitrária, literal, e que não resultem na aquisição de novos significados a aprendizagem receptiva ou por descoberta será automática.

Para que a aprendizagem significativa ocorra são necessárias algumas condições, tais como: **a.** que o material de aprendizagem seja significativo, ou seja, que possa ser relacionado e incorporado à estrutura cognitiva do sujeito de forma não arbitrária e substantiva. Um material que possua estas características é dito potencialmente significativo; **b.** O sujeito deve possuir em sua estrutura cognitiva conceitos e proposições relevantes (subsunçores adequados) para que possam ser relacionadas com os novos conhecimentos; **c.** O sujeito deve manifestar uma predisposição para a aprendizagem significativa, uma atitude positiva, sendo que fatores como atenção e motivação são indispensáveis. Segundo Ausubel e outros (1980, p.133) (...) *a relação específica, substantiva e não literal entre o conteúdo da nova informação e o conhecimento pré-existente depende da experiência anterior e da disposição do aluno no momento da aprendizagem.*

Ausubel e outros (1980) pontuaram que o processo de aprendizagem ou o produto de aprendizagem serão mecânicos e sem significado, se o aluno tiver a intenção de memorizar o material de aprendizagem de forma arbitrária e literal, não importando o quanto este seja logicamente significativo, ou o quanto de uma determinada proposição seja potencialmente significativa; da mesma maneira, se o aluno manifestar disposição para a aprendizagem significativa, mas a tarefa de aprendizagem não for potencialmente significativa, isto é, não puder ser incorporada a estrutura cognitiva do sujeito de forma não arbitrária e substantiva, ocorrerá um processo de incorporação mecânica.

Ausubel e outros (1980, p. 39) distinguiram três tipos básicos de aprendizagem significativa: representacional, de conceitos e proposicional. Dos três tipos de aprendizagem significativa a representacional é a mais básica e que condiciona todas as outras, pois de acordo com o autor (...) *implica em aprender o significado de símbolos particulares (de um modo geral, palavras) ou aprender o que eles representam.*

A aprendizagem proposicional não consiste, como na representacional, em aprender de forma significativa o que as palavras isoladas ou combinadas representam, mas refere-se ao aprendizado do significado de novas idéias em forma de proposição. Na aprendizagem proposicional o significado da proposição não é apenas a soma do significado das palavras componentes. A nova proposição é incorporada pela estrutura cognitiva formando assim outra estrutura significativa.

A aprendizagem de conceitos por sua vez é um tipo de aprendizagem representacional, já que os conceitos (objetos, situações ou propriedades) são representados por símbolos ou signos particulares, contudo na aprendizagem significativa conceitual os atributos essenciais do novo conceito são incorporados na estrutura cognitiva e resultam em um novo significado genérico mais unitário. A aprendizagem de conceitos é subdividida em formação e assimilação de conceitos, sendo que a primeira ocorre predominantemente em crianças em idade pré-escolar e segundo (Ausubel e outros, 1980, p. 106) (...) *requer a experiência direta com objetos, eventos, situações ou propriedades de onde a criança abstrai os atributos essenciais através de uma forma de aprendizagem por descoberta.* Já a assimilação de conceitos geralmente ocorre em crianças em idade escolar e adultos e caracteriza-se pela aquisiçào de conceitos secundários.

A teoria de assimilação desenvolvida por Ausubel torna mais evidente e preciso o processo de aquisição e organização de significados na estrutura cognitiva, pois, para ele (Ausubel e outros, 1980, p. 106):

> *A essência da teoria da assimilação é a idéia de que novos significados são adquiridos pela interação do novo conhecimento com os conceitos e proposições aprendidos anteriormente. Este processo de interação resulta em uma modificação tanto do significado da nova informação quanto no significado do conceito ou proposição ao qual está relacionada. Desta forma cria-se um novo produto interacional com novo significado.*

Segundo Moreira e Masini (1980, p. 16) Ausubel descreve o processo de "subsunção" através do "princípio da assimilação" representado de forma esquemática por Brito (2001, p.75) como: $\boxed{\text{Novo material (a)} \Leftrightarrow \text{elementos já existentes na estrutura cognitiva (A)} = A'a'}$

Para Ausubel a assimilação facilitaria a retenção, pois o produto interacional A'a' permanecem durante algum tempo dissociáveis em A' e a', o que favorece a retenção de a'. Com o passar do tempo o significado das novas idéias é assimilado ou reduzido pelos conceitos mais gerais e estáveis presentes na estrutura cognitiva até que o novo material não possa mais ser dissociado de suas idéias-âncora (subsunçores), diz-se então que ocorreu a assimilação obliteradora, ou seja, o grau de dissociabilidade tornou-se nulo, isto é, o produto interacional A'a' ficou reduzido a A'.

Segundo Ausubel e outros (1980), o processo de assimilação, característico da aprendizagem significativa, realiza-se pela aprendizagem subordinada, superordenada e combinatória.

Na aprendizagem subordinada o novo material adquire significado através da interação com os subsunçores e relaciona-se subordinadamente à estrutura cognitiva preexistente. A aprendizagem subordinada pode ser derivativa ou correlativa. Na aprendizagem subordinada derivativa, a nova informação subordinada irá apoiar ou exemplificar um conceito já existente sem alterar os atributos definidores do mesmo, já na aprendizagem subordinada correlativa a nova informação não é uma extensão, modificação ou qualificação de um conceito já existente, mas relaciona-se as idéias preexistentes, de forma que os atributos essenciais do conceito possam ser ampliados ou modificados com a nova subordinação correlativa.

A aprendizagem superordenada ocorre quando os conceitos ou idéias presentes na estrutura cognitiva do sujeito são mais específicos do que aqueles que se vai adquirir, por exemplo, a aprendizagem do conjunto dos números reais em termos de generalidade, abstração e abrangência superam os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais já presentes na estrutura cognitiva do sujeito. À medida que o conceito dos números reais é desenvolvido, os previamente aprendidos (naturais, inteiros, racionais, e irracionais) assumem a condição de subordinados, enquanto que o conjunto dos números reais representam uma aprendizagem superordenada.

A terceira forma de aprendizagem significativa é a combinatória. Nesse tipo de aprendizagem as idéias preexistentes na estrutura cognitiva e as novas não se relacionam de forma hierarquica, ou seja, não guardam relações de subordinação ou superordenação, contudo essas novas idéias irão relacionar-se, de uma forma geral, com a estrutura cognitiva já existente.

Segundo Ausubel e outros (1980) durante a aprendizagem significativa ocorrem dois processos; um deles é a diferenciação progressiva que é mais ligada à aprendizagem subordinada e a reconciliação integradora que é mais ligada às aprendizagens superordenada e combinatória.

Quando uma nova informação é aprendida por um processo de interação e ancoragem em um conceito subsunçor, este também sofre modificações e a ocorrência desse processo de inclusão uma ou mais vezes leva à diferenciação progressiva. Por outro lado, quando as idéias estabelecidas na estrutura cognitiva forem reconhecidas como relacionadas às novas aprendizagens, ou seja, quando no curso da nova aprendizagem houver uma reorganização dos elementos existentes na estrutura cognitiva de forma que esses elementos possam adquirir novos significados surge a reconciliação integradora.

Ausubel e outros (1980) referem-se `a diferenciação progressiva e à reconciliação integradora em termos instrucionais. Quando um material de ensino é programado de acordo com os princípios da diferenciação progressiva, as idéias, conceitos e proposições mais gerais e inclusivos do conteúdo são apresentados em primeiro lugar e, progressivamente, diferenciados em termos de detalhe e especificidade. Já quando é programado de acordo com a reconciliação integradora deve-se explorar explicitamente as relações existentes entre as idéias, assinalar as semelhanças e as diferenças relevantes, procurando reconciliar discrepâncias reais ou aparentes, sendo que esses dois princípios programáticos podem ser implementados por meio da utilização dos organizadores prévios adequados.

A aprendizagem significativa em sala de aula

A teoria de Ausubel descreveu a aprendizagem significativa por recepção, sendo esta considerada a base da maior parte do conhecimento escolar. Muitas vezes o que se observa na prática educativa é a ocorrência de uma aprendizagem mecânica. Para Coll e outros (1996, p. 73) os erros mais comuns cometidos pelos professores na aprendizagem por recepção são: **a.** a utilização precoce de métodos unicamente verbais com estudantes cognitivamente imaturos; **b.** a exposição desorganizada e arbitrária de fatos não relacionados ou de princípios explicativos; **c.** o fracasso na integração entre as novas idéias, conceitos ou proposições com os materiais expostos anteriormente; **d.** a utilização de procedimentos de avaliação que verificam apenas a capacidade dos estudantes para reproduzir idéias de forma literal ou em contexto igual ao que foram aprendidas.

Ausubel e outros (1980, p. 33) deram ênfase à aprendizagem significativa receptiva que para eles seria *o mecanismo humano por excelência de aquisiçào e armazenamento de* *uma vasta quantidade de idéias e informações representadas por algum campo de conhecimento.* Segundo eles, o ensino em sala de aula deve ser organizado em termos da aprendizagem significativa receptiva enquanto processo cognitivo ativo e não passivo:

> *A aprendizagem receptiva significativa é um processo ativo porque requer no mínimo (1) o tipo de análise cognitiva necessária para avaliar que aspectos da estrutura cognitiva são mais relevantes para o novo material potencialmente significativo; (2) algum grau de harmonia com as idéias existentes na estrutura cognitiva __ ou seja, a apreensão de similaridades e diferenças, e resolução de contradições reais ou aparentes entre conceitos e proposições novos e os já estabelecidos; (3) reestruturação do material aprendido em termos da experiência intelectual idiossincrática e do vocabulário de cada aluno*. (Ausubel e outros, 1980, p. 97)

A estrutura cognitiva prévia do aluno e a organização significativa da matéria de ensino devem ser consideradas quando da programação instrucional pelos professores, em função de sua importância na aprendizagem receptiva significativa. Segundo Ausubel e outros (1980, p. 37) deve-se considerar o potencial significativo do material a ser aprendido, sem esquecer que este varia em relação à experiência prévia e a fatores como idade, Q.I. e condições socio-econômicas dos alunos.

Ausubel e outros (1980) afirmaram que para que se conseguir uma adequada integração dos novos conhecimentos com a estrutura cognitiva preexistente, os professores podem utilizar os organizadores prévios, pois eles atuam como uma "ponte" entre o que o aluno já conhece e aquilo que precisa conhecer a fim de assimilar de forma significativa os novos conhecimentos.

Os organizadores prévios são de dois tipos: **a.** organizador expositivo: tem a função de propiciar os inclusores necessários para relacionar o novo material à estrutura cognitiva prévia do sujeito e deve ser utilizado quando os alunos possuírem pouco ou nenhum conhecimento sobre a matéria a ser ensinada; **b.** organizador comparativo: dá suporte conceptual e facilita a discriminação entre as novas idéias e aquelas já aprendidas, possibilitando o estabelecimento de semelhanças e diferenças. Para utilizar o organizador comparativo o aluno deve estar familiarizado com o assunto a ser tratado ou o assunto a ser tratado pode ser relacionado com as idéias já existentes em sua estrutura cognitiva.

Para que os organizadores prévios sejam corretamente elaborados é necessário que se conheça a estrutura cognitiva prévia dos alunos o que não é uma tarefa fácil, contudo cabe aos professores organizar de forma significativa a matéria de ensino para que se possa conectar de maneira ativa a estrutura conceptual de uma disciplina com a estrutura cognitiva dos alunos. Assim *os professores devem decidir o que é importante que seus alunos aprendam, discernir quais as disciplinas que estão prontos para aprender, dosar adequadamente a transmissão de informações e decidir sobre a quantidade adequada e o grau de dificuldade das tarefas de aprendizagem.(Ausubel,1980, p.9)*

Tendo em vista que a ocorrência da aprendizagem significativa é importante, buscou-se, no presente estudo, desde o seu início descobrir quais seriam os elementos relevantes que deveriam ser disponibilizados na estrutura cognitiva dos estudantes quando submetidos ao ensino de matrizes.

Procurou-se utilizar os organizadores prévios e para isso, investigou-se que conhecimentos anteriores (construção de tabelas, quadrado mágico, batalha naval, dentre outros) estavam disponíveis na estrutura cognitiva dos alunos, a fim de que pudessem ser estabelecidas conexões úteis para a formação dos conceitos.

Algumas das contribuições de Vergnaud para o ensino-aprendizagem

Para Vergnaud (1994, p. 22), *a construção do conhecimento consiste na construção progressiva de representações mentais, implícitas ou explícitas, que são homomórficas com a realidade em alguns aspectos e em outros não. Por um lado a representação é ativa, pragmática e operacional, e de outro, discursiva, teórica e simbólica. A objetividade é* *raramente completa, mas de certo modo, sempre há alguma objetividade numa representação. Geralmente não é a mesma representação que governa a ação e o discurso.*

Um conceito deve ser explorado em diferentes situações-problema, de modo que o aluno possa lidar com ele através de diferentes pontos de vista, sob vários ângulos, de maneira concisa e abrangente.

Um problema não será problema para o indivíduo a menos que ele tenha conceitos que lhe permitam considerá-lo como tal e, no processo de busca de solução, temos envolvidos um conjunto de invariantes (significados, relações, fórmulas, algoritmos, etc) e um conjunto de representações simbólicas (linguagem oral, linguagem escrita, linguagem matemática, etc) que serão utilizadas com o intuito de resolver o problema.

Ao considerar uma situação-problema, deve-se levar em conta os conceitos que o aluno dispõe e também sua competência para resolvê-los.

Os conceitos estão associados aos significantes (símbolos, teoremas e a concepção) enquanto as competências estão relacionadas com o significado (propriedades, esquemas, teoremas-em-ação).

Para Vergnaud (1988, pp. 250-251) um esquema pode ser definido como:

> (...) *uma aplicação (no sentido matemático) que busca suas entradas (informações) e saídas (ações, comandos motores) nos espaços multidimensionais. O número de dimensões de cada um desses espaços é eventualmente muito grande, e sua aplicação é dinamicamente organizada e controlada. Os esquemas organizam as condutas do sujeito, a partir de um recorte do real em objetos, propriedades e relações de diferentes níveis e recorrendo à tomada de posição sobre o real (teoremas-em-ação).*

Já os teoremas-em-ação foram definidos por ele como um caminho para analisar as estratégias intuitivas dos estudantes e elaborar um diagnóstico melhor de seus conhecimentos, enquanto que, os invariantes operatórios referem-se aos conhecimentos contidos nos esquemas, pois para Vergnaud (*in* Nacarato, 1995, p.22) *um esquema é composto de regras de* *ações e de antecipações, visto que gera uma série de ações para se atingir um objetivo, nem sempre se reconhece que ele é também composto, de modo essencial, por invariantes operatórios (conceitos-em-ação e conhecimentos-em-ação) e por inferências.* Os invariantes operatórios foram classificados em: **a.** invariantes do tipo "proposição" que podem ser verdadeiros ou falsos, um exemplo são os teoremas-em-ação; **b.** invariantes do tipo "função proposicional" que não são necessariamente verdadeiros ou falsos, um exemplo são os conceitos-em-ação; **c.** invariantes do tipo "argumentos", exemplos: objetos materiais, personagens, números (3+ 4), relações (maior que) e mesmo proposições (5 é um divisor de 25).

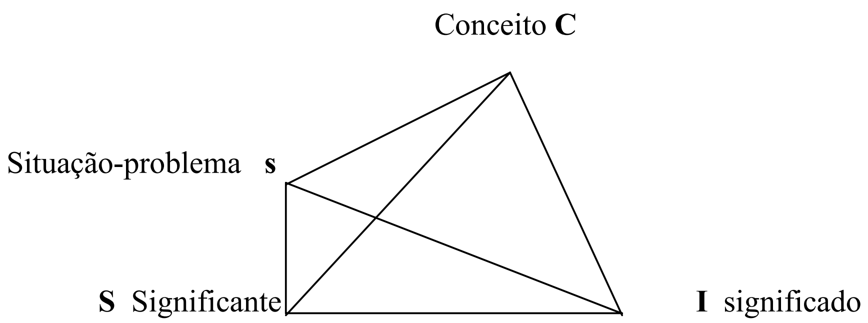
Vergnaud (1982), considerou ainda que o desenvolvimento de um conceito está apoiado em um tripé representado pela terna: C (s, I, S) onde:

s= a um conjunto de situações que tornam o conceito significativo;

I= a um conjunto de Invariantes que são usadas para análise e domínio dessas situações;

S= a um conjunto de representações simbólicas que são usadas para representar as propriedades (invariantes) e as situações.

Pode ser representado esquematicamente da seguinte forma:



Um outro constructo, utilizado por Vergnaud (1991) e importante para a fundamentação do presente trabalho, é o de campos conceituais, que seria um conjunto de situações, cuja análise e tratamento requer várias espécies de conceitos. Um simples conceito não se desenvolve normalmente isolado, mas em inter-relação com outros conceitos, através de vários tipos de problemas e com a ajuda de várias expressões e simbolismos.

De maneira esquemática, um campo conceitual pode ser representado da seguinte forma:

estudar um conceito ⟷ várias operações ⟷ vários conceitos.

São exemplos de campos conceituais: as estruturas aditivas, álgebra elementar, estruturas multiplicativas, geometria euclidiana e projetiva. As estruturas aditivas são entendidas como um conjunto de problemas, envolvendo adições e subtrações que abrangem os conceitos de comparação, transformação e combinação. O campo conceitual das estruturas multiplicativas é essencialmente matemático e consiste num conjunto de problemas, envolvendo multiplicações e divisões, que abrangem os conceitos de fração, razão, proporção, volume, área, número racional, espaço vetorial e a idéia de linearidade. As estruturas multiplicativas, embora não independam das estruturas aditivas, apresentam especificidade suficiente que torna possível estudá-las separadamente enquanto campo conceitual.

Ao resolver problemas do tipo aditivo ou multiplicativo, os estudantes escolhem uma operação ou uma seqüência de operações. Essas ações do aluno não são expressas verbalmente e aparecem de maneira implícita. Muitas vezes, o aluno é capaz de resolver um problema corretamente, sem ser, contudo, capaz de justificar a resposta.

Para que se analise as estratégias intuitivas dos estudantes e se elabore um diagnóstico de seus conhecimentos deve-se oferecer situações que permitam o desenvolvimento das competências e concepções, propiciando a aquisição de conceitos que serão necessários posteriormente.

Conceitos: formação e desenvolvimento conceitual

Conhecer dados e fatos sem dispor de conceitos que possam dar significado a eles de pouco ou nada adianta. São os conceitos que nos permitem reconhecer, interpretar, compreender e dar sentido a tudo o que nos rodeia.

Os conceitos são a essência do ensino escolar e vem sendo estudados desde muito tempo, embora não exista acordo sobre sua definição.

> *Dado o caráter fundamental de conceitos e categorias, poder-se-ia pensar que as pessoas que estudam conceitos chegaram a um consenso estável com relação à estrutura conceitual. Afinal de contas, Platão e Aristóteles tiveram algo a dizer a respeito de conceitos, os filósofos medievais viviam obcecados com questões referentes aos universais e à essência dos conceitos, e a representação de conceitos permanece como um tópico crucial em todos os aspectos da ciência cognitiva. Não obstante, não temos nem consenso, nem estabilidade.* (Medin, 1989, p. 1469)

Flavel (1976, p. 1) observou que, ao analisar as várias definições de conceito, o leitor fica com (...) *a impressão de que algo foi omitido, distorcido ou demasiadamente simplificado - que algo que o leitor pressente como verdadeiro em relação, pelo menos, a alguns conceitos, simplesmente não foi aprendido.*

Uma contribuição importante para a discussão a respeito da formação de conceitos foi a de Rosch (1973) que caracterizou a noção de nível básico, como sendo um nível especial, presente em toda taxonomia e que difere dos demais por determinadas peculiaridades cognitivas. Os conceitos que pertencem ao nível básico são os mais elementares e são aprendidos mais cedo, sendo mais facilmente identificáveis e correspondem a uma única imagem mental que é associada ao conceito como um todo. Evidentemente, estes itens não são os únicos que caracterizam o nível básico; contudo, são suficientes para que se possa dar uma idéia de sua natureza.

Os teóricos cognitivistas concordam em vários aspectos da formação de conceitos. Assim, é ponto comum entre eles atribuir importância aos processos e estados internos do organismo, considerando a informação como elemento fundamental no processo. O sujeito possui um papel dinâmico e ativo no processo. Embora os autores mostrem concordância em certos pontos, existem várias definições de conceito, propostas em diferentes épocas.

Ausubel e outros (1980, p. 74) definiram conceito como sendo *objetos, eventos, situações ou propriedades que possuem atributos essenciais e são designados numa determinada cultura por algum signo ou símbolo aceito* (...) *uma representação consciente da realidade altamente simplificada, em lugar de uma representação sensorial completa e fiel da mesma.*

Esses autores apontaram que os conceitos são adquiridos por formação e assimilação. A formação de conceitos seria característica da idade pré-escolar e dos primeiros anos do ensino, embora raramente possa surgir após o estágio das operações lógico-abstratas. A formação de conceitos refere-se aos conceitos primários, sendo geralmente, mais característica do estágio pré-operacional. É própria da aquisição indutiva e espontânea de idéias genéricas, é uma aprendizagem por descoberta que envolve análise discriminativa, abstração, diferenciação, formulação e teste de hipóteses e generalização. A criança, nesta fase, encontra-se ainda dependente da experiência empírico-concreta, os conceitos são geralmente particularizados e intuitivos. Já a assimilação dos conceitos apareceria nos últimos anos do primeiro nível de escolaridade quando os alunos não mais formariam novos conceitos, mas apenas assimilariam o novo incorporando-o à estrutura cognitiva já existente.

A assimilação de conceitos refere-se, então, aos conceitos secundários, corresponde ao estágio operacional concreto. É característica de uma forma de aprendizagem receptiva significativa, na qual os novos significados conceituais são aprendidos através do contato com atributos essenciais dos conceitos que são relacionados às idéias relevantes que se estabelecem nas estruturas cognitivas dos indivíduos. Nesta fase, as crianças adquirem o pensamento simbólico, e grande parte dos conceitos são adquiridos por definição ou em função do contexto. Estão livres da dependência da experiência empírico-concreta, pressupõem maturidade intelectual.

Existem vários fatores que influenciam a formação e a aquisição de um conceito. A aprendizagem de um conceito depende, de certa forma, das propriedades da estrutura cognitiva do indivíduo, do seu desenvolvimento, da linguagem, da experiência, da capacidade intelectual, bem como, da natureza do conceito e da forma de apresentação do mesmo. (Oliveira, 1995) e Oliveira e Oliveira (1999)

Segundo Ausubel e outros (1980, p. 73), os fatores de maior relevância que influem na aquisição dos conceitos são três: diversificação de exemplos para posterior solidificação, a combinação e ordenação de exemplos, tanto positivos quanto negativos, e a importância da informação apresentada para o conceito em pauta ou a sua disponibilidade.

Para Ausubel e outros (1980, p. 87), a linguagem desempenha um papel facilitador na aquisição de conceitos, ela tanto determina como reflete as operações mentais envolvidas na aquisição de conceitos abstratos. A linguagem também possibilita a assimilação através da definição e do contexto e assegura a uniformidade cultural no conteúdo genérico. Contudo, não é nem necessária, nem suficiente para a aquisição dos conceitos, pois eles podem ser formados num nível subverbal. Também podem dispensar a observação ou um nome para sua aquisição.

Não se deve ignorar, no entanto, a existência da interação que ocorre de maneira significativa entre muitos conceitos que são assimilados e seus precursores subverbais ou intuitivos. Uma vez adquiridos, os conceitos podem facilitar a aquisição de novos conceitos, no que se refere principalmente a categorização perceptual da experiência, na solução significativa de problemas e na percepção dos significados conceituais e proposicionais previamente aprendidos.

Os teóricos possuem alguns pontos em comum a respeito dos conceitos, como mostrado por Ausubel e outros (1980, p.74) que ao citar Vygotsky, afirmaram que:

> *A representação simplificada e generalizada da realidade que é alcançada através da existência e uso de conceitos torna possível a criação de uma linguagem com significados relativamente uniformes para todos os membros de uma cultura, facilitando, consequentemente, a comunicação (Vygotsky, 1962). Igualmente importante é o fato de possibilitar (1) o estabelecimento na estrutura cognitiva de constructos genéricos e abrangentes (e de suas*

> *combinações proposicionais) em relação aos quais novos significados correlativos podem ser adquiridos e retidos mais eficientemente como parte de uma estrutura organizada de conhecimento e (2) a manipulação, a inter-relação e a reorganização de idéias envolvidas na formulação e teste de hipóteses e, portanto, na solução criativa de problema.*

Outros teóricos cognitivistas como Klausmeier e Goodwin (1977) definiram conceito como a *informação ordenada a respeito das propriedades de uma ou mais coisas - objetos, eventos ou processos - que tornam qualquer coisa particular ou classe de coisas capaz de ser diferenciada e também relacionada com outras coisas ou classes de coisas.* (p.312)

Segundo esses autores, os conceitos e princípios, que se referem a relação entre dois ou mais conceitos, são resultados significativos da aprendizagem e podem ser classificados em constructos mentais e entidades públicas. O conceito como constructo mental refere-se ao pensamento próprio de cada indivíduo a respeito de qualquer conceito. Já o conceito como entidade pública é definido como a informação organizada, padronizada, que é aceita por um grupo de pessoas que falam a mesma língua, ou seja, refere-se aos conceitos tal como aparecem nos livros, dicionários e enciclopédias. São aqueles usados e ensinados nas escolas. (Klausmeier, 1977; Pirola,1995; Brito, 2001 b)

A aprendizagem de princípios requer a aprendizagem dos conceitos envolvidos, bem como, um nível superior de pensamento em relação ao necessário para se aprender cada conceito integrado no princípio.

Para autores como Klausmeier, Flavell e Piaget, a evolução do processo de formação dos conceitos se dá em níveis sucessivamente superiores.

Klausmeier e Goodwin (1977, pp. 324-328) distinguiram quatro níveis de formação de conceitos:

a. nível concreto: refere-se a percepção do indivíduo, requerendo tão somente discriminação e representação interna;

b. nível de identidade: quando o indivíduo, ao entrar em contato com um objeto cuja forma difere daqueles até então conhecidos, consegue identificá-lo como tal. Este nível requer discriminação e generalização;

c. nível classificatório: quando o indivíduo classifica um objeto como pertencente a uma classe. Requer, além da discriminação e generalização, saber operar com classes de equivalência;

d. nível formal: quando o indivíduo consegue nomear, definir e discriminar um conceito e seus atributos.

Os conceitos formados nos dois primeiros níveis ocorrem, geralmente, antes do ingresso na escola. E nos dois últimos, durante o ensino fundamental e médio. No nível formal, o indivíduo é capaz de reconhecer exemplos e não exemplos de um conceito, bem como compreender que existem relações superordenadas, coordenadas e subordinadas relativa a ele, compreende a existência de princípios que mantém uma relação entre o conceito formado e outros conceitos, é capaz de resolver problemas que demandam o uso de conceitos particulares.

> (...) *a formação dos níveis é caracterizada por ser gradual e contínua, em vez de ser abrupta e descontínua* (...) *para que um indivíduo forme um conceito em qualquer nível particular, este deve ser capaz de realizar todas as operações no nível anterior e naquele nível e deve, também, ter formado um conceito específico no nível precedente. Então, estas são as condições internas, pré-requisitos para a formação de cada um dos quatro níveis sucessivos do mesmo conceito, numa seqüência invariável.* (Klausmeier e Goodwin, 1977, pp. 324-328)

A maioria dos autores apontou a importância dos níveis de formação dos conceitos como extremamente importante na escola. Além dos níveis, existe acordo sobre a necessidade de conceitos prévios. Assim, conforme mostrado por Brito (2001 b, p. 4):

> *Ampliando de certa forma a idéia proposta por Klausmeier, a formação e construção de um conceito ou princípio ao longo da vida do ser humano dependem das experiências e vivências do sujeito com esse conceito ou princípio, independente da idade. Assim, o sujeito construirá conceitos e princípios com base na sua experiência e no nível de desenvolvimento em que é capaz de processar as operações mentais necessárias.*

A aquisição de conceitos baseia-se na aprendizagem significativa, que é um processo no qual aquilo que aprendemos é produto da nova informação, interpretada de acordo com os conhecimentos prévios. O novo conceito é assimilado ou integrado aos conhecimentos anteriores já existentes na estrutura cognitiva.

Segundo Ausubel e outros (1980) para que a aprendizagem significativa ocorra, é necessário que os alunos sejam capazes de relacionar o material de aprendizagem com a estrutura de conhecimentos que possuem, somada a uma predisposição favorável e um esforço no sentido de aliar os conhecimentos prévios à aprendizagem do novo conceito. O material apresentado, entretanto, deve estar internamente organizado, deve ser compreensível e carregado de significado para o aluno.

Os conhecimentos prévios dos alunos são construções pessoais, elaboradas na sua interação cotidiana com o mundo, muitas vezes incoerentes do ponto de vista científico. Esses conhecimentos costumam ser muito estáveis e resistentes às mudanças. Apresentar o conhecimento escolar estabelecendo relações com o contexto cotidiano dos alunos, pode modificar as suas idéias prévias.

Para ativar os conhecimentos prévios e despertar o interesse dos alunos, podem ser utilizadas situações-problema relacionadas com o conteúdo conceitual. Os alunos devem ser capazes de relacionar o novo conhecimento com as estruturas e idéias já existentes e através do desequilíbrio dessas estruturas e idéias e de sua reorganização é que poderá ocorrer uma mudança da estrutura conceitual. Embora os conflitos cognitivos, nem sempre, conduzam a um avanço conceitual, eles podem levar os alunos a uma tomada de consciência em relação aos seus próprios conhecimentos prévios.

Com relação à construção de significado na aprendizagem de conceitos, Coll e outros (1998, p. 14) mostraram que *o que importa é que os alunos possam construir significados e atribuir sentido àquilo que aprendem. Somente na medida em que se produz este processo de construção de significados e de atribuição de sentido se consegue que a aprendizagem de conteúdos específicos cumpra a função que lhe é determinada e que justifica a sua importância: contribuir para o crescimento pessoal dos alunos favorecendo e promovendo o seu desenvolvimento e socialização.*

Conclui-se, então, que o conceito é uma construção mental que evolui do nível concreto (perceptual) até o formal (abstrato) de forma dinâmica, através das interações do indivíduo, em seu cotidiano na sociedade e do processo de escolarização. Como a formação do conceito depende dos conhecimentos prévios e do nível de desenvolvimento, pode-se afirmar que ela também é um processo único para cada indivíduo.

Algumas considerações sobre solução de problemas

Mayer (1992) definiu problema como sendo uma situação verbal, ou não, apresentada em um estado determinado para o qual não dispomos de um caminho direto e óbvio que nos leve a outro estado. Já para Pozo (1998 b, p. 48):

> *Entende-se problema como qualquer tipo de atividade de procedimento que seja realizada dentro ou fora da sala de aula. No entanto, uma tarefa qualquer (seja matemática ou não matemática) não constitui um problema. Para que possamos falar da existência de um problema, a pessoa que está resolvendo essa tarefa precisa encontrar alguma dificuldade que a obrigue a questionar-se sobre qual seria o caminho que precisaria seguir para alcançar a meta.*

Na fundamentação teórica de um estudo a respeito da solução de problemas por crianças da escola elementar, Brito e Taxa (1999) mostraram os vários autores que trataram a respeito das fases do pensamento na solução de um problema. De acordo com essas autoras, Graham Wallas foi o primeiro que descreveu os estágios do pensamento criativo (que é semelhante ao proposto por Dewey). Seriam eles: preparação; incubação; iluminação ou *insight* e verificação.

Já Polya (1986) considerou que a solução de um problema realiza-se em quatro passos: compreensão; concepção de um plano; execução do plano e exame da solução alcançada.

O primeiro, compreensão do problema, se refere ao entendimento do significado das palavras, além da compreensão da estrutura matemática e dos símbolos com os quais esse problema é apresentado, levando em conta as dificuldades e obstáculos apresentados por ele e a disposição para se encontrar a sua solução. Para que essa compreensão ocorra, o problema deve, além dos novos elementos, possibilitar a utilização de elementos e regras já conhecidas.

O segundo seria conceber um plano que ajudasse a chegar à solução, ou seja, devia-se estabelecer a distância entre a situação inicial e a meta a qual se pretende chegar e também estabelecer os procedimentos úteis para diminuir esse percurso.

Pozo (1998b, p.24) afirmou que Polya e outros autores distinguiram entre procedimentos "estratégicos" ou "heurísticos" e outros procedimentos de solução de problemas, tais como, as "regras" os "algoritmos" ou os "operadores". As "estratégias" ou procedimentos "heurísticos" guiam a solução dos problemas; são os planos, as metas e submetas que os alunos usam quando estão solucionando o problema. Os procedimentos de transformação da informação requeridos por esses planos, metas e submetas são denominados regras, algoritmos ou operações.

O terceiro passo refere-se à execução do plano. Cada etapa da execução deve ser passível de verificação. Já no quarto e último, a solução obtida precisa ser examinada. É desejável que o solucionador analise tanto o resultado como o raciocínio empregado. Isso permite que esse processo seja estendido à solução de outros problemas do mesmo tipo.

Verificou-se que os programas e projetos que tentaram ensinar a resolver problemas baseados em procedimentos heurísticos ou estratégicos obtiveram sucesso relativo, pois como observaram alguns autores (Carretero e Garcia Madruga, 1984; Pérez,1990), os procedimentos utilizados dependem tanto do tipo de conhecimento que o sujeito possui, quanto das características do conteúdo ao qual esses problemas se aplicam. Em função disso, treinar os alunos, na solução de problemas de uma maneira geral, parece uma tarefa difícil tanto por razões psicológicas como didáticas.

Mayer (1992) resumiu os quatro passos propostos por Polya, como necessários para resolver um problema, em dois: tradução e solução do problema. Segundo ele, o processo de solução de um problema exige que a pessoa o compreenda e o traduza para uma série de expressões e símbolos matemáticos, utilizando as estratégias e técnicas que o conduzam a meta, interpretando os resultados obtidos e traduzindo-os para uma solução viável.

Considerando os tipos de aprendizagem observados, Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p.473) distinguiram duas maneiras de solucionar problemas, que são a solução por ensaio e erro e a solução por discernimento. A primeira consiste em fazer emergir a solução através da variação, aproximação e correção de respostas aleatórias ou sistemáticas enquanto a abordagem por discernimento, implica em uma disposição orientada para gerar e comprovar hipóteses, buscando compreender as relações significativas, os meios e as soluções de um problema particular. De acordo com esses autores, essas abordagens podem envolver a simples transposição de um princípio aprendido previamente a uma situação nova análoga, ou uma reestruturação e integração da experiência passada e presente, objetivando se adaptar às exigências de uma meta preestabelecida.

Ausubel e outros (1980, p. 479) colocaram que essas abordagens são encontradas em todos os níveis etários e a opção entre uma ou outra vai depender, essencialmente, da dificuldade intrínseca e da complexidade do problema, da experiência prévia do sujeito e do grau geral de sofisticação na área problemática, bem como da suscetibilidade do problema a uma análise lógica e a forma de investir orientada por hipóteses.

Embora sujeitos de qualquer idade possam utilizar tanto a tentativa e erro quanto a abordagem por discernimento, a freqüência da tentativa e erro tende a diminuir com o aumento da idade e o avanço da escolaridade. Assim, de acordo com Ausubel e outros (1980), as escolhas de solução orientadas por hipóteses tornam-se mais complexas em virtude da capacidade crescente de generalização e manipulação de símbolos abstratos, bem como pela adoção de abordagens menos fragmentadas, além do melhor aproveitamento das experiências anteriores quando da solução de novos problemas. Assim, é razoável supor que os sujeitos do presente estudo, que já se encontram no nível médio de ensino, já seriam capazes de escolher soluções controladas por hipóteses, sendo capazes de distinguir entre a realidade externa e as próprias experiências.

Pozo e Postigo (1993), baseados em outros autores, sugeriram cinco procedimentos para a solução de problemas, a saber: **a.** aquisição da informação (coleta e seleção da informação), ou seja, assimilação de uma nova informação ou acréscimo de conhecimentos aos já existentes; **b.** interpretação da informação, ou seja, decodificação ou tradução da mensagem para um novo formato, objetivando facilitar a conexão da nova informação com os conteúdos da memória; **c.** análise da informação e realização de inferências, ou seja, análise dos casos, formulação de conjecturas ou inferências; **d.** compreensão e organização conceitual da informação, ou seja, compreensão do enunciado ou da informação coletada para a solução do problema, o estabelecimento de conexões e relações conceituais e a organização conceitual dos conhecimentos; **e.** comunicação da informação, ou seja, utilização da linguagem oral ou escrita e de outros tipos de expressão como gráficos, mapas, tabelas, diagramas, computador, vídeo, fotografia, etc., para apresentação da informação.

Já Sternberg (2000) apontou sete etapas para a solução de problemas: **1.** identificação do problema; **2.** definição e representação do problema; **3.** formulação de uma estratégia para solução do problema; **4.** organização e reorganização da informação; **5.** alocação de recursos; **6.** monitoração do processo de solução do problema; **7.** avaliação da solução do problema após sua finalização.

Assim, na solução de um problema, é necessário que os alunos coloquem em ação uma seqüência de passos que os possibilitem alcançar a meta estabelecida quando do delineamento de seu plano. Embora a solução de problemas não possa ser desvinculada dos conteúdos conceituais e atitudinais, é evidente o seu caráter de procedimento enquanto conteúdo educacional.

É comum o indivíduo saber executar uma tarefa, embora apresente dificuldades para descrever ou definir o que realizou. No presente estudo, pode ser observado que os sujeitos solucionavam alguns problemas mas não sabiam dizer como haviam procedido para chegar a solução.

Pozo (1998b, pp.30-31) afirmou que as habilidades e estratégias de solução de problemas são específicas de um determinado domínio de conhecimento e que devido a isso *a maior eficiência na solução de problemas, pelos especialistas, não seria devido a uma maior capacidade cognitiva geral e sim aos seus conhecimentos específicos.* (...) *os especialistas, embora não se diferenciem em suas capacidades gerais de solução de problemas, destacam-se pela sua capacidade de prestar atenção, lembrar, reconhecer, manipular informações e raciocinar sobre ela na própria área de sua especialidade.*

Segundo Pozo (1998 b) alguns estudos realizados (Chi, Glaser e Farr,1988; Pozo,1989) com especialistas e novatos das áreas demonstraram que os primeiros são mais rápidos e cometem menos erros na solução de problemas; adotam estratégias diferentes dos principiantes, muitas vezes reduzem um problema a um simples exercício de aplicação de rotinas automatizadas. O resultado dessas pesquisas mostrou que o domínio de procedimentos de solução de problemas é um efeito da prática, prática esta orientada pelos princípios e conceitos aprendidos anteriormente. Para Pozo (1998b, p.34), o*s especialistas usam os seus conhecimentos conceituais específicos e o seu metaconhecimento para buscar soluções novas que são inacessíveis aos principiantes. Diante de um problema realmente novo, os especialistas podem recorrer a seus conhecimentos conceituais, bem estruturados, para gerar modelos ou analogias dos quais possam ser derivados procedimentos ou estratégias de resolução eficientes.*

O caráter formador da Matemática tem sido reconhecido nas salas de aula e nos documentos oficiais como os PCNs (MEC,1999, p. 251) no qual afirmou-se que: (...) *em seu papel formativo, a Matemática, contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais*.

De acordo com esse texto, o ensino da Matemática é justificado, em parte, por representar o desenvolvimento de estratégias de raciocínio e pensamento, passíveis de serem generalizadas e transferidas a outras áreas do conhecimento e com possibilidades de aplicação em situações cotidianas.

Essa concepção leva a crer que existem procedimentos gerais de raciocínio, ou de solução de problemas, que podem ser ensinados de forma abstrata e generalizados a outras áreas do conhecimento e que seria necessário aprender e ensinar a estrutura da disciplina de Matemática.

Segundo Pozo (1998b) os que defendem que o objetivo da Matemática é fundamentalmente o ensino de estratégias de pensamento reduziram o problema matemático a certos paradoxos matemáticos ou problemas não quantitativos, de maneira que as tarefas que necessitem da utilização de algoritmos conhecidos ou de fórmulas não representam para eles verdadeiros problemas. Esse autor afirmou que, segundo essa concepção idealista, a importância da solução de problemas teria uma justificativa mais prática, pois (...) *aprender a resolver problemas matemáticos e a analisar como os especialistas e os não-especialistas resolvem esse tipo de tarefas pode contribuir para um aumento do conhecimento científico e tecnológico de maneira geral. Ao mesmo tempo a Matemática constitui um poderoso auxiliar para a solução de problemas de caráter científico.* (p.45)

O textos do PCNs (MEC,1999, p. 251) apresenta um caráter aplicativo dos procedimentos matemáticos, como no trecho a seguir: (...) *no que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no ensino médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional.*

Segundo Vergnaud (1994), o processo de busca de solução de um problema envolve um conjunto de invariantes (significados, relações, fórmulas, algoritmos, etc) e um conjunto de representações simbólicas (linguagem oral, linguagem escrita, linguagem matemática, etc) que serão utilizadas com o intuito de resolver o problema. Para ele a resolução de problemas é a fonte e o critério do conhecimento operacional, argumentando que

> *Os estudantes freqüentemente trabalham com significados lingüísticos ou outras representações simbólicas: palavras na*

> *contagem, dígitos e disposição espacial na subtração, símbolos e sentenças algébricas na resolução de equações. No entanto, linguagem e símbolos também têm a função de expressar conceitos e teoremas para comunicação ou para gerar eventualmente uma solução. A partir do uso de palavras, símbolos, ou desenhos de algum tipo, estudantes identificam objetos e relações relevantes.* (Vergnaud,1994, p.28)

Sternberg (2000) apontou que os estudos realizados por pesquisadores como Kotovsky, Hayes e Simon em 1985, mostraram que os meios pelos quais as pessoas representavam os problemas eram facilitadores ou não para a sua solução e também que os problemas mais abstratos, para os quais a formação e o uso de representações mentais eram mais difíceis, apresentavam um grau maior de dificuldade para a sua solução. Os autores verificaram que a familiaridade com os aspectos dos problemas, bem como, a facilidade de construir uma representação adequada relacionava-se, muitas vezes, com as oportunidades que as pessoas haviam tido em explorar, manipular e operar com materiais, ou porque o uso de regras em outros domínios as tornaram familiares, ou porque receberam treinamento no uso ou na memorização dessas regras.

Ao tratar da solução de problemas, Ausubel, e outros (1980, p. 476), afirmaram que

> (...) *a estrutura cognitiva existente desempenha um papel decisivo na solução de problemas, a partir do fato de que a solução de um dado problema envolve a reorganização dos resíduos da experiência passada para se adaptar às exigências particulares da situação problemática atual. Como as idéias na estrutura cognitiva constituem o material bruto da solução de problemas, qualquer transferência que ocorre, seja ela positiva ou negativa, obviamente reflete a natureza e a influência das variáveis da estrutura cognitiva.*

A posse de conhecimentos relevantes, de conceitos, princípios, termos transacionais, "funções disponíveis" na estrutura cognitiva, facilita a solução de problemas. Outra fonte de estrutura cognitiva de transferência positiva estaria relacionada à aplicação geral de estratégia, orientação e disposição, que reflete experiência prévia com problemas relacionados e também ao produto de um processo de solução de problemas que é incorporado à estrutura cognitiva. A estrutura cognitiva é também responsável pela transferência negativa na solução de problemas. Uma delas seria a configuração mental ou entrincheiramento que se refere ao uso de uma estratégia que funcionou para solucionar um problema no passado, mas que não funciona para um novo. Uma segunda fonte de transferência negativa é a fixidez funcional, que impossibilita a mudança da função ou uso de um objeto, ou seja, refere-se a incapacidade da pessoa envolvida na solução de um problema de conceber outros usos ou funções desse objeto, por causa da influência que predomina no uso convencional ou estabelecido do mesmo. (Ausubel e outros, 1980; Pozo,1998b)

Para Sternberg (2000), o obstáculo, na solução de um problema, não seria encontrar uma estratégia adequada para a transferência positiva, mas sim a influência que a transferência negativa exerce. Uma maneira de minimizar a transferência negativa seria a incubação, que consiste em abandonar o problema durante algum tempo sem refletir conscientemente sobre ele, deixando apenas que ele seja processado pelo subconsciente.

Para Ausubel e outros (1980), as variáveis mais significativas e que influenciam o resultado da solução de problemas seriam: **a.** ter disponível na estrutura cognitiva, conceitos e princípios importantes para a solução do problema em questão; **b.** possuir alguns traços cognitivos e de personalidade tais como: ser incisivo, capacidade de integração, estilo cognitivo, sensibilidade ao problema, flexibilidade, capacidade de improvisação, espírito de aventura, curiosidade intelectual e tolerância à frustração.

Segundo esses autores, a linguagem é um componente facilitador tanto da solução de problemas quanto da formação de conceitos. Para eles, a aptidão verbal e a prontidão cognitiva geral (inteligência e etapas do desenvolvimento) explicariam as tendências etárias e as diferenças individuais na habilidade de solucionar problemas.

Brito, Fini e Neumann (1994) verificaram que o raciocínio verbal apresenta alguma relação com o fator matemático geral, ou seja, na primeira etapa da solução de um problema matemático, há necessidade da compreensão verbal da proposição pelo estudante para, posteriormente, entender a sua natureza matemática.

Segundo Pozo (1998 b), o interesse pela solução de problemas em matemática se deve principalmente a dois fatores. O primeiro é que o raciocínio, nesta matéria, estimula o raciocínio em outras áreas do conhecimento e o segundo é que um maior aprofundamento nos conhecimentos e procedimentos matemáticos ajudariam o avanço em outras áreas científicas e tecnológicas, bem como para as atividades cotidianas.

Embora o interesse pela solução de problemas, a partir da década de oitenta, tenha aumentado, verifica-se ainda que, em muitas escolas, os professores continuam dedicando muito mais tempo à solução de exercícios do que à solução de problemas, sem perceber que os exercícios, embora sirvam para consolidar e automatizar algumas técnicas, habilidades e procedimentos necessários, posteriormente, para a resolução de problemas, dificilmente poderão auxiliar na utilização dessas técnicas em contextos diferentes daqueles em que foram aprendidas ou exercitadas e que também pouco ou nada podem servir para a aprendizagem de conceitos. Outras vezes, limitam-se a transmitir as etapas necessárias à resolução de determinados modelos de problemas.

Dessa prática, decorre que os alunos, quando solicitados a solucionar problemas, procuram utilizar processos matemáticos memorizados e aplicados de forma mecânica, sem chegar a compreensão e evidentemente a solução do problema.

Os professores deveriam propor problemas que objetivassem a utilização das diversas técnicas, algoritmos e habilidades matemáticas em contextos diferentes dos que foram aprendidos ou ensinados, de maneira que os alunos fossem capazes de solucionar problemas de uma forma não mecânica, mas através da compreensão dos conceitos e princípios envolvidos.

A utilização de alguns hábitos de raciocínio objetivo, sistemático e rigoroso poderão auxiliar nesse processo, contudo, a solução de problemas exige não somente procedimentos adequados, determinadas atitudes e disposições, como também o conhecimento de fatos e conceitos. O conhecimento de fatos e conceitos é um determinante de importância na capacidade para solucionar problemas, embora não seja uma condição suficiente, pois muitas outras variáveis cognitivas e de personalidade, como já foi exposto, estão implicadas nesse processo.

Vergnaud (1994), Pozo (1998 b) dentre outros autores ressaltam a importância de que os professores busquem meios de compreender o que acontece em sala de aula (os procedimentos, as concepções, o conhecimento prévio, os erros cometidos e as soluções diferentes que são dadas aos problemas pelos alunos) para planejar e propor problemas e situações desafiadoras que possibilitem a reflexão e provoquem rupturas, reconstruções e avanços nos conhecimentos e concepções dos alunos tornando-os capazes de solucionarem não só problemas escolares mas também problemas cotidianos.

CAPÍTULO V

DELINEAMENTO DA PESQUISA

Algumas considerações sobre o método de pesquisa-ação

Optou-se pelo método de pesquisa-ação em razão das dificuldades encontradas para treinamento dos professores da escola onde o estudo se realizou, pois os mesmos não dispunham de tempo para preparar as aulas de acordo com a estratégia proposta. Neste estudo, partiu-se da convicção de que a pesquisa-ação remete à reflexão ética sobre a importância dos dados empíricos enquanto fundamento para um aprimoramento da prática reflexiva. Segundo Elliott (1991) as lacunas que existem entre a pesquisa educativa e a prática docente poderão ser superadas através da pesquisa-ação.

Elliott (1993) tem difundido a idéia do professor como pesquisador, ou seja, do professor que busca produzir conhecimento através de sua vivência na prática pedagógica e que não se limita, apenas, a ser um reprodutor e executor de conhecimentos. Segundo esse autor *a compreensão que o profissional reflexivo tem dos valores que leva à prática se transforma (sem solução de continuidade) no processo de reflexão sobre tais tentativas.*(p.64).

Schön (1992, pp. 81-82) apontou três idéias que norteiam o desenvolvimento de uma prática reflexiva: *o conhecimento na ação, a reflexão na ação e a reflexão sobre a reflexão na ação.* Para esse autor, o conhecimento na ação não implica conhecer apenas os conceitos como entidade pública, mas também saber enfrentar as situações que se apresentam no dia-a-dia e revelam um *conhecimento espontâneo, intuitivo, experimental.* A reflexão na ação significaria parar para refletir, reorganizar ou redirecionar a ação (idem, p. 85). Já a reflexão sobre a reflexão na ação implica julgamento e compreensão do problema para se chegar a uma solução e redirecionar ações futuras.

Smith (2000) ressaltou a importância dos estudos que são realizados em contextos de sala de aula, com a compilação de dados autênticos, interpretados de acordo com uma perspectiva teórica e analisados através das lentes conceituais de um pesquisador. Esses estudos, segundo o autor, tem sido úteis na prática pedagógica, e tem auxiliado no sentido de preencher a lacuna entre teoria e prática na educação matemática. Segundo esse autor muitos educadores matemáticos (Fraivillig, Murphy & Fuson,1999; Schoenfeld,1999; Simon & Tzur,1999; Steffe & D'Ambrosio,1995) tem enfatizado a importância desses tipos de pesquisas, pois elas podem ser usadas para guiar os professores na construção de seus próprios modelos para o ensino e aprendizagem de Matemática.

O estudo desenvolvido por Smith (2000) pode ser tomado como um exemplo de pesquisa-ação que trouxe resultados relevantes para o ensino-aprendizagem da Matemática. Nesse estudo ele buscou descrever os tipos de estratégias instrucionais e de avaliação surgidas da coleta de dados e que apresentaram oportunidades para a reflexão e a comunicação dos estudantes. Procurou, também, identificar as estratégias que pudessem auxiliar o pensamento e a compreensão da Matemática. Optou por um projeto qualitativo para relatar a prática dos professores em sala de aula, sendo que as observações e as descrições foram complementadas com entrevistas anteriores e posteriores às aulas. A análise dos dados coletados permitiram concluir que para se promover o pensamento e a compreensão matemática, é necessário:

1- Dirigir e apoiar o pensamento dos alunos em sala de aula (o professor deve utilizar questões abertas de conteúdo específico que exijam que os estudantes pensem, reflitam e se comuniquem matematicamente; ele deve dirigir a descoberta, realçar as atitudes positivas, motivar e encarar os erros dos alunos como oportunidades de aprendizagem); **2-** Verbalizar o pensamento (inclui todos os aspectos de prática na sala de aula que incentivem a linguagem do estudante e expressem o seu pensamento. O professor através de questões abertas deve provocar questionamentos de forma a estabelecer os conhecimentos prévios dos aprendizes, traçar seus prognósticos e deve conduzir a um vocabulário partilhado através de explicações verbais); **3-** Esclarecer o pensamento (o professor deve esclarecer o pensamento do estudante reforçando sua reflexão e comunicação, deve monitorar os progressos dos estudantes, rever assuntos relacionados, estabelecer conexões entre o conhecimento prévio dos aprendizes e o novo conhecimento, propor a eles que pensem em pares e dividam a solução encontrada); **4-** Estampar o pensamento (o professor deve realçar a importância das representações escritas dos estudantes, deve propor trabalhos através dos quais os estudantes possam mostrar seu pensamento e raciocínio, deve traçar os mapas conceituais dos estudantes, anotar os procedimentos de solução e a justificativa de solução, explicar os termos matemáticos, utilizar diagramas e fotos); **5-** Experiências centradas no estudante (o professor se torna aprendiz e o aprendiz se torna professor durante a modelagem de soluções e estratégias, ambos são facilitadores na aprendizagem); **6-** Avaliação centrada no estudante (a avaliação deve ser vista como parte integrante da instrução, deve refletir não só o conteúdo específico que o estudante aprendeu, mas a qualidade do seu pensamento. As estruturas de avaliação devem ligar cognição e contexto).

Estudos como os aqui citados, realizados no contexto da sala de aula, formulados com o objetivo de identificar estratégias que possam facilitar o processamento e a compreensão da Matemática, fornecem sugestões de ensino que podem facilitar a ocorrência da aprendizagem significativa. E com esse objetivo foi que procurou-se no planejamento e efetivação do ensino do conceito de matrizes incluir tópicos como o surgimento e evolução do conceito ao longo do tempo, além de tópicos referentes à sua importância e utilidade. Embora a contextualização dos conteúdos não seja fator determinante da ocorrência da aprendizagem, esse aspecto deve, na medida do possível, ser considerado.

Assim, a proposta de trabalho aqui tratada segue um planejamento no qual é apresentada a evolução histórica do conceito de matrizes, ressaltando-se o fato de ser uma álgebra não comutativa e destacando-se aspectos relativos a importância e aplicabilidade, mostrando para tanto o crescente uso desse conceito em áreas como Economia, Engenharia, Matemática aplicada e computacional, Estatística, Física, dentre outras. Procurou-se conceituar matrizes como sendo tabelas formadas por números dispostos em m linhas e n colunas (sendo m e n números naturais diferentes de zero), nas quais não faltam e nem sobram elementos. Representa-se matrizes por letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas acompanhadas por dois índices que indicam a linha e a coluna respectivamente, e que são dispostos dentro de parênteses ou de colchetes ou por duas barras verticais colocadas à esquerda e à direita. Assim uma matriz A do tipo m x n pode ser representada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & \end{pmatrix}$$ ou abreviadamente por: $A = (a_{ij})_{mxn}$

a_{m1} a_{m2} a_{m3} ... a_{mn}

Procurou-se mostrar, também, que as matrizes são ferramentas úteis e necessárias para a compreensão de vários conteúdos (gráficos finitos, determinantes, sistemas lineares, geometria analítica, vetores, análise combinatória, eletrônica, etc.) e que seu estudo poderia tornar-se mais interessante se o professor buscasse relacioná-lo a esses conteúdos (Anexo 4).

Pode ser observado que a associação dos conjuntos de vetores e o conjunto de matrizes $M_{mxn}(R)$ não aparecem nos livros didáticos do ensino médio, embora esses conjuntos apresentem uma coincidência estrutural, no que se refere a um par importante de operações definidas sobre eles. O estudo de matrizes e vetores poderia torna-se mais motivador e despertar maior interesse no aluno se fossem feitos estudos simultâneos de V e M_{mxn} (R).

Objetivos

O objetivo do presente estudo foi verificar a eficácia de um método diferenciado do ensino de matrizes, analisando o desempenho, em dois instrumentos, dos sujeitos submetidos a duas maneiras diferentes de ensinar esse conceito. O ponto de partida foi a idéia de que o uso dos conceitos espontâneos, no ensino de um novo conceito, favorece a aprendizagem.

Para atingir esse objetivo, foi formulada a seguinte questão de pesquisa, questão esta que norteou o desenvolvimento da presente investigação:

O conhecimento anterior sobre um conceito e uma estratégia diferenciada de ensino podem auxiliar na formação dos conceitos científicos e melhorar o desempenho dos estudantes do ensino médio na solução de problemas sobre matrizes ?

Sujeitos

Foi usada uma amostra de conveniência tendo em vista as exigências do estudo, pois o tema matriz é dado em um momento específico do planejamento anual da disciplina de Matemática, em uma determinada série do ensino médio. Além disso, como foi testado um método de ensino, houve necessidade de se desenvolver o estudo em classes que atendessem às exigências do estudo.

Assim, os sujeitos foram 105 estudantes, de quatro cursos técnicos profissionalizantes (publicidade, administração, mecatrônica e processamento de dados), com idades que variavam de 15 a 18 anos, regularmente matriculados na segunda série do ensino médio no período diurno, de uma escola particular de Santo André, no ABC paulista. Foram distribuídos em grupo experimental (alunos dos cursos profissionalizantes de publicidade, administração e mecatrônica) e grupo controle (alunos do curso profissionalizante de processamento de dados). A princípio qualquer turma poderia ser controle ou experimental, já que todos os alunos promovidos para o segundo ano tiveram os mesmos conteúdos no primeiro.

Instrumentos

Foram utilizados como instrumentos no pré e pós-teste, deste estudo, duas provas matemáticas que versavam sobre matrizes, tipo lápis e papel, aplicadas simultaneamente durante as aulas de matemática. A primeira prova (prova I) (Anexo 5) continha oito questões perfazendo um total de treze itens, em que foram apresentados quadrados mágicos que são os precursores do conceito de matriz, bem como problemas nos quais o conhecimento prévio (como o jogo batalha naval, seqüências gráficas) é utilizado, além de outros com representação pictórica que são exemplos e não exemplos do conceito em questão. As questões (1,4 e 5) da prova I foram formuladas com o objetivo de verificar se os alunos que dispunham desses conhecimentos teriam um desempenho superior na solução de problemas contextualizados. A segunda prova (prova II) (Anexo 6) que continha dez questões com um total de dezessete itens apresentava problemas que envolviam outros conteúdos (geometria, combinatória, vetores) e que seriam mais facilmente solucionados com a utilização da álgebra das matrizes.

Essa prova teve por objetivo verificar se o aluno apresentava conhecimentos anteriores úteis para a formação dos conceitos.

Procedimentos

No início do período letivo de 1999, foram feitos contatos com a administração da escola para obtenção de autorização para a realização do estudo. Nesse momento, os 105 estudantes foram separados em grupo experimental e controle, sendo que no grupo experimental ficaram os alunos de publicidade (25), mecatrônica (41) e administração (13), enquanto o grupo de controle era integrado por estudantes de processamento de dados (26).

Os alunos das turmas escolhidas dispunham, na grande maioria, das mesmas condições para o ensino. As aulas foram ministradas por duas professoras da escola, sendo que o grupo experimental ficou a cargo da professora responsável pelo estudo e o grupo controle ficou sob a responsabilidade de outra professora.

Os dois instrumentos foram aplicados no início do terceiro bimestre de 1999, antes de ser iniciado o estudo de matrizes. Os sujeitos foram informados que as provas não eram para nota e o sigilo foi garantido a eles.

A aplicação do pré-teste foi coletiva, sendo que os alunos foram orientados a responder as questões com sinceridade. Em seguida, iniciou-se o ensino de matrizes e as aulas sobre esses conceitos duraram aproximadamente um mês. Para o grupo controle, o conteúdo foi apresentado em sua forma final, sendo dadas as definições, o desenvolvimento das fórmulas e os exercícios de fixação. Já para as classes que formavam o grupo experimental, o presente trabalho partiu da convicção de que uma estratégia, adequada para levar os estudantes a uma efetiva aprendizagem dos conceitos de matrizes, deveria iniciar pela investigação dos conceitos espontâneos que pudessem ser úteis para a elaboração de situações-problema sobre matrizes. Verificou-se que a maior parte dos alunos dispunham dos conhecimentos sobre: **a.** conjunto (numéricos, de amigos, brinquedos, parentes, figuras geométricas, etc.); **b.** construção de tabelas (colocação do time de futebol no campeonato estadual, perfil dos alunos da sala de acordo com as preferências por marca de tênis, música, ou ainda tabelas com as notas dos alunos da classe nas diversas disciplinas); **c.** alguns jogos (batalha naval, jogo da velha, dominó, quadrado mágico, etc.).

Além da utilização de situações-problema elaboradas a partir dos conhecimentos dos alunos, algumas dinâmicas foram criadas para introdução dos conceitos: de linha e coluna, de matriz, de elemento de uma matriz, de adição de matrizes, de tipos de matrizes, etc. Inicialmente, organizou-se as carteiras da sala de aula, de forma que não sobrassem nem faltassem carteiras nas fileiras. Selecionou-se, então, os alunos que já conheciam o jogo batalha naval e foi pedido a eles que ocupassem os lugares determinados pela professora (exemplo: A4,B3,C1, etc. que representam: primeira linha quarta coluna, segunda linha terceira coluna e terceira linha primeira coluna respectivamente). Os alunos que não se posicionaram corretamente tiveram que cumprir as tarefas estipuladas pelos colegas. Essas tarefas requeriam dos sujeitos o uso da linguagem: recitar poemas, cantar músicas, contar uma estória pitoresca, definir características pessoais, etc.

Em um segundo momento, estendeu-se a dinâmica aos demais alunos da sala, pois estes, com a ajuda dos colegas, já haviam compreendido a atividade. Alguns conceitos importantes surgiram durante a realização dessas dinâmicas, tais como: o de linha e coluna, de matriz e de elemento de uma matriz, conceitos estes implícitos no jogo. Numa segunda etapa, os alunos tiveram que ocupar os lugares indicados apenas por números (exemplo: 11, 35, 42, etc. que representavam: primeira linha primeira coluna, terceira linha quinta coluna, quarta linha segunda coluna respectivamente). Em seguida, dividiu-se a classe em equipes que eram identificadas por letras e aplicou-se a dinâmica anterior, introduzindo, nesse momento, a notação formal de elemento de uma matriz (exemplo: a_{11}, b_{31}, c_{43}, etc.).

Em uma próxima etapa, com o intuito de introduzir o conceito de soma de matriz organizou-se um grupo de meninos e outro de meninas para formar duas matrizes de mesma ordem. Para a realização desta dinâmica pressupôs-se que os conceitos acima descritos já haviam sido aprendidos pelos alunos. Nos casos em que não houve aprendizagem, a interferência dos próprios colegas juntamente com a da professora responsável permitiu que se pudesse dar continuidade a essa atividade, na qual cada elemento que ocupava uma determinada posição no grupo dos meninos unia-se ao elemento que ocupava a mesma posição no grupo das meninas (exemplo: menina a_{31} com o menino b_{31}), formando uma nova matriz.

Os demais conceitos foram introduzidos com dinâmicas similares às relatadas anteriormente. É importante ressaltar que, além dessas dinâmicas, foram aplicados simultaneamente os procedimentos previamente descritos, bem como, a realização de trabalhos interdisciplinares elaborados com a utilização dos conceitos relativo às áreas técnicas e às matrizes.

As atividades interdisciplinares, podem ser realizadas através de um planejamento comum com outros professores. Isto pode ser feito, por exemplo, em alguns tópicos de Geografia (movimentos migratórios, estudo das populações); de Biologia (genética); de Química (tabela periódica). Também pode ser feito em matérias técnicas, como Processamento de dados (Excel); Publicidade (estudo das cores e do nível de audiência); Eletrônica (circuitos elétricos). Estes exemplos e outros do anexo 4 são úteis na construção de situações-problema para a introdução do conceito de matrizes.

Este estudo, que teve a duração de aproximadamente um mês e meio, partiu do pressuposto de que o professor deve propiciar situações que encorajem a descoberta independente, levando o aluno à superação dos obstáculos didáticos e epistemológicos. Para que ocorra a aprendizagem e para que esta seja duradoura, é necessário que o conceito não seja visto apenas como um objeto formal de estudo, mas sim como um recurso auxiliar para a aprendizagem de outros conceitos mais complexos e uma ferramenta auxiliar para algumas situações.

Os exemplos e exercícios propostos pelos professores devem propiciar a mudança do quadro algébrico para o geométrico e vice-versa, sendo apresentadas sugestões aos alunos para a elaboração de exercícios e comparação de resultados.

Ao final da unidade, tanto no grupo controle quanto no grupo experimental, foram aplicadas as duas provas usadas no pré-teste, que nesse momento, foram usadas como pós-teste.

Esses dois instrumentos foram corrigidos de forma semelhante à correção usada pelas escolas, sendo que a pontuação foi atribuída de acordo com os seguintes critérios: errou ou não respondeu (0 pontos); acertou parcialmente (1 ponto) e acertou totalmente (2 pontos). Na prova 1, a amplitude do intervalo variava de 0 (zero) a 26 (vinte e seis) pontos e na prova 2 variava de 0 (zero) a 34 (trinta e quatro) pontos.

Após a correção das provas, os resultados foram analisados e comparados, usando procedimentos estatísticos. O capítulo que tratará dos resultados vai mostrar, em primeiro lugar, a análise descritiva e, em seguida, as comparações.

Para a análise estatística dos dados, serão utilizados a ANOVA para verificar se há diferença significativa entre as médias de mais de dois grupos e o teste *t de Student* para verificar se há diferença significativa entre as médias de dois grupos independentes ou para verificar diferenças de resultados antes e depois do tratamento. Quando forem consideradas mais de uma variável dependente, será utilizada a ANOVA para verificar as diferenças entre as médias dos grupos e as possíveis interações entre as variáveis dependentes.

Foram analisados também as relações entre as duas provas aplicadas aos sujeitos, a partir do coeficiente de correlação de Pearson. O nível de significância adotado foi $p \leq 0,05$.

CAPÍTULO VI

RESULTADOS E ANÁLISE DOS DADOS

Este estudo teve como sujeitos 105 estudantes de quatro cursos diferentes de uma escola privada, distribuídos da seguinte maneira: (23,8%) Publicidade, (12,4%) Administração, (39,0%) Mecatrônica e (24,8%) Processamento de dados (Figura 1). As idades dos sujeitos variaram de 15 a 18 anos completos (sendo 6 com 15, 72 com 16, 22 com 17 e 5 com 18) com média igual a 16,2 anos, sendo 70 do gênero masculino e 35 do gênero feminino. O grupo experimental foi constituído pelos alunos de Publicidade, Administração e Mecatrônica (n=79) e o grupo controle pelos estudantes do curso de Processamento de dados (n=26).

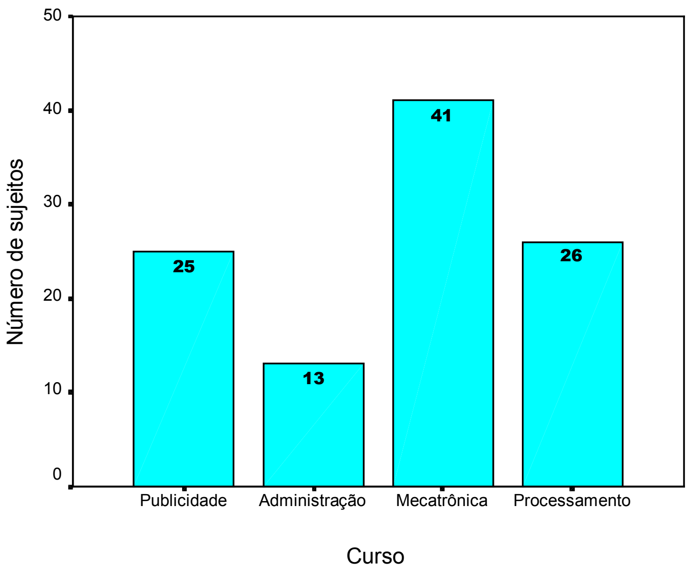


Figura 1 - Distribuição do número de sujeitos de acordo com o curso

A maior parte dos alunos tinha 16 anos e este fato faz supor que não haviam sido reprovados em nenhuma série, já que estavam cursando o 2º ano do ensino médio, isto indica também que poucos alunos estavam adiantados ou atrasados em relação à série que cursavam e que a maioria desconhecia o conteúdo de matrizes.

Para a análise estatística dos dados foram utilizados a *ANOVA* com a finalidade de verificar a existência de diferenças significativas entre as médias dos grupos (quando superiores a 2) e o teste de *Tukey* para verificar as diferenças honestamente significativas (*DHS*) entre os pares de médias. O teste *t de Student* foi utilizado com o objetivo de verificar a existência de diferenças significativas entre as médias de dois grupos independentes ou para verificar diferenças de resultados antes e depois do tratamento dos dados.

Também foram analisadas as relações entre as duas provas aplicadas aos sujeitos (Anexos 5 e 6) usando para isso o coeficiente de correlação de Pearson. Como apontado anteriormente, o nível de significância adotado foi $p \leq 0,05$.

Como já descrito nos procedimentos, a prova I (Anexo 5) chamada, neste estudo, de não formal continha oito questões perfazendo um total de treze itens e a prova II (Anexo 6) chamada de formal continha dez questões com um total de dezessete itens. As duas provas foram corrigidas pela professora responsável pelo estudo, sendo que a pontuação foi atribuída de acordo com os seguintes critérios: errou ou não respondeu (0 pontos); acertou parcialmente (1 ponto) e acertou totalmente (2 pontos). Na prova 1 (não formal), a amplitude do intervalo variava de 0 (zero) a 26 (vinte e seis) pontos e na prova 2 (formal) variava de 0 (zero) a 34 (trinta e quatro) pontos, sendo que as notas foram convertidas para 0 a 10 pontos.

Em um primeiro momento e antes da introdução de qualquer atividade foram aplicadas duas provas, uma não formal (Anexo 5) e outra formal (Anexo 6), que funcionaram como pré-teste do conhecimento dos sujeitos a respeito de matrizes.

A análise desses resultados mostrou que quando os sujeitos foram agrupados de acordo com o curso, não houve diferença significativa de notas médias na prova não formal ($F(3, 101)=1,01$; $p=0,3919$) mas houve diferença significativa nas médias da prova formal ($F(3, 101)=34,39$; $p=0,0002$), o teste das diferenças honestamente significantes de *Tukey* indicou que os alunos do curso de Processamento de Dados (grupo controle) apresentaram uma média significativamente superior a cada um dos outros cursos ($p<0,05$). Esses resultados podem ser melhor visualizados na Tabela 1 e Figuras 2 e 3 a seguir.

Tabela 1 - Estatísticas descritivas das médias obtidas pelos sujeitos, distribuídos de acordo com o curso, no pré-teste formal e não formal, antes da utilização da estratégia de ensino diferenciada para o grupo experimental e antes do ensino para o grupo controle

Tipo de prova	Curso	Número de sujeitos	Média	Desvio Padrão	Erro Padrão	Nota Mínima	Nota Máxima

Pré não formal	Publicidade	25	5,38	0,78	0,16	3,8	6,9
	Administração	13	5,09	1,60	0,44	3,1	7,7
	Mecatrônica	41	5,04	1,01	0,16	1,5	6,5
	Processamento	26	5,46	1,24	0,24	3,5	7,7
	Total	105	5,23	1,11	0,11	1,5	7,7
Pré formal	Publicidade	25	0,26	0,48	0,10	0,0	1,8
	Administração	13	0,63	0,97	0,27	0,0	2,9
	Mecatrônica	41	0,14	0,39	0,06	0,0	1,8
	Processamento	26	2,06	1,28	0,25	0,0	5,3
	Total	105	0,71	1,12	0,11	0,0	5,3

A tabela mostra que os sujeitos, tanto do grupo controle como experimental, conseguiram médias melhores no pré-teste não formal em relação ao formal. Isso pode ter ocorrido porque a maioria das questões da prova não formal abordaram conhecimentos que os alunos provavelmente já possuíam (conceitos espontâneos) e também porque o conteúdo relativo as questões da prova formal ainda não havia sido abordado.

Os conjuntos de resultados exibidos na tabela 1, podem ser visualizados na figura 3 e 4 a seguir:

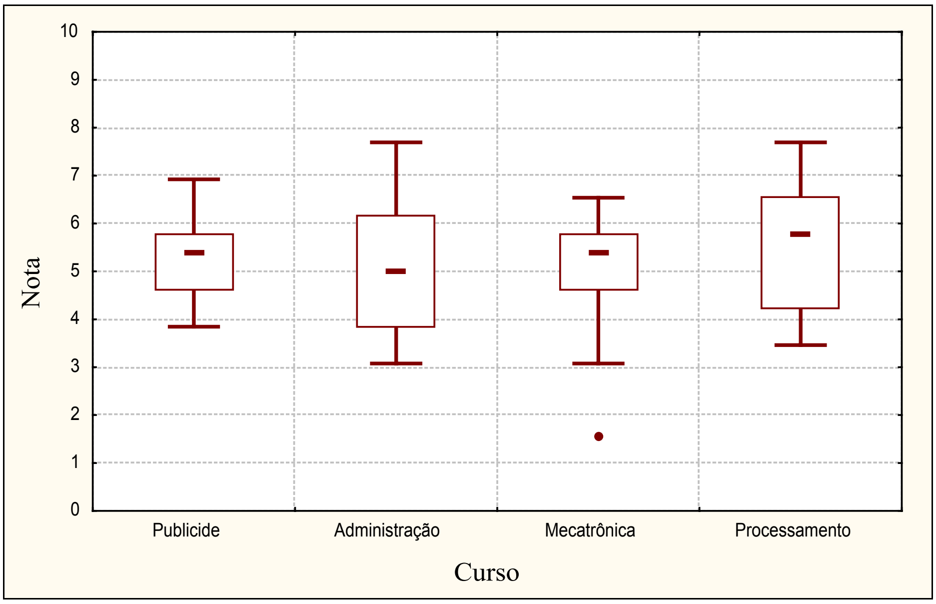


Figura 2 - *Box-plot* das médias dos sujeitos na prova não formal, por curso, antes da utilização da estratégia de ensino diferenciada para o grupo experimental e antes do ensino para o grupo controle

A figura 2 mostra que os sujeitos, tanto do grupo controle como do experimental, obtiveram médias que variavam de 5 a 6 na prova não formal, sendo que os alunos de processamento de dados que representam o grupo controle conseguiram média ligeiramente superior aos demais alunos que compunham o grupo experimental.

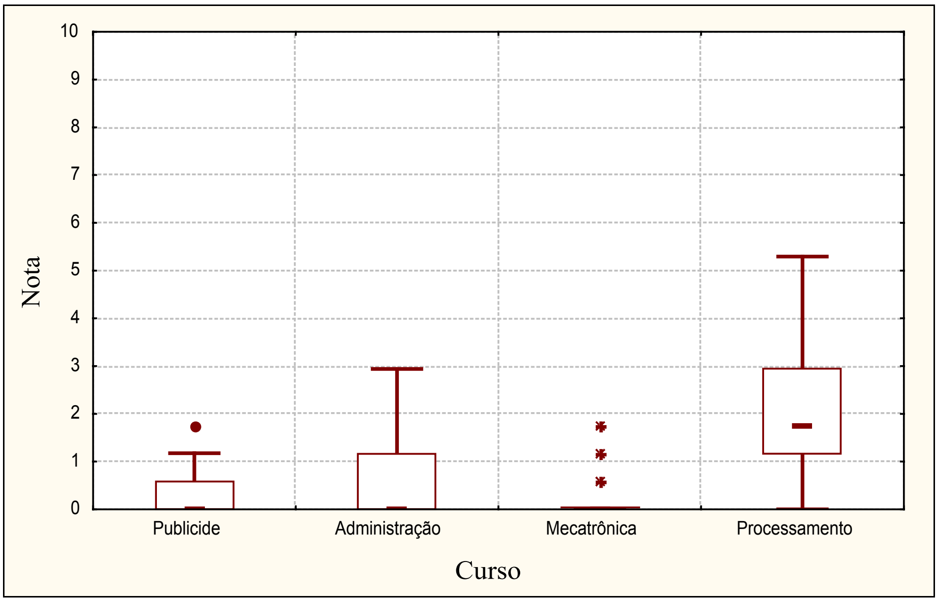


Figura 3 - *Box-plot* das médias dos sujeitos na prova formal, por curso, antes da utilização da estratégia de ensino diferenciada para o grupo experimental e antes do ensino para o grupo controle

A figura 3 mostra que os sujeitos do grupo controle (curso de processamento de dados) obtiveram média significativamente superior aos demais alunos do grupo experimental na prova formal.

Para a análise das diferenças entre os grupos controle e experimental antes da utilização da estratégia diferenciada de ensino considerou-se os cursos de Publicidade, Administração e Mecatrônica como grupo experimental e o curso de Processamento de Dados como grupo controle.

Os resultados da ANOVA indicaram que não haviam diferenças significativas nas médias da prova não formal ($F(1,103)=1,46$; $p=0,2296$) mas que haviam diferenças significativas nas médias da prova formal ($F(1,103)=97,82$; $p<0,0001$), indicando que o grupo experimental apresentou, para a prova formal, uma média significativamente inferior ao do grupo de controle antes da utilização da estratégia diferenciada de ensino, conforme dados apresentados na Tabela 2 e Figura 4 a seguir.

Tabela 2 - Médias e desvio padrão dos sujeitos por tipo de prova e grupo, antes da utilização da estratégia de ensino diferenciada para o grupo experimental e antes do ensino para o grupo controle

Tipo de Prova	Grupo	Número de sujeitos	Média	Desvio Padrão	Erro Padrão da Média
Pré não formal	Controle	26	5,46	1,24	0,24
	Experimental	79	5,16	1,06	0,12
Pré formal	Controle	26	2,06	1,28	0,25
	Experimental	79	0,26	0,57	0,06

Os grupos controle e experimental, quando da aplicação do pré-teste, não tinham conhecimento do conteúdo da prova formal, portanto, o desempenho dos grupos deveria ser similar, o que não ocorreu.

Os resultados exibidos na tabela 2, podem ser visualizados na figura 4, a seguir, onde pode ser constatato que a média do grupo controle na prova não formal era 5,46 enquanto que na prova formal era 2,06.

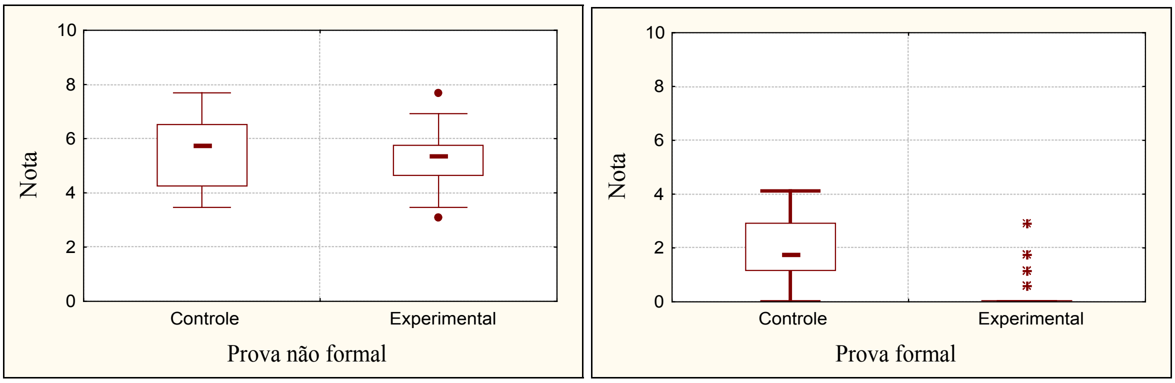


Figura 4 - *Box-plot* das médias dos sujeitos nas provas não formal e formal, por grupo, antes da utilização da estratégia de ensino diferenciada para o grupo experimental e antes do ensino para o grupo controle

Após a utilização da estratégia diferenciada de ensino pode ser constatado que houve uma melhora significativa no desempenho dos sujeitos do grupo experimental na solução dos problemas contidos nas provas matemáticas: não formal ($F(1,103)=19,43$; $p<0,05$) e formal ($F(1,103)=26,18$; $p<0,05$), como também para o grupo controle, conforme dados apresentados na Tabela 3 e na Figura 5.

Tabela 3 - Médias e desvio padrão dos sujeitos por tipo de prova e grupo após a utilização da estratégia de ensino diferenciada para o grupo experimental e após o ensino para o grupo controle

Tipo de Prova	Grupo	Número de sujeitos	Média	Desvio Padrão	Erro Padrão da Médio
Pós não formal	Controle	26	6,04	0,84	0,16
	Experimental	79	7,06	1,09	0,12
Pós formal	Controle	26	3,05	1,67	0,33
	Experimental	79	5,56	2,30	0,26

O conjunto de resultados exibidos na tabela 3, podem ser visualizados na figura 5.

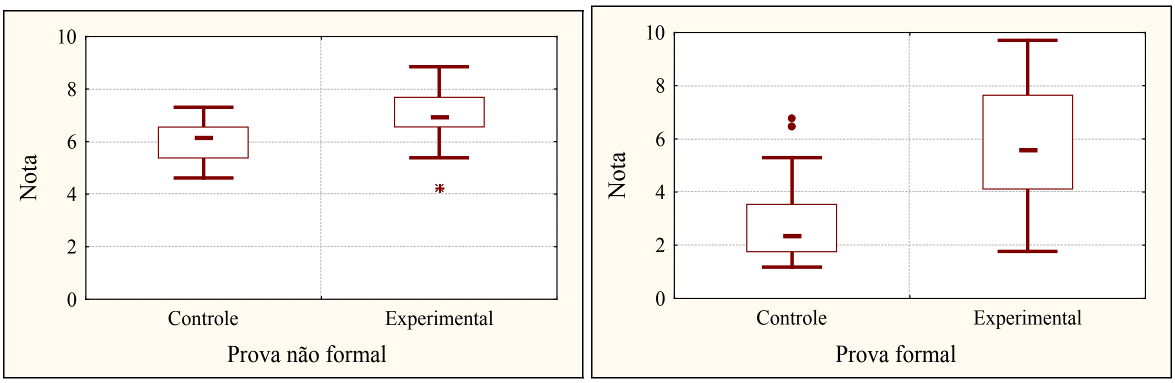


Figura 5 - *Box-plot* das médias dos sujeitos nas provas não formal e formal, por grupo, após a utilização da estratégia de ensino diferenciada para o grupo experimental e após o ensino para o grupo controle

Os alunos do grupo experimental tiveram uma melhora significativa, tanto na prova não formal quanto na prova formal, o que parece evidenciar que os conceitos espontâneos atuam como um "trampolim" para a aquisição dos conceitos científicos e que os conceitos científicos fornecem estruturas para o desenvolvimento ascendente dos conceitos espontâneos (Vygotsky,1987). Segundo a teoria de Ausubel e outros (1980), os alunos realizam uma aprendizagem significativa quando podem relacionar o novo material de aprendizagem com aquilo que já sabem, pois segundo Vergnaud (1991) um conceito não existe isoladamente mas depende de muitos outros conceitos subordinados ou superordenados (Campos Conceituais).

A tabela 4 apresenta as diferenças entre os grupos (controle e experimental), entre os testes (pré e pós) e entre os tipos de prova (não formal e formal), bem como as diferenças entre grupo e teste (pré e pós), grupo e tipo de prova (não formal e formal) e teste (pré e pós e tipo de prova).

Tabela 4 - Resumo da Análise de Variância (ANOVA)

Efeito	Variáveis	Efeito		Erro			
		Gl[1]	Quadrado Médio	gl	Quadrado Médio	F	p
Principal	Grupo (controle, experimental)	1	10,08	103	2,55	3,55	0,0624
	Teste (Pré, Pós)	1	377,21	103	1,77	213,16	0,0000 *
	Tipo (Não formal, Formal)	1	798,53	103	1,50	531,80	0,0000 *
Interação	Grupo e Teste (pré e pós)	1	155,43	103	1,77	87,84	0,0000 *
	Grupo e Tipo (não formal, formal) de prova	1	0,0013	103	1,50	0,0009	0,9766
	Teste (pré e pós) e Tipo de prova	1	71,05	103	1,53	46,54	0,0000 *
	Grupo, Teste(pré e pós) e Tipo de prova	1	43,27	103	1,53	28,34	0,0000 *

[1] Graus de liberdade * valores significativos (p<0,05)

A partir dos dados apresentados na Tabela 4 e Figura 6, percebe-se que ao considerar para o cálculo das médias as notas das provas pré não formal e pré formal mais as notas das provas do pós não formal e pós formal, não houve diferença significativa nas médias obtidas pelos sujeitos do grupo de controle (M=4,15) e experimental (M=4,51). No entanto, houve diferença significativa nas médias antes e após a utilização da estratégia de ensino diferenciada e também entre os tipos de prova não formal e formal. Isto pode ser observado ao se considerar para o cálculo das médias as notas obtidas: **a.** nas provas pré não formal mais pré formal para o grupo controle (M=3,76) e para o experimental (M=2,71); **b.** nas provas pós não formal mais pós formal para o grupo controle (M=4,54) e para o experimental (M=6,31); **c.** nas provas pré mais pós não formal (M=5,75) para o grupo controle e (M=6,11) para o grupo experimental e nas provas pré mais pós formal (M=2,55) para o grupo controle e M(2,91) para o grupo experimental.

Os resultados da tabela 4 que estabelecem a diferença entre os grupos (controle e experimental) e tipo de prova (não formal e formal) podem ser visualizados na figura 6.

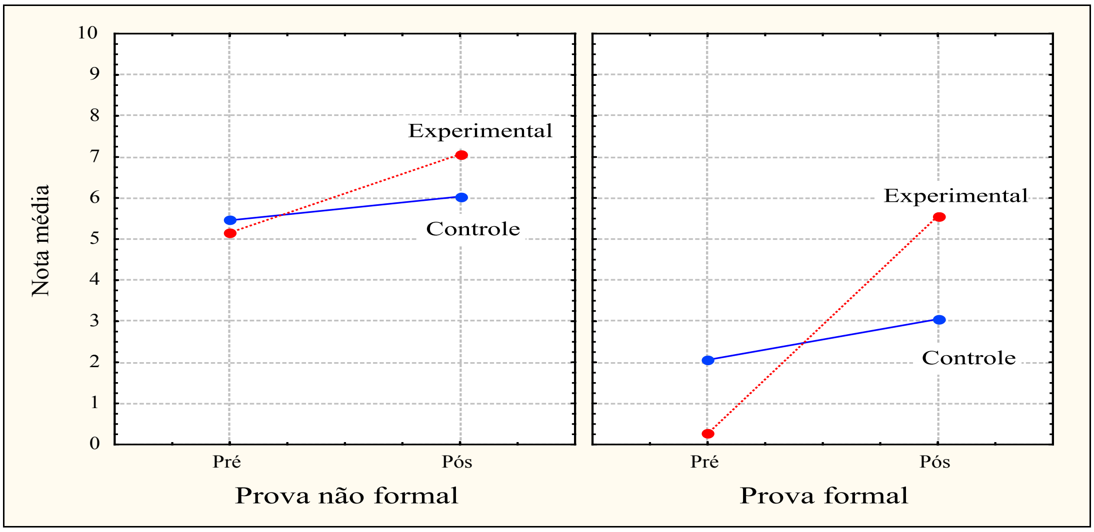


Figura 6 - Médias dos sujeitos por tipo de prova antes e após a utilização da estratégia de ensino diferenciada no grupo experimental e antes e após o ensino para o grupo controle

Observa-se também que as médias dos grupos controle e experimental são dependentes da aplicação das provas (pré e pós), e também do tipo de prova (não formal e formal). Tanto na prova não formal quanto na prova formal as médias dos sujeitos na segunda aplicação (pós) foram significativamente superiores às médias da primeira aplicação (pré). Vale ressaltar que o grupo experimental (com a utilização da estratégia de ensino diferenciada) apresentou uma média menor que o grupo de controle na primeira aplicação das provas e bem superior na segunda aplicação, indicando que a utilização da estratégia diferenciada contribuiu com o aprendizado do aluno. Esses resultados apontam que a utilização de uma estratégia diferenciada de ensino, pode ter facilitado a aquisição dos conceitos, pois sem ela poderia não ter ocorrido incremento significativo de desempenho dos sujeitos, na solução dos problemas contidos nas provas matemáticas. Entretanto, para uma confirmação dos resultados o estudo precisaria ser repetido em condições mais controladas.

Os resultados da tabela 4 que estabelecem as diferenças entre os grupos (controle e experimental) e a aplicação do teste (pré e pós) podem ser visualizadas na figura 7.

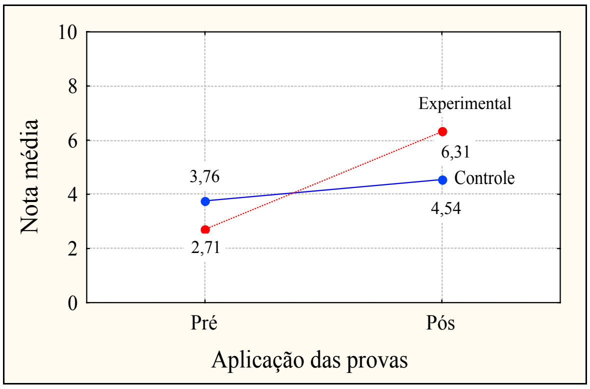


Figura 7 - Médias dos sujeitos antes e após a utilização da estratégia de ensino diferenciada para o grupo experimental e antes e após o ensino para o grupo controle por grupo e tipo de prova

A figura 7 indica que os sujeitos, tanto do grupo controle quanto do experimental, melhoraram o seu desempenho na solução dos problemas matemáticos. Isso pode ser devido, em parte, ao fato de que o ensino de matrizes não havia sido iniciado quando da aplicação do pré teste e que já havia sido completado na aplicação do pós teste. Embora os dois grupos tenham melhorado, o desempenho do grupo experimental foi mais significativo. Acredita-se que este fato seja resultado da assimilação dos conceitos de matrizes, pois segundo Ausubel e outros (1980) assimilar um novo conceito consiste em relacioná-lo a outros formados anteriormente e já existentes na estrutura cognitiva dos sujeitos.

Na figura 8 procurou-se verificar as médias dos sujeitos como um todo (grupo controle mais experimental) em relação aos testes (pré e pós) e aos tipos de prova (não formal e formal).

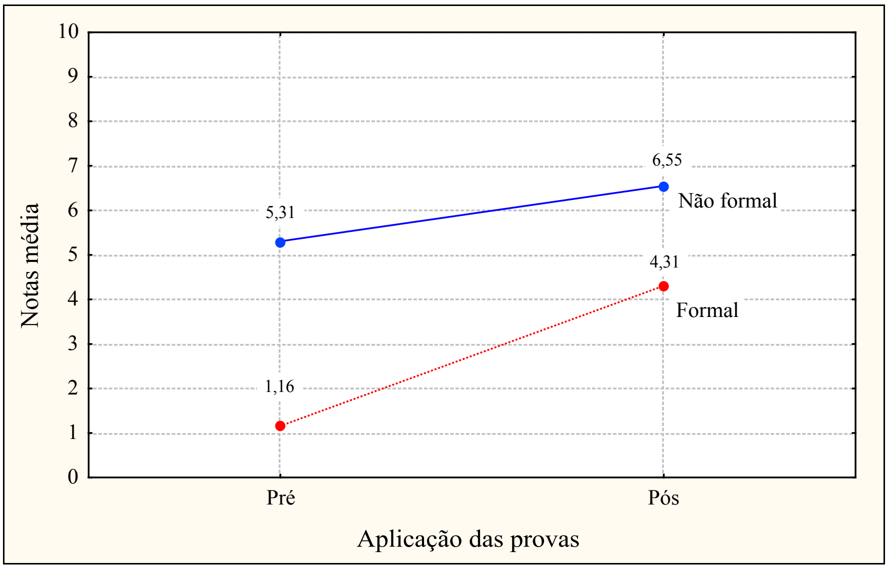


Figura 8 - Médias dos sujeitos antes e após o ensino dos conceitos de matrizes por tipo de prova.

Da figura 8 observa-se que houve um incremento nas notas do pós-teste sendo isso esperado pois a instrução foi responsável pela melhoria do desempenho de todos os sujeitos do estudo tanto na prova não formal quanto na prova formal.

Neste estudo partiu-se da hipótese de que os alunos que obtiveram desempenho favorável nas questões 1,4 e 5 da prova não formal, que abordavam conhecimentos prévios, iriam obter desempenho igualmente favorável na solução dos problemas contextualizados 5,6,7,8 e 9 da prova formal.

Tabela 5 - Médias e desvio padrão por tipo de prova (não formal, formal) aplicação das provas (pré e pós) e grupo (controle e experimental)

Questões por tipo de prova	Teste	Grupo	Número de sujeitos	Média das Notas	Desvio Padrão

Questões 1, 4 e 5 da prova não formal	Pré	Controle	26	8,56	2,26
		Experimental	79	8,85	2,16
		Total	105	8,77	2,18
	Pós	Controle	26	9,52	1,23
		Experimental	79	9,51	1,36
		Total	105	9,51	1,33
Questões por tipo de prova	Teste	Grupo	Número de Sujeitos	Média das Notas	Desvio Padrão
Questões 5, 6, 7, 8 e 9 da prova formal	Pré	Controle	26	0,71	1,11
		Experimental	79	0,36	1,18
		Total	105	0,45	1,16
	Pós	Controle	26	1,26	1,68
		Experimental	79	4,80	3,07
		Total	105	3,92	3,18

Os dados apresentados na tabela 5 e 6 apontam que houve uma diferença significativa entre as médias dentro de cada grupo e entre os grupos. O desempenho dos sujeitos diferiu significativamente entre os tipos de prova (não formal e formal), os testes das provas (pré e pós) e o grupo (controle e experimental). Os resultados indicaram que, tanto no grupo de controle como no grupo experimental, os sujeitos não obtiveram o mesmo desempenho em relação aos tipos de provas.

Através da análise da tabela 6, procurou-se verificar se os alunos que obtiveram um bom desempenho nas questões 1,4 e 5 da prova não formal conseguiram, também, um bom resultado na solução das questões 5,6,7,8 e 9.

Tabela 6 - Resumo da Análise de Variância (ANOVA) das médias dos sujeitos nas questões 1, 4 e 5 da prova não formal e questões 5, 6, 7, 8 e 9 da prova formal

Efeito	Variáveis	Efeito	Erro

		Gl 1	Quadrado Médio	gl	Quadrado Médio	*F*	*p*
Principal	Grupo (controle, experimental)	1	58,62	103	5,15	11,37	0,0011
	Teste (Pré, Pós)	1	4195,73	103	3,39	1238,82	0,0000
	Tipo (Não formal, Formal)	1	214,00	103	3,32	64,38	0,0000
Iteração	Grupo e Teste (pré e Pós) da prova	1	41,33	103	3,39	12,20	0,00070
	Grupo e Tipo de prova (não formal e formal)	1	63,13	103	3,32	18,99	0,00003
	Teste (pré e pós) e Tipo de prova (não formal e formal)	1	55,30	103	3,84	14,39	0,00025
	Grupo, Teste (pré e pós) e Tipo (não formal e formal)	1	85,73	103	3,84	22,30	0,00001

Verifica-se pela tabela 6, que os alunos dos grupos controle e experimental que apresentaram melhor desempenho nas questões 1, 4 e 5 da prova não formal, e que provavelmente possuíam conhecimentos espontâneos ou prévios relacionadas ao seu cotidiano (quadrado mágico, batalha naval, trilha) não apresentaram o mesmo desempenho nas questões 5, 6, 7, 8 e 9 da prova formal que abordavam problemas contextualizados de matrizes e problemas que envolviam outros conteúdos, mas que podiam ser solucionados através dos conceitos de matrizes.

O coeficiente *r* de correlação de *Pearson* indicou que a correlação entre as médias nas questões selecionadas por tipo de prova (questões 1, 4 e 5 da prova não formal e a média das questões 5, 6, 7, 8 e 9 da prova formal), não foi significativa, nem para o grupo controle nem para o grupo experimental, antes e depois da utilização da estratégia diferenciada de ensino. Isso mostra que os alunos que obtiveram melhor desempenho nas questões 1, 4 e 5 da prova não-formal, não obtiveram o mesmo desempenho nas questões 5,6,7,8 e 9 da prova formal, sendo que para o grupo experimental foram obtidos os seguintes resultados: comparação entre os resultados das provas não-formal e formal no pré teste (r=0,166; p=0,1428) e prova não formal e formal no pós teste (r=0,048; p=0,6776) e para o grupo de controle os resultados foram os seguintes: comparação entre os resultados das provas não formal e formal no pré teste (r=0,286; p=0,1563) e não formal e formal no pós teste (r=-0,040; p=0,8466).

Estes resultados permitiram afirmar que uma melhora no desempenho na solução dos problemas que envolviam outros conteúdos e que exigiam uma transposição dos conceitos aprendidos não dependeu apenas da formação de alguns conceitos espontâneos, pois como observaram alguns autores (Carretero e Garcia Madruga,1984; Pérez,1990) os procedimentos utilizados na solução de problemas depende tanto do tipo de conhecimento anterior que o sujeito possui, quanto das características do conteúdo ao qual esses problemas se aplicam.

A figura 9 permite visualizar o desempenho dos sujeitos nas questões 5,6 e 7 (questões essas que envolvem problemas contextualizados de matrizes) antes e após a utilização da estratégia diferenciada de ensino.

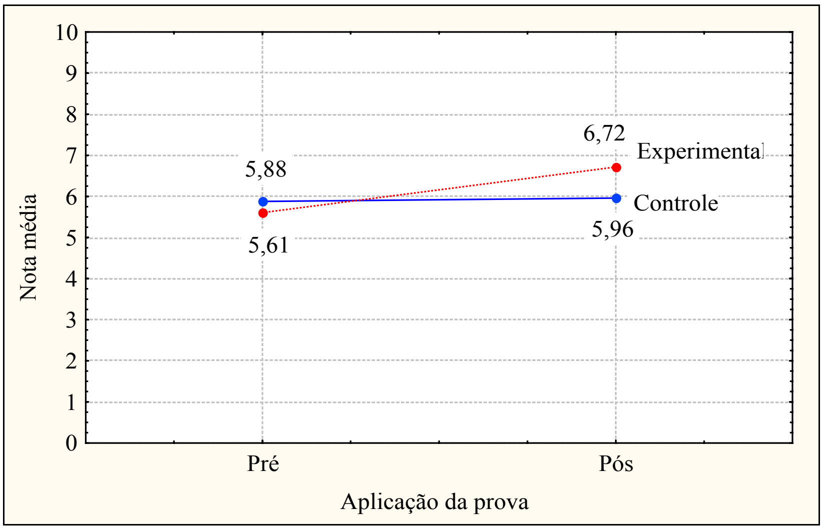


Figura 9 - Médias nas questões 5, 6 e 7 da prova formal por grupo, antes e após a utilização da estratégia diferenciada de ensino para o grupo experimental e antes e após o ensino para o grupo controle

A partir dos resultados da análise de variância das médias dos sujeitos nas questões 5, 6 e 7 da prova formal pode-se observar que houve uma melhoria significativa no desempenho do grupo experimental depois da utilização da estratégia de ensino diferenciada ($F(1,103)=4,79$; $p=0,0309$). Esses resultados indicaram que existe efeito da utilização da estratégia no grupo experimental na aplicação das provas (pré e pós). A Figura 9 mostra que o grupo experimental teve uma melhora mais significativa na solução das provas matemáticas que o grupo controle.

A análise correlacional a seguir foi realizada com o objetivo de verificar se os sujeitos que obtiveram um melhor desempenho nas questões 5, 6 e 7 da prova formal também obtiveram melhor desempenho nas questões 8, 9 e 10 da mesma prova. O coeficiente *r* de correlação de Pearson indicou que existe uma relação linear significativamente diferente de zero entre as notas dos sujeitos nos dois grupos de questões, após a utilização da estratégia diferenciada de ensino (r=0,393; p=0,0003). Isso pode indicar que os sujeitos do grupo experimental conseguiram fazer a transposição do conhecimento de matrizes para solucionar problemas que envolvem outros conteúdos, já que antes da utilização da estratégia diferenciada de ensino esta relação não foi significativa (r=-0,036; p=0,7532).

Um outro ponto de interesse nessa pesquisa foi verificar se, na questão 6, os sujeitos que completaram a seqüência em termos de representação, conseguiram ou não explicar o que fizeram. Nesse sentido, os dados foram agrupados em tabelas de dupla entrada (tabelas 07, 08, 09 e 10).

Tabela 07 - Número e porcentagem de acertos nas questões 6a, 6b e 6c da prova não formal antes do ensino do conteúdo de matrizes no grupo de controle

Item da Questão 6	Resultado	Resultado da questão 6a: Não fez ou errou	Resultado da questão 6a: Acertou total ou parcialmente	Total	χ^2 (1)	*p*
Item b	Não fez ou errou	5 (19 %)	13 (50 %)	18 (69 %)		
	Acertou ou Acertou parcialmente	1 (4 %)	7 (27 %)	8 (31 %)		
	Total	6 (23 %)	20 (77 %)	26(100%)	0,7282	0,3935
Item c	Não fez ou errou	6 (23 %)	13 (50 %)	19 (73 %)		
	Acertou ou Acertou parcialmente	0 (0 %)	7 (27 %)	7 (27 %)		
	Total	6 (23 %)	20 (77 %)	26(100%)	2,8737	0,0900

Tabela 08 - Número e porcentagem de acertos nas questões 6a, 6b e 6c da prova não formal antes da utilização da estratégia diferenciada de ensino no grupo de experimental

Item da Questão 6	Resultado	Resultado da questão 6a: Não fez ou errou	Resultado da questão 6a: Acertou total ou parcialmente	Total	χ^2 (1)	*p*
Item b	Não fez ou errou	30 (38 %)	31 (39 %)	61(77 %)		
	Acertou ou Acertou parcialmente	2 (3 %)	16 (20 %)	18 (23 %)		
	Total	32 (41 %)	48 (59 %)	79(100%)	8,36	0,0038
Item c	Não fez ou errou	31 (39 %)	37 (47 %)	68 (86 %)		
	Acertou ou Acertou parcialmente	1 (1 %)	10 (13 %)	11 (14 %)		
	Total	32 (40 %)	47 (60 %)	79(100%)	5,23	0,0222

Tabela 09 - Número e porcentagem de acertos nas questões 6a, 6b e 6c da prova não formal <u>após</u> o ensino do conteúdo de matrizes no grupo de <u>controle</u>

Item da Questão 6	Resultado	Resultado da questão 6a: Não fez ou errou	Resultado da questão 6a: Acertou total ou parcialmente	Total	χ^2 (1)	*p*
Item b	Não fez ou errou	8 (31 %)	7 (27 %)	15 (58 %)		
	Acertou ou Acertou parcialmente	1 (4 %)	10 (38 %)	11 (42 %)		
	Total	9 (35 %)	17 (65 %)	26(100%)	5,49	0,0192
Item c	Não fez ou errou	7 (27 %)	12 (46 %)	19 (73 %)		
	Acertou ou Acertou parcialmente	2 (8 %)	5 (19 %)	7 (27 %)		
	Total	9 (35 %)	17 (65 %)	26(100%)	0,15	0,6942

Tabela 10 - Número e porcentagem de acertos nas questões 6a, 6b e 6c da prova não formal <u>após</u> da utilização da estratégia diferenciada de ensino no grupo de <u>experimental</u>

	Resultado	Resultado da questão 6a	Total	*p*

Item da Questão 6	Resultado	Resultado da questão 6a		Total	χ^2 (1)	p
Item da Questão 6		Não fez ou errou	Acertou total ou parcialmente		χ^2 (1)	
Item b	Não fez ou errou	7 (9 %)	46 (58 %)	53 (67 %)		
	Acertou ou Acertou parcialmente	3 (4 %)	23 (29 %)	26 (33 %)		
	Total	10 (13 %)	69 (87 %)	79(100%)		
	Não fez ou errou	9 (11 %)	36 (46 %)	45 (57 %)		
	Acertou ou Acertou parcialmente	1 (1 %)	33 (42 %)	34 (43 %)		
	Total	10 (12 %)	69 (88 %)	79(100%)		

Da análise das tabelas 7,8,9 e 10 verifica-se que os resultados revelaram uma diferença significativa entre as respostas do *item a* e do *item b* antes da utilização da estratégia diferenciada de ensino (χ^2(1)=8,36 p=0,0038). Todavia, os dados não indicaram diferença significativa entre essas respostas após a utilização dessa estratégia (χ^2(1)=0,04 p=0,8339), isto é, com a utilização da estratégia diferenciada de ensino os alunos do grupo experimental contribuíram para aumentar o percentual de acertos no *item b,* independentemente, do acerto ou não no *item a*. Já para o grupo controle, com relação as respostas do *item a* e do *item b* antes e após o ensino do conteúdo de matrizes, pode-se verificar que houve diferença: antes (χ^2(1)=0,7282 p=0,3935) e após (χ^2(1)=5,49 p=0,0192) isto indica que o ensino de matrizes para o grupo controle não contribuiu para aumentar o percentual de acertos do item b.

Foram observados, também, resultados independentes entre as respostas dos itens *a* e *c* da *questão 6*, tanto antes (χ^2(1)=5,23 p=0,0222) quanto após a utilização da estratégia diferenciada de ensino (χ^2(1)=5,10 p=0,0240), independente do acerto ou erro no *item c*.

Com relação aos resultados entre as respostas dos itens a e c da *questão 6* para o grupo controle, verifica-se que houve diferença: antes (χ^2(1)=2,8737 p=0,0900) e após (χ^2(1)=0,15 p=0,6942).

Na *questão 6a* o aluno deveria completar uma seqüência através da representação pictórica explicando como fez, já na *questão 6b* o sujeito teria que responder quantos elementos foram acrescidos para completar a seqüência e na questão 6c deveria explicar o que a figura A tinha em comum com a figura B e o que elas tinham de diferente. Os resultados encontrados no pré-teste e no pós-teste do grupo experimental, no que se refere a essas questões, podem indicar que as dinâmicas utilizadas, na estratégia diferenciada de ensino, interferiram no desempenho dos sujeitos, pois os alunos eram constantemente questionados sobre elas, com o objetivo de trabalhar a linguagem, pois de acordo com Ausubel e outros (1980) a linguagem é um componente facilitador tanto da solução de problemas quanto da formação dos conceitos. Contudo, para que se confirmasse esse resultado seria necessário que o estudo fosse aplicado mais vezes com outros sujeitos.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES E IMPLICAÇÕES DO ESTUDO

O presente estudo fundamentou-se na aprendizagem significativa entendida como um processo pelo qual o aprendido é produto da nova informação, interpretada de acordo com os conhecimentos prévios. Assim, os novos conceitos são assimilados ou integrados aos conhecimentos anteriores.

Os resultados obtidos, permitiram concluir que uma estratégia diferenciada de ensino que se fundamente na aprendizagem significativa dando ênfase a formação dos conceitos e a solução de situações-problema que ativem os conhecimentos prévios relacionado-os ao conteúdo conceitual pode alcançar sucesso. Segundo Ausubel e outros (1980, p. 72) (...) *os conceitos constituem a "matéria-prima" tanto para a aprendizagem receptiva significativa como para a generalização das proposições significativas para solução de problemas.*

Em relação a aprendizagem em sala de aula Brito (2001, p. 83) considerou que:

> *A escola deve sistematizar o ensino de conceitos de forma a adequá-los à capacidade cognitiva dos estudantes, estruturando-o de acordo com os princípios de inclusão nas classes, dependência entre os conceitos e as relações entre eles. Além disso, tais atividades podem ser formuladas levando em consideração os seguintes atributos definidores dos conceitos: aprendibilidade, utilidade, validade, generalidade, importância, estrutura, perceptibilidade e numerosidade de exemplos, sendo estes atributos os determinantes da maneira como se dará a aprendizagem.*

Durante o processo de planejamento e desenvolvimento do presente estudo, procurou-se, ao ensinar o conceito de matrizes: **a.** buscar as várias concepções formuladas pelos teóricos cognitivistas; **b.** destacar a importância dos processos e estados internos do organismo (estrutura cognitiva existente, desenvolvimento e capacidade intelectual); **c.** destacar a importância da informação enquanto elemento fundamental para o conceito em pauta e a sua disponibilidade; **d.** explorar situações-problema que envolvessem conhecimento prévio dos alunos e outros conteúdos (geometria, análise combinatória, vetores, gráficos finitos, etc.) para os quais os conceitos de matrizes estudados fossem relevantes; **e.** considerar o papel dinâmico e ativo que os estudantes desempenham no processo ensino-aprendizagem; **f.** orientar o ensino mediante uma estratégia que combine e ordene exemplos, tanto positivos quanto negativos, diversificando-os para sua posterior solidificação; **g.** possibilitar relações sociais (trabalhos e dinâmicas em grupo); **h.** desenvolver a metacognição (produto da reflexão sobre os processos de solução de problemas) como também o uso de técnicas e de algorítmos necessários; **i.** atribuir ao professor um papel ativo e intervencionista de modo a gerar desafios (conflitos) através de atividades dirigidas e trabalhos em grupo, com o objetivo de levar os alunos que estavam no nível (x) a alcançar um nível mais elevado (x+1), ou seja, possibilitar aos alunos através de situações desafiadoras ir além dos patamares usuais.

De acordo com Vygotsky (1988) o professor deveria mediar a aquisição de significados socialmente compartilhados, interferindo na Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) dos alunos para provocar avanços que, espontaneamente, não iriam ocorrer. O caminho adequado e desejável é aquele no qual o ensino se antecipa ao desenvolvimento impulsionando o indivíduo para frente, em direção à aprendizagem significativa.

A estratégia diferenciada de ensino proposta difere, em alguns aspectos, daqueles propostos em alguns livros didáticos, nos quais os conceitos são apresentados formalizados, a organização do conteúdo é fechada e em sua forma final, os exemplos utilizados são puramente algébricos sem aplicações práticas, seguidos de exercícios de fixação do tipo fechado e os problemas propostos como desafio seguem o mesmo esquema.

Os problemas propostos na estratégia diferenciada de ensino, com base nos aspectos teóricos previamente apresentados, tiveram por objetivo ativar os conhecimentos prévios (quadrado mágico, batalha naval, jogo da velha, entre outros) relacionado-os ao conteúdo conceitual de matrizes. Procurou-se utilizar esse conhecimento anterior de forma tal que estes agissem como "pontes" cognitivas facilitando a aquisição dos conceitos científicos relacionados ao conteúdo de matrizes.

Isso estaria compatível com o exposto por Ausubel e outros (1980), para quem os conceitos relevantes presentes na estrutura cognitiva, atuam como facilitadores da aprendizagem significativa de novos conceitos. Para esses autores, o fator isolado que mais influencia a aprendizagem do aluno é aquilo que ele já sabe, isto é, a experiência passada desempenha um papel preponderante nas novas aquisições.

As dinâmicas, as atividades e os trabalhos em grupo propostos nessa estratégia tiveram por objetivo alterar possíveis concepções errôneas por parte dos alunos, com relação aos conceitos de matrizes estudados (posição, elemento, linha, coluna, tipos e propriedades), pois são os "erros" e as diferentes soluções que possibilitam elementos para novas abordagens e intervenções didáticas. Pode-se assim intervir na Zona de Desenvolvimento Proximal dos alunos, ou seja, intervir na região onde os conhecimentos são mais frágeis, porém presentes e implícitos.

Pozo (1998 a, p. 239) apontou a necessidade de *identificar estratégias didáticas que estimulem a mudança conceitual nos alunos. Para isso, a idéia fundamental que assumem os diversos modelos de mudança conceitual é que a aprendizagem de conceitos científicos deve partir dos conceitos naturais que o aluno já possui: a "ciência intuitiva".*

Caberia aos professores propiciarem condições instrucionais para que ocorra uma mudança dos conceitos espontâneos para os conceitos cientificamente corretos, pois mediante a instrução é possível construir-se os conceitos científicos.

Procurou-se, neste estudo, através da estratégia diferenciada de ensino possibilitar a ocorrência de respostas adaptativas, de maneira que os conceitos estudados pudessem integrar o sistema de conhecimentos dos sujeitos.

Considerou-se neste estudo que uma estratégia diferenciada de ensino, que tem por objetivo a formação dos conceitos científicos, não deve ignorar os pressupostos teóricos de Vergnaud (1991), pois segundo ele, um conceito não se desenvolve isolado, mas em inter-relação com outros conceitos através de vários tipos de problemas e com a ajuda de várias expressões e simbolismos.

Dos escritos de Vergnaud (1991) depreende-se que, quando são utilizadas situações-problema na formação de conceitos, deve-se, dentre outros fatores, considerar **a.** que uma situação-problema não envolve todas as propriedades de um conceito; **b.** que uma situação-problema, geralmente, envolve vários conceitos; **c.** os conceitos que o aluno possui para resolver uma situação-problema e sua competência para resolvê-lo; conceitos estão associados ao significante (símbolos, teoremas, concepção), enquanto a competência relaciona-se com o significado (propriedades, esquemas e os teorema-em-ação que são um caminho para que se analise as estratégias intuitivas dos estudantes e se faça um diagnóstico melhor de seus conhecimentos).

As contribuições de Vergnaud, bem como de Vygotsky e Ausubel embasaram este estudo, que originou-se da reflexão sobre as práticas em sala de aula no que concerne ao estudo dos conceitos de matrizes. Essa reflexão conduziu ao desenvolvimento de uma estratégia diferenciada de ensino que buscou superar as lacunas existentes entre a teoria e a prática docente.

Elliott (1993) e outros autores acreditam que a pesquisa-ação deva ser a base para que se possa melhorar a ação prática dos professores. Ela pressupõe a busca de estratégias de mudança e transformação que tenham por objetivo melhorar a atividade educativa.

Frid (2000, p.31) afirmou que (...) *apesar dos dilemas inerentes à pesquisa-ação, os professores de Matemática têm que continuar a explorar como idéias, estruturas e práticas podem informar e influenciar o que nós somos e o que nós fazemos, como também o que nossos estudantes aprendem.*

No presente trabalho foram estudados 105 estudantes do 2º ano provenientes de vários cursos (publicidade, administração, mecatrônica e processamento de dados), separados em grupo experimental e controle, com idades entre 15 a 18 anos. Foram aplicados no pré teste dois instrumentos chamados de teste formal e não formal. Em seguida os alunos do grupo experimental (publicidade, administração, mecatrônica) foram submetidos a uma intervenção com dinâmicas de grupo, utilização de situações-problema elaboradas a partir dos conhecimentos anteriores dos alunos, realização de atividades e trabalhos interdisciplinares, enquanto que para os sujeitos do grupo controle (processamento de dados) o conteúdo foi apresentado em sua forma final. Por último, os instrumentos foram novamente aplicados aos dois grupos (pós-teste).

A análise dos resultados mostrou que no pré-teste não havia diferença significativa nas médias da prova não formal que solicitava o uso de conceitos espontâneos para os grupos controle e experimental, contudo havia diferenças significativas nas médias da prova formal que solicitava o uso de conceitos científicos para os grupos controle e experimental, indicando que antes do ensino de matrizes o grupo controle obteve melhor desempenho na prova formal pois os sujeitos desse grupo, assim como os do grupo experimental, ainda não tinham conhecimento do conteúdo da prova formal. Seriam necessários estudos mais controlados, envolvendo os sujeitos desse curso, que permitissem verificar se são sujeitos com habilidades diferenciadas ou não.

Os sujeitos do grupo experimental no pré-teste apresentaram uma média menor em comparação aos sujeitos do grupo controle nas provas não formal e formaL, contudo no pós-teste, após a utilização da estratégia diferenciada de ensino, os sujeitos do grupo experimental apresentaram resultados melhores do que os do grupo controle que participaram das aulas ministradas da forma tradicional.

A partir desse resultado pode-se supor que tenha ocorrido uma aprendizagem significativa dos conceitos de matrizes. Esta diferença significativa de melhora no desempenho dos sujeitos do grupo experimental indica que houve relação entre o uso da estratégia diferenciada de ensino e o desempenho dos sujeitos nas provas. Porém, este resultado não pode ser generalizado, sendo próprio do grupo de sujeitos deste estudo. No entanto, esta pesquisa, desenvolvida em um contexto prático, pode ser aplicada a outros sujeitos por professores-pesquisadores comprometidos com a aprendizagem significativa em sua prática docente.

REFERÊNCIAS

ALEXANDER, D. C. (1985). A matrix application technique for secondary level mathematics. Mathematics Teacher. Vol. 78, nº 4, pp. 282 - 285.

ALMOULOUD, AG. S. (1997). Fundamentos da didática da Matemática e metodologia de pesquisa. CEMA - Caderno de Educação Matemática. São Paulo: PUC-SP.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D. e HANESIAN, H. (1980). Psicologia educacional. Tradução de Eva Nick. Rio de Janeiro: Editora Interamericana.

BEE, H. e MICHELLE, K. (1986). A pessoa em desenvolvimento. São Paulo: Editora Harbra.

BRITO, M. R. F., FINI, L. D. T. e NEUMANN, V. J. (1994). Um estudo exploratório sobre as relações entre o raciocínio verbal e o raciocínio matemático, Pro-Posições. Vol. 13, nº 4 pp. 37 - 44.

BRITO, M. R. F. e TAXA, F. S. (1999). An exploratory study about problem solving in two groups of elementary school students. Spetses. Grécia: Abstracts. IX European Conference on Developmental Psychology. p.51.

BRITO, M. R. F. (2001 a). Psicologia da educação matemática. Florianópolis: Insular. Carretero M. e García Madruga, J. A. (1984). Lecturas de Psicología de Pensamiento. Madrid: Alianza.

BRITO, M. R. F. (2001 b). O Ensino e a formação de conceitos na sala de aula. in Psicologia da Educação Matemática: Teoria e pesquisa. Brito, M.R.F. (org.). Florianópolis: Editora Insular.

CARRETERO M. e GARCÍA MADRUGA, J. A. (1984). Lecturas de Psicología de Pensamiento. Madrid: Alianza.

CENP. (1992). Coordenadoria de estudos e normas pedagógicas. Proposta Curricular para o Ensino de Matemática no segundo Grau. São Paulo: Secretaria Estadual de Educação.

COLL, C. (1992). As contribuições da psicologia para a educação: Teoria Genética e Aprendizagem Escolar. In Leite, B. L. (org.). *Piaget e a Escola de Genebra.* São Paulo: Editora Cortês.

COLL, C.; PALACIOS, J. e MARCHESI, A. (1996). Desenvolvimento psicológico e educação: psicologia da educação. Tradução de Angélica Mello Alves. Porto Alegre: Artes Médicas.

COLL, C.; POZO, J. I.; SARABIA, B. e VALLS, E. (1998). Os conteúdos na reforma: ensino e aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artes Médicas.

______. e outros. (2000). Psicologia do ensino. Tradução de Cristina Maria de Oliveira. Porto Alegre: Artes Médicas.

D'AMBROSIO, U. (1990). Etnomatemática. São Paulo: Ática.

DOUADY, R.. (1993). L'ingénierie didactique: un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage. *Cahier DIDIREM 19$_1$.* IREM. Paris VII.

ELLIOTT, J. (1991). Action research for educational change. Londres: Open University Press.

______. (1993). El Cambio educativo desde la investigación-accioón. Madri: Morata.

FLAVELL, J. H. (1975). A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget. Tradução de Helena Souza Patto. São Paulo: Pioneira.

__________. (1976). O desenvolvimento de conceitos. In: Mussen, P. H. (org.). Carmichael Psicologia da criança. São Paulo, EPU/EDUSP vol.VI, p.1-13.

FRID,. S. (2000). Constructivism and reflective practice in practice: challenges and dilemmas of a mathematics teacher educator. Mathematics Teacher Education and Development. Vol. 2, pp. 17-33.

GLAISTER, P. (1992). An application of matrix theory**.** Mathematics Teacher. Vol. 85, nº 3, pp. 220 - 223.

GLIDDEN, P. L. (1990). From graphs to matrices. Mathematics Teacher. Vol. 83, nº 2, pp. 127 - 130.

GONZÁLES, M. V. (1998). La interpretación natural de matriz matemática, Los Libros de Texto y los Estudiantes de Economía. Memorias - III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. (pp. 354-360). Venezuela: Universidad Central.

HAWKINS, T. W. (1975). Cauchy and spectral theory of matrices. History Mathematica 2. pp. 1-29.

___________. (1977 a). Another look at Cayley and the theory of matrices. Archives Internationales d'Historie des Sciences 26, (100), pp. 82-112.

___________. (1977 b). Weierstrass and the theory of matrices. Archive for History of Exact Sciences. 17, pp. 119-163.

ICMI (1986). International Commission on Mathematical Instruction. Kuwait.

IMENES, L. M. P. (1989). Um estudo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem da matemática. Dissertação de Mestrado, UNESP. Rio Claro.

IMENES, L.M. e LELLIS, M. (1997). Matemática Imenes & Lellis. São Paulo: Scipione

KLAUSMEIR, H. J., e GOODWIN, W. (1977). Manual de psicologia educacional. Tradução de Maria Célia Teixeira Azevedo de Abreu. São Paulo: Editora Harper & Row do Brasil.

LEDER, G. (1991). Is teaching learning *?* The Australian Mathematics Teacher. Vol. 47, nº 1, pp. 4 - 7.

LIMA, V. S. (1996). Mapeamento Cognitivo: Um estudo do conceito de frações em estudantes de magistério e professores do primeiro grau (1ª a 4ª séries). Dissertação de Mestrado. Grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática (PSIEM). Faculdade de Educação. UNICAMP. Campinas.

MAYER, R. E. (1992). Thinking, problem solving and cognition. New York: W. H. Freeman and Company.

MEC (1999). Parâmetros curriculares Nacionais (PCN). Brasília: Ministério da Educação.

NACARATO, A. M. (1995). A construção do conceito de número na educação escolarizada. Dissertação de Mestrado, UNICAMP. Campinas.

MEDIN, D. L. (1989). Concepts and conceptual structure. American Psychologist. Vol. 44, nº 12, pp. 1469 - 1481.

NCSM. (1990). National Council of Supervisors of Mathematics. *A matemática essencial para o século XXI*. Educação Matemática. Lisboa, nº 14, pp. 23-35.

NCTM. (1980). National Council of Teachers of the Mathematics & Commitee of the Mathematical Association of América. *A Sourcebook of Applications of School Mathematics*. Virginia: The Council.

OLIVEIRA, M. K. (1995). Vygotsky: Aprendizado e desenvolvimento: Um processo Sócio-histórico. São Paulo: Scipione.

OLIVEIRA, M. K. e OLIVEIRA, M. B. (1999). Investigações cognitivas: conceitos, Linguagem e Cultura. Porto Alegre: Artes Médicas.

OLIVEIRA, R. G. (1996). Uma análise comparativa da aprendizagem do conceito de frações em alunos submetidos a dois métodos diferentes de ensino. Dissertação de Mestrado. Grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática (PSIEM). Faculdade de Educação. UNICAMP. Campinas.

PÉREZ, E. M. P. (1990). Psicologia del razonamiento probabilístico. Madrid: Servicio de Publicaciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

PIAGET, J. (1970). A construção do real na criança. Rio de Janeiro: Zahar Editores.

______. (1975). L'equílibration des structures cognitives problème central du développement. París: P.U.F. Trad. Cast. de Bustos, E. *La equilibración de las estructuras cognitivas*. Madrid: Siglo XXI.

PIROLA, N. A. (1995). Um Estudo sobre a formação de conceitos de triângulos e quadriláteros em alunos da quinta série do primeiro grau. Dissertação de Mestrado. Grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática (PSIEM). Faculdade de Educação. UNICAMP. Campinas.

POLYA, G. (1986). A Arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Editora Interciência.

POZO, J. I. (1998 a). Teorias cognitivas da aprendizagem. Tradução de Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas.

_______. (1998 b). A Solução de problemas: Aprender a Resolver, Resolver para Aprender. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artes Médicas.

POZO, J. I., e POSTIGO, Y. (1993). Las estrategias de aprendizaje como contenido del currículo. In Monereo, C. Estrategias de Aprendizaje: processos, contenidos e Interaccíon. Barcelona: Domenech.

PULASKY, M. A. S. (1980). Psicologia e epistemologia genética de Jean Piaget. Rio de Janeiro: Zahar Editores.

ROSCH, E. (1973). Natural categories. Cognitive Psychology. Vol. 4, pp. 328-350.

SCHÖN, D. (1992). Formar professores como profissionais reflexivos, in: NÓVOA, A. (coord.). *Os professores e sua formação.* Lisboa: Dom Quixote.

SMITH, T. (2000). Bridging the research-practice gap: developing a pedagogical framework that promotes mathematical thinking and understanding. Mathematics Teacher Education and Development. Vol. 2, pp. 4-16.

STERNBERG, R. J. (2000). Psicologia cognitiva. Tradução de Maria Regina Borges Osório. Porto Alegre: Artes Médicas.

VERGNAUD, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: Some Theoretical and Methodological Issues - texto baseado numa apresentação para o Grupo Canadense de Estudos em Educação Matemática. Kingston: Queen's University.

_________. (1988). Concepts et schémes dans une théorie opératoire de la représentation Psychologie Française.

_________. (1991). La théorie des champs conceptuels. Recherches in Didactique des Mathématiques. Paris: Édition la Pensée Sauvage. vol. 10, nº 2,3.

_________. (1994). Epistemology and psychology of mathematics education. - Mathematics and cognition. ICMI Study Series. Edited by Perla Nesher and Jeremy Kilpatrick. Cambridge: Cambridge University Press.

VYGOTSKY, L. S. (1987). Pensamento e linguagem. Tradução de Jefferson Luiz Camargo. São Paulo: Martins Fontes.

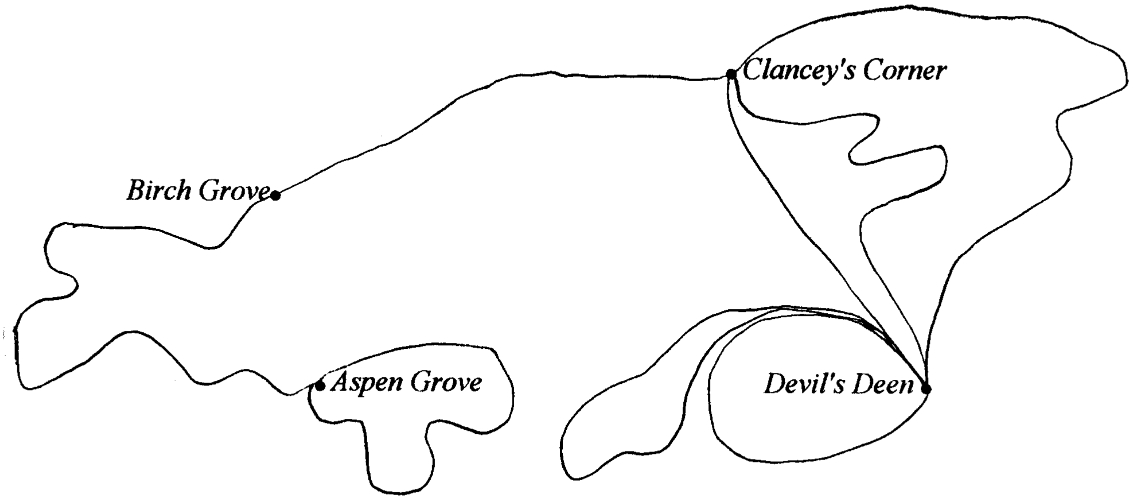
__________. (1988). A formação social da mente. Tradução de José Cipolla Neto, Luiz Silveira Menna Barreto e Solange Castro Afeche. São Paulo: Martins Fontes.

ANEXOS

ANEXO 1: QUESTÕES PROPOSTAS POR GLIDDEN (1990)

DE GRÁFICOS PARA MATRIZES

Um esboço do mapa (gráfico) de Monte Monadnock é dado abaixo. Os pontos representam as paradas, e as linhas representam o percurso.



1- *Nós podemos representar algumas características deste mapa usando uma tabela. Na tabela abaixo, nós escrevemos o número da linha de cada parada para uma outra parada que não passe através de um outro ponto. Note que duas rotas são possíveis de Aspen Grove para Aspen Grove (sentido horário e anti-horário). Complete a tabela abaixo.*

	TO	*Aspen G.*	*Birch G.*	*Clancy's C.*	*Devil's D.*
	Aspen Grove	*2*	*2*	*0*	*0*
FROM	*Birch Grove*				
	Clancy's Corner				
	Devil's Den				

2- *Nós podemos escrever a tabela abaixo mais facilmente abreviando os nomes de cada parada. Ou se você concordar que as linhas (horizontal) e as colunas (vertical) representam as paradas em ordem alfabética, nós poderemos omitir o nome inteiramente ou escrever os números entre parênteses. Reescreva a tabela acima, omitindo os nomes.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

\- - - -

\- - - -

Essa organização de números é chamada matriz. Cada número da matriz é chamado um elemento da matriz.

3- *Observe o último exercício da matriz.*

a) *Some os elementos da 3ª linha. O que este número representa no mapa. Some os elementos da 3ª coluna. O que este número representa no mapa.*

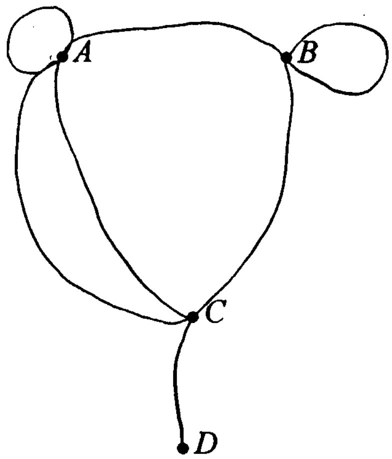
b) *Ache a soma de todos os elementos em cada fila. Ache o total dessas somas, Como este total está relacionado com o número de linhas do gráfico. Por que?*

c) *Que tipo de números inteiros aparece ao longo do eixo principal? Por que ?*

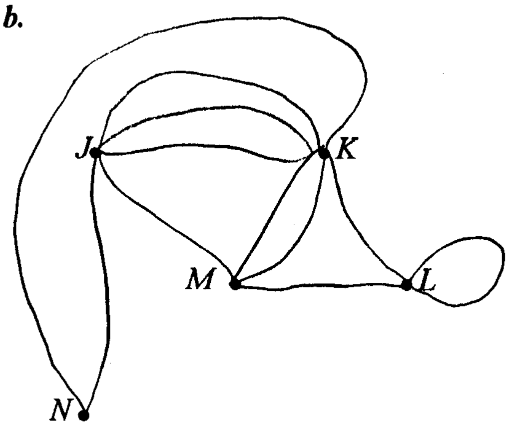
d) *O eixo principal forma uma linha de simetria para a matriz? Que característica do mapa é revelada por essa simetria ?*

4- *Escreva as matrizes que correspondem aos gráficos abaixo.*

a.



b.



$$
\begin{array}{cc}
 & \textit{TO} \\
 & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\
\begin{array}{rc} \textit{FROM} & A \\ & B \\ & C \\ & D \end{array} & \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & \textit{TO} \\
 & \begin{array}{ccccc} J & K & L & M & N \end{array} \\
\begin{array}{rc} \textit{FROM} & J \\ & K \\ & L \\ & M \\ & N \end{array} & \begin{pmatrix} - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \end{pmatrix}
\end{array}
$$

As propriedades que você encontrou nos itens b,c, e d do exercício 3 são verdadeiras para essas matrizes?

5- Desenhe os gráficos correspondentes às matrizes abaixo.

a. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

A • • *B*

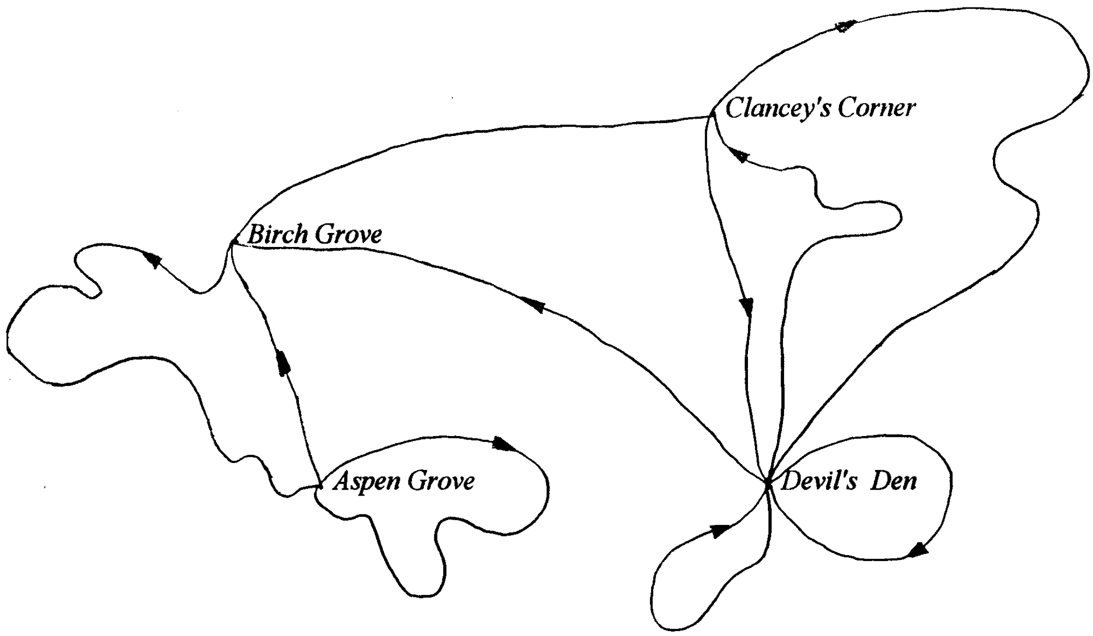
D • • *C*

F •

E • • *G*

I • •*H*

6- *Para reduzir o tráfico e a erosão do Monte Monadnock, os guardas-florestais decidiram estabelecer alguns caminhos de mão única como é mostrado abaixo. Por exemplo, agora temos um único caminho para viajar de Aspen Grove para Aspen Grove pelo sentido horário. Caminhos sem seta de direção são caminhos de mão dupla. Complete a matriz representada pela reconfiguração dos caminhos do Monte Monadnock.*



7- *O gráfico no último exercício é chamado de gráfico dirigido porque algumas linhas representam os caminhos que podem ser percorridos em uma única direção. Olhe a matriz do último exercício.*

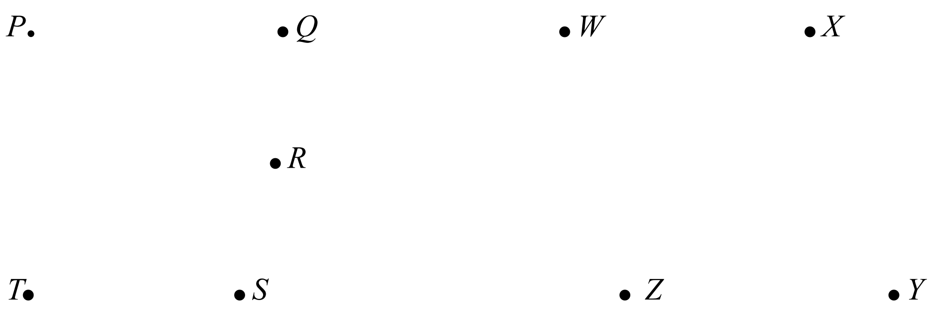
a) *Some os elementos da 3ª linha. O que este número representa no mapa? Some os elementos da 3ª coluna. O que este número representa no mapa?*

b) *Encontre a soma de todos os elementos em cada fila. Encontre o total dessas somas. Como este total esta relacionado como o número de linhas no gráfico? Por que?*

c) *Que tipo de números inteiros aparece ao longo do eixo principal? Por que?*

d) *O eixo principal forma uma linha de simetria para a matriz?*

8- Escreva as matrizes correspondentes aos gráficos abaixo.



9- Desenhe os gráficos direcionados correspondentes as matrizes abaixo.

a.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ANEXO 2: EXEMPLOS DA UTILIZAÇÃO DE MATRIZES PROPOSTOS POR ALEXANDER (1985)

Exemplo 1 : Encontre a equação da reta que passa pelos pontos (1,2) e (-1,3).

A solução sugerida é a seguinte:

$$Y=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad C=\begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix}$$

Assim, $Y = AC$ *ou* $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix}$ *ou* $C = A^{-1}Y$

Logo, basta encontrarmos a inversa de A, para obtermos a matriz C e dessa forma o y-intercepto (b) e o coeficiente angular (m) ou declividade que nos possibilitara obter a equação da reta $y = mx+b$ *que neste caso será* $y = -1/2x+ 5/2$

Esse procedimento pode ser estendido para a obtenção de funções quadráticas que passem por três pontos não colineares.

Exemplo 2: Determine a função quadrática que passa pelos pontos (-1,1) ,(0,0) e (2,4) .

A solução sugerida é a seguinte:

$$Y=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{Assim, } Y = AC \text{ ou } C= A^{-1}Y$$

A equação que representa a função quadrática será reescrita da seguinte maneira: $y = a + bx + cx^2$ *e após a obtenção de* $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *temos que* $y = x^2$

Exemplo 3: A venda de bonecos E.T. pelo Companhia de Filmes Mágicos para o primeiro mês de produção foram cinco mil, para o segundo oito mil e para o terceiro mês dez mil. Pela experiência, a Companhia de Filmes Mágicos espera que as vendas sigam uma trajetória parabólica durante os meses de produção. Na forma $S = c_0 + c_1M + c_2M^2$ *ou* $(y= a +bx +cx^2)$ *expresse o número S de vendas (em milhares) em termos do número de meses M que as bonecas estiveram no mercado.*

O problema nos fornece os seguintes pontos (1,5), (2,8) e (3,10), sendo a solução semelhante ao exemplo 2.

ANEXO 3: RELAÇÃO DOS LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS

a . BEZERRA, M. J., e JOTA, P. J. C. (1994). Novo Bezerra Matemática, 2º grau, *Volume Único*. São Paulo: Editora Scipione.

b. BONGIOVANNI, V., VISSOTO, R. O., e LAUREANO, T. J. L. (1993). Matemática e Vida, 2º grau, volume 2. São Paulo: Editora Ática.

c. GENTIL, N., e outros. (1996). Matemática para o 2º grau, *volume 2*. São Paulo: Editora Ática.

d. GIOVANNI, J. R., e BONJORNO, J. R. (1992). *Matemática 2, 2º grau, volume 2*. São Paulo: Editora FTD.

e. IEZZI, G., e outros. (1992). Matemática 2º grau, *8. ed. rev.*. São Paulo: Atual Editora.

f. SOUZA, M.H.S., e SPINELLI, W. (1996). Matemática 2º grau, *volume 2*. São Paulo: Editora Scipione.

ANEXO 4: EXEMPLO DE ATIVIDADE E SUGESTÕES DE ALUNOS

1- O tamanho, a direção e o sentido de um vetor são o tamanho, a direção e o sentido do segmento de reta orientado associado. Chamamos um segmento de reta orientado de vetor. Como um vetor é uma matriz podemos interpretar a soma dos vetores da seguinte forma:

$$u=(1, 2) \text{ e } v= (3, -4), \quad u + v = (1+3, \quad 2+ (-4)) = (4,-2)$$

Agora, represente esses vetores no plano cartesiano, faça a soma dos mesmos geometricamente, comparando o resultado obtido com o da soma das matrizes.

2- No exercício anterior você verificou que um vetor é uma matriz, portanto efetue as operações com as matrizes $u = (2, 3)$ e $v= (-2, 5)$ e represente no plano cartesiano. Discuta o resultado obtido nas operações algébricas e nas operações geométricas:

a) $u + v$

b) $u - v$

c) $2u$

d)$3u - 2v$

3- Num parque de diversões, Paula, Sara, Carlos e Daniel foram andar de roda-gigante. Havia um único banco vago e em cada banco da roda gigante só podiam sentar duas pessoas. De quantas maneiras diferentes eles puderam escolher a dupla que foi no brinquedo?

4 - De acordo com a questão anterior, utilize uma matriz para representar o caso dos quatro amigos na roda-gigante, diga quais são as pessoas que irão compor a diagonal principal dessa matriz, discuta se é possível que essas pessoas ocupem esses lugares e responda de quantas maneiras diferentes elas poderão escolher a dupla que foi no brinquedo?

5- Uma montadora de automóveis da cidade de São Bernardo precisa de motores e câmbios para os três modelos que produz. A tabela I mostra a relação dos componentes para cada um *dos modelos e a tabela II mostra uma previsão de quantos automóveis a fábrica deverá produzir nos meses de setembro, outubro e novembro. Com base nessas informações calcule quantos motores e quantos câmbios serão necessários em cada um dos meses para que a montadora atinja a produção desejada ?*

Modelo / Componente	A	B	C
Motores	3	4	4
Câmbios	4	6	8

Mês / Modelo	setembro	outubro	novembro
A	150	250	300
B	200	300	400
C	180	150	200

6- *Observe o quadro abaixo. Ele mostra a porcentagem dos gases presentes no ar que entra no organismo, bem como a dos que saem.*

Gases	Ar inspirado	Ar expirado
Oxigênio	21%	16%
Nitrogênio	78%	78%
Gás carbônico	0,03%	4%

De acordo com as informações contidas na tabela responda:

a) *se uma pessoa inspirar 500 ml de ar em um determinado tempo, quanto isso irá corresponder em termos de gases (O_2, N, CO_2)? Dê a resposta através de uma matriz.*

b) *Por que o gás carbônico eliminado pelo organismo é maior do que o que entra?*

c) *Por que a quantidade de oxigênio inspirado é menor que o expirado?*

10- *A tabela abaixo representa a população residente, por situação de domicílio e por sexo nos anos de 1960 a 1996 fornecida pelo IBGE.*

Anos	*Urbana*		*Rural*	
	Homens	*Mulheres*	*Homens*	*Mulheres*
1960	*15.120.390*	*16.182.644*	*19.935.067*	*18.832.356*
1970	*25.227.825*	*26.857.159*	*21.103.518*	*19.950.535*
1980	*39.228.040*	*41.208.369*	*19.895.321*	*18.670.976*
1981	*53.854.256*	*57.136.734*	*18.630.866*	*17.203.619*
1996	*59.716.389*	*63.360.442*	*17.726.476*	*16.266.856*

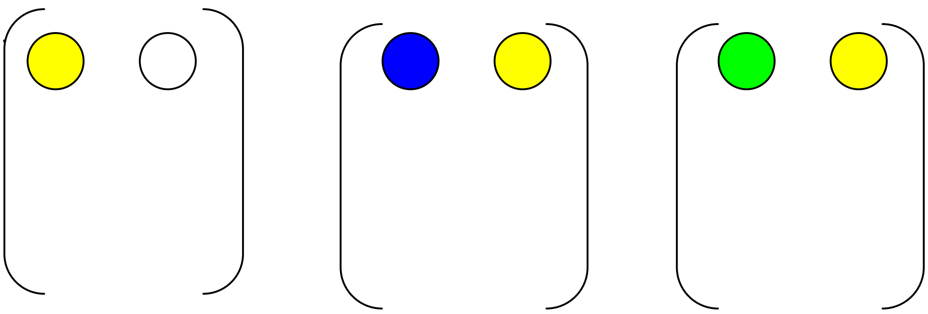
De acordo com as informações contidas na tabela responda:

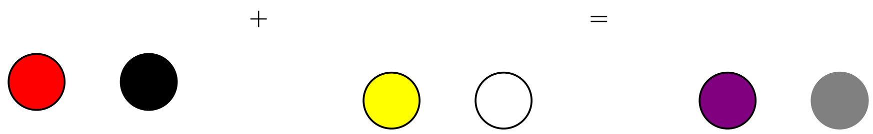
a) Em que ano houve o maior êxodo rural?

b) Calcule o matriz soma correspondente ao total de homens e mulheres das regiões urbana e rural.

EXERCÍCIOS SUGERIDOS PELOS ALUNOS

1.





Este exemplo foi sugerido para ser usado no ensino das cores primárias e secundárias, onde a "soma" das matrizes indicam a formação das cores.

2.

$$\begin{pmatrix} \textbf{SU} & \textbf{BA} \\ \textbf{LE} & \textbf{JAR} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \textbf{CO} & \textbf{LA} \\ \textbf{TRA} & \textbf{DIM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \textbf{SUCO} & \textbf{BALA} \\ \textbf{LETRA} & \textbf{JARDIM} \end{pmatrix}$$

Este tipo de exemplo foi dado pelo aluno como um jogo, onde eles teriam que descobrir quais as letras que deveriam ser juntadas para compor as palavras.

3. Introduzindo o conceito de igualdade, soma e diferença de matriz no jogo "Batalha Naval" faremos com que os jogadores ao invés de chutarem os números, tenham que resolver alguns exercícios de matriz onde a resposta será a localização das armas do inimigo. Por exemplo com essas equações abaixo:

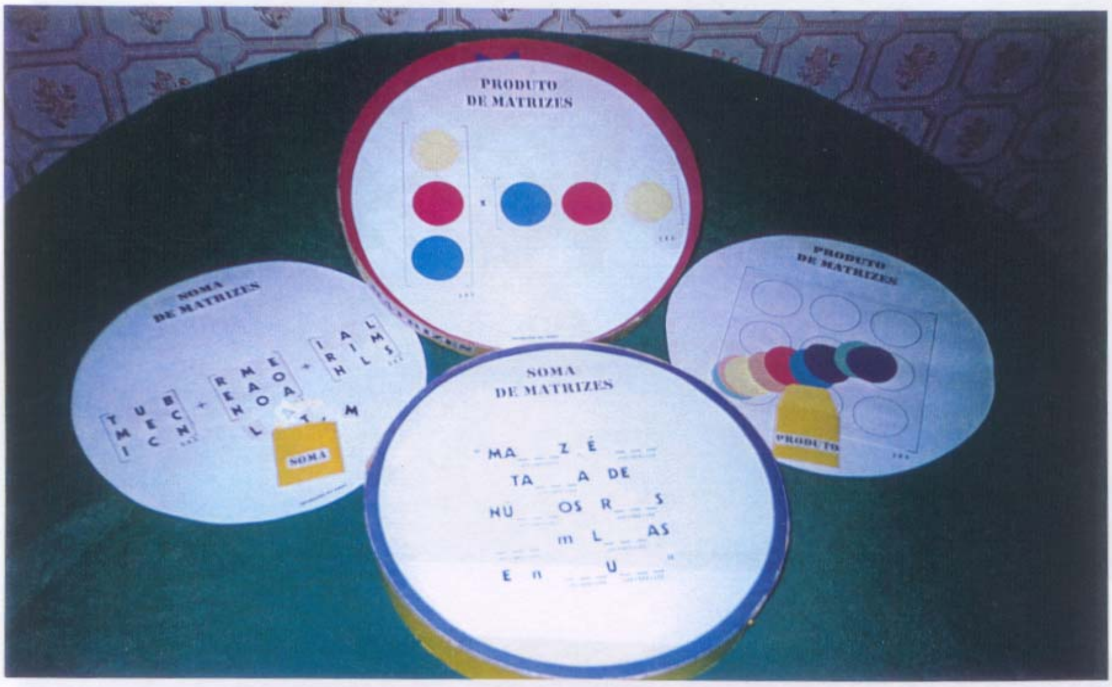
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x+y & 3x-y \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

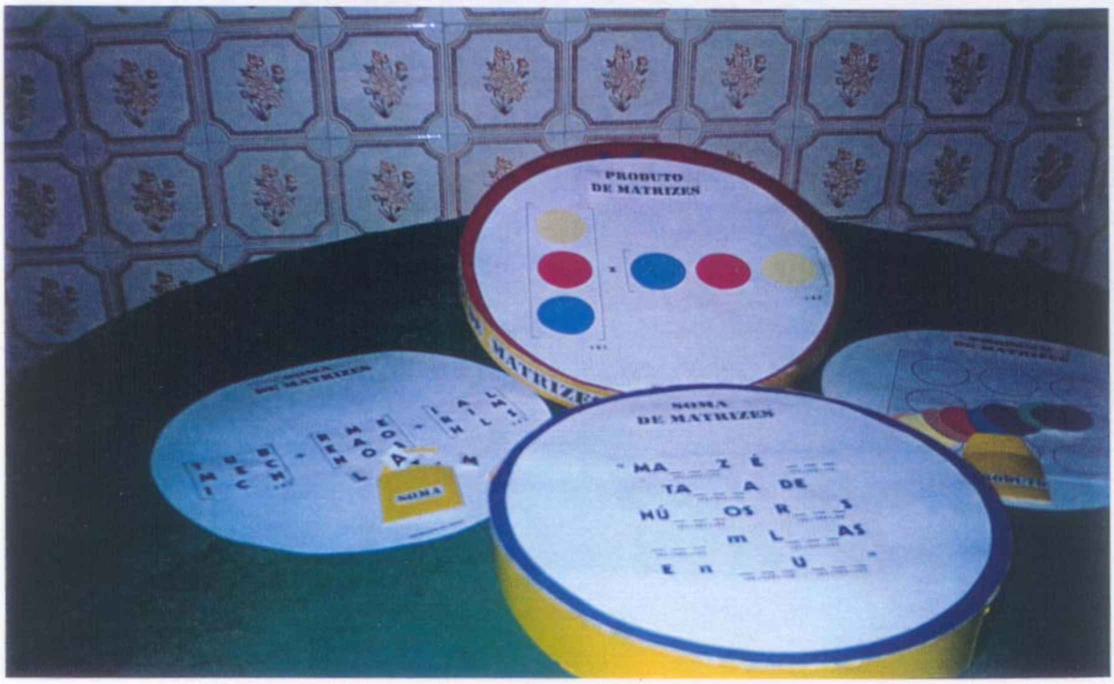
$$\begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{matrix} 4 & 3 \\ x & y \end{matrix} \qquad D = \begin{matrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

Quando da igualdade das matrizes obteremos o valor de x e y que nos dará a localização de alguma arma a ser destruída.

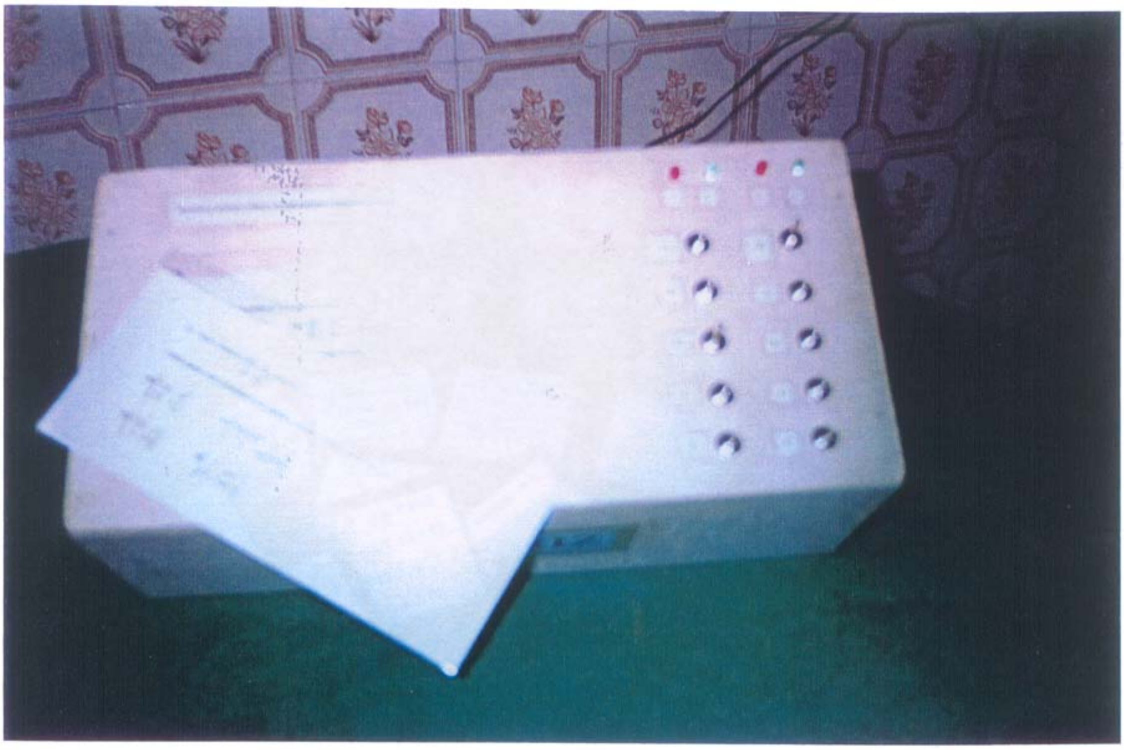
FOTOS DE ALGUNS TRABALHOS DESENVOLVIDOS PELOS ALUNOS

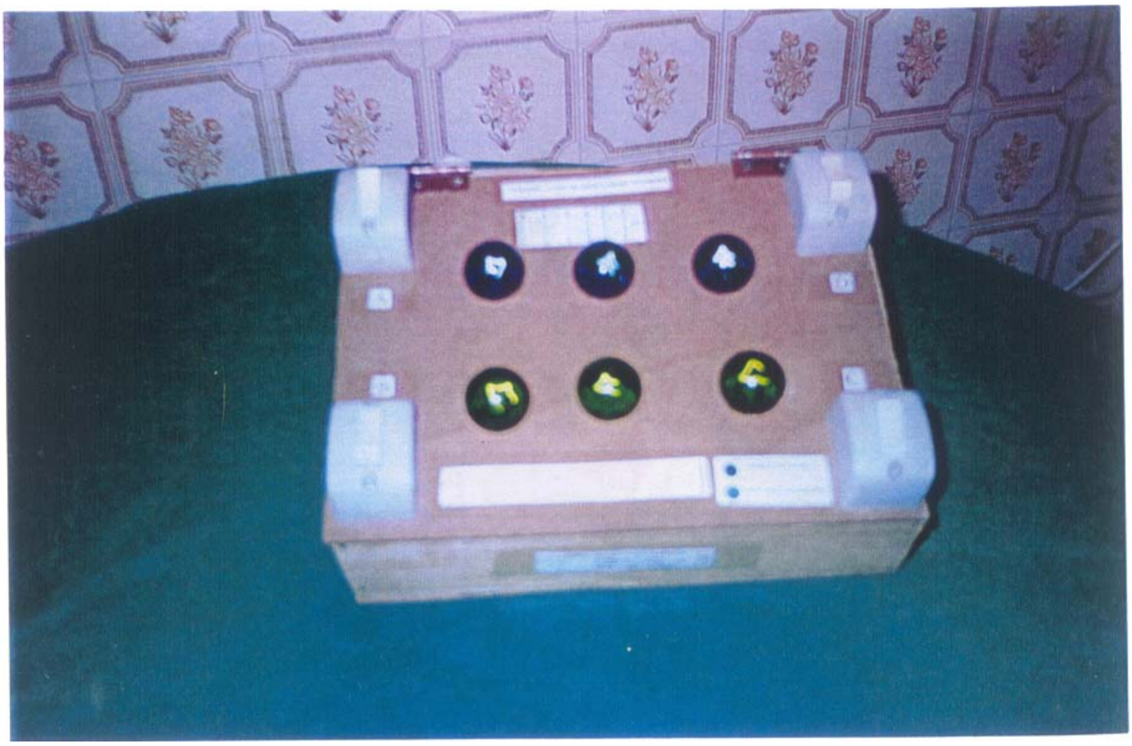

PRODUTO
DE MATRIZES
SOMA
DE MATRIZES
PRODUTO
DE MATRIZES
SOMA
DE MATRIZES
SOMA
PRODUTO


PRODUTO
DE MATRIZES
SOMA
DE MATRIZES
SOMA

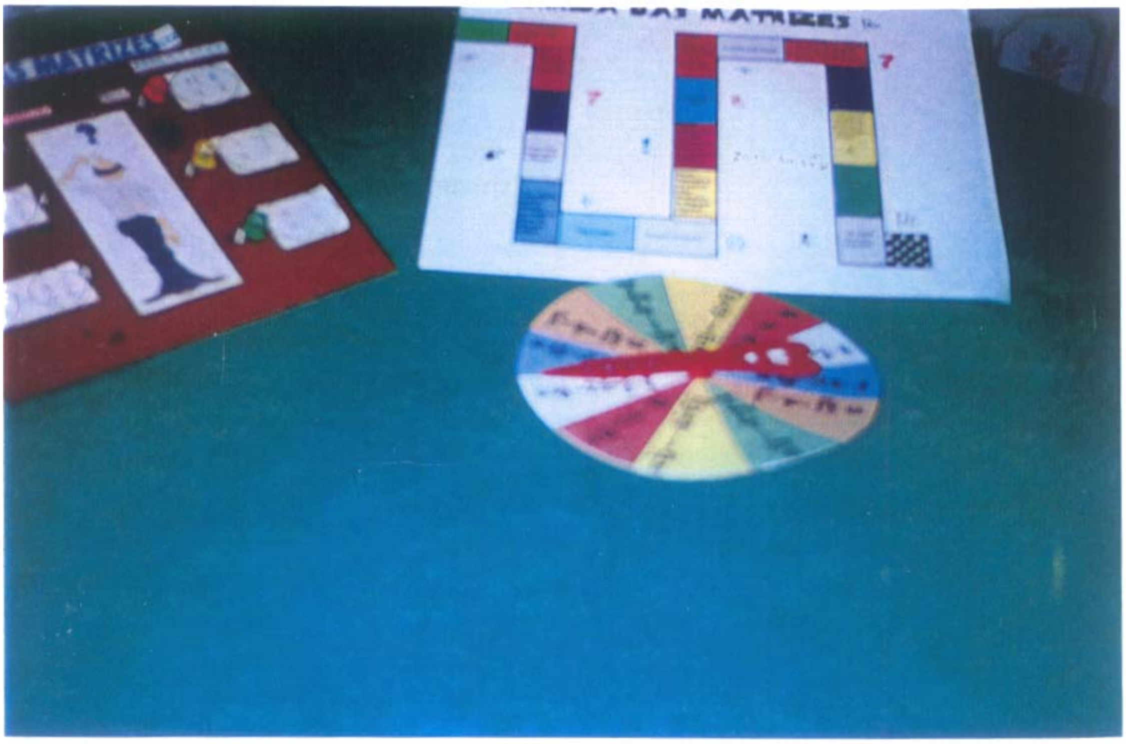

BRINCANDO
COM
MATRIZES


NCANDO
COM
MATRIZES






MATRIZES
MATRIZES
5
6
8
9
10
11
12
13
15
16
O que são matrizes?
Quantos elementos tem uma matriz quadrada de ordem 6?


MATRIZES

ANEXO 5: PROVA I

01. No quadrado mágico abaixo a soma dos números em cada linha, coluna ou diagonal é a mesma. Encontre os valores que faltam e justifique como você os encontrou.

a)

	9	2
3	5	
	1	6

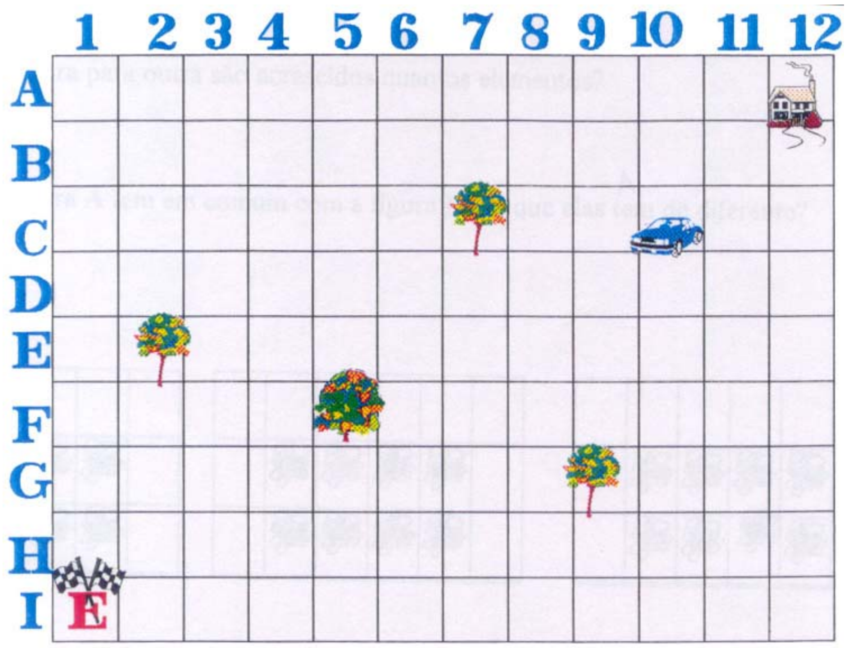
b)

	2	14
12	9	
	16	7

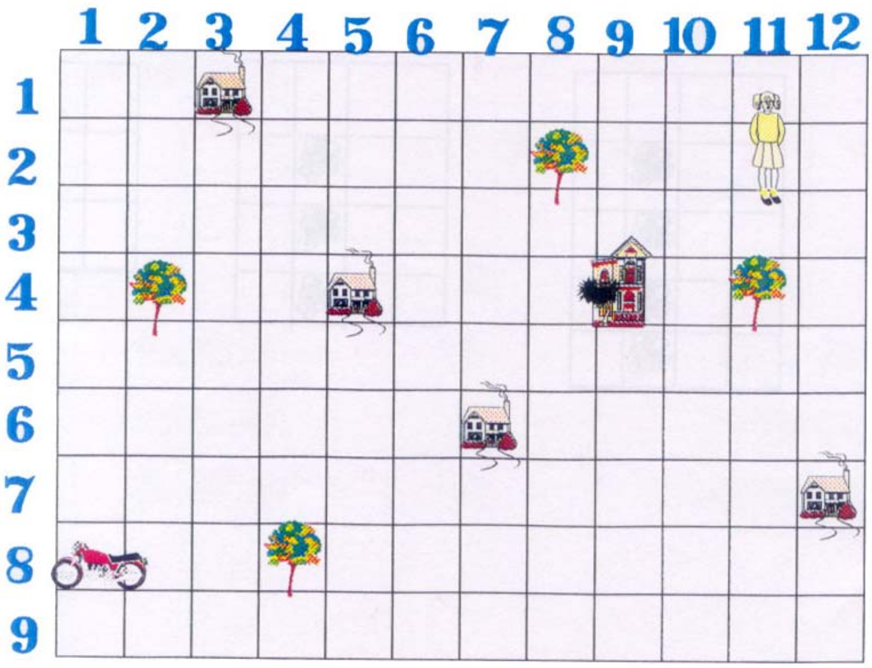
02. O que você entende por matriz ?

03. Como podemos representar uma matriz?

04. O motorista do carro da figura, para chegar ao estacionamento, recebeu as seguintes instruções: C9,C8,B8,B7,B6,B5,C5,D5,E5,E4,E3,F3,F2,F1,G1,H1 e I1, que é o estacionamento. Assinale o percurso e em seguida crie um outro para levá-lo de volta para casa.



04. Indique um dos possíveis trajetos que a garota poderá fazer para chegar até sua moto.



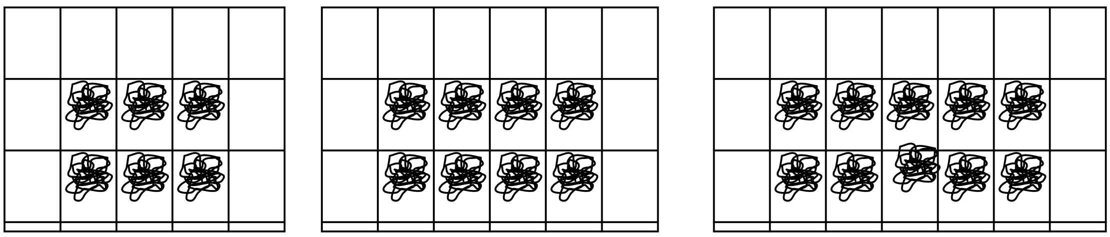
06. Observe a seqüência de figuras e desenhe a próxima, em seguida responda:

a) O que você fez para completar a seqüência?

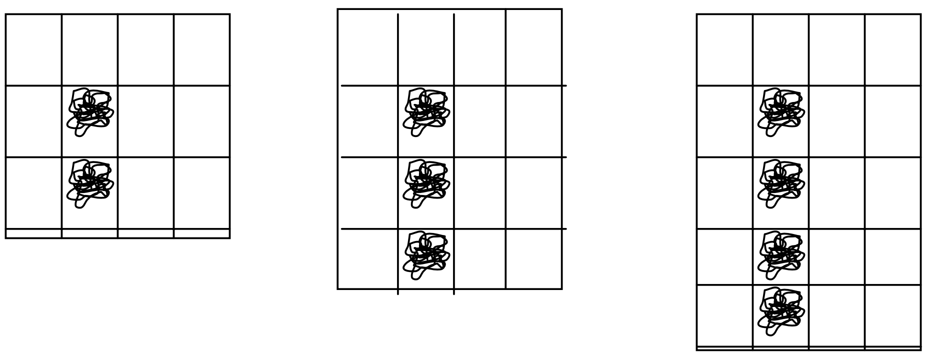
b) De uma figura para outra são acrescidos quantos elementos?

c) O que a figura A tem em comum com a figura B e o que elas têm de diferente?

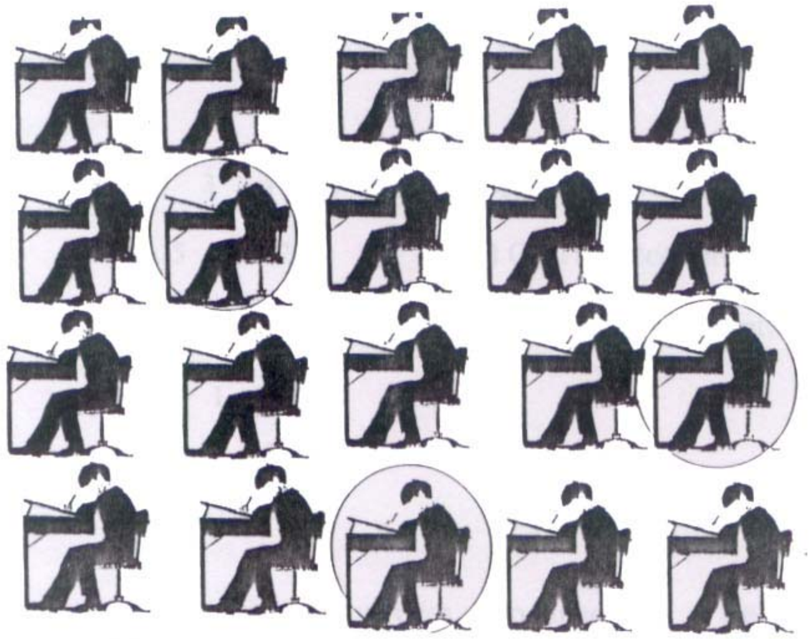
A)



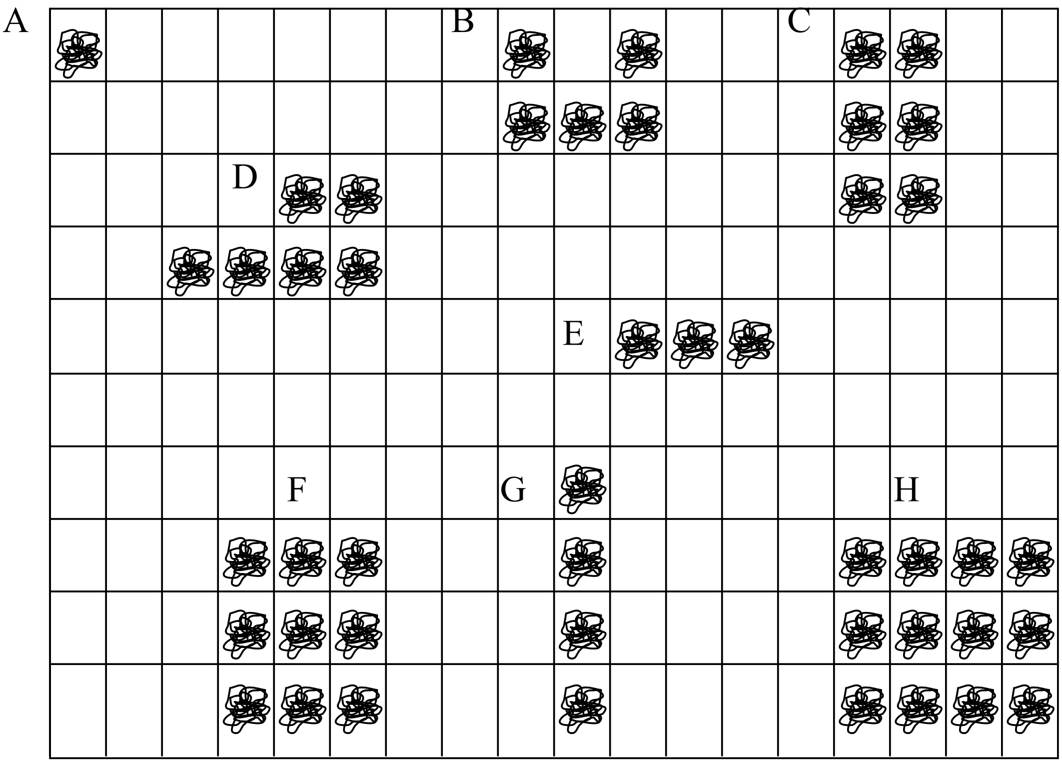
B)



07. Diga qual é a posição dos alunos assinalados:



08. Cada desenho no quadriculado representa um número real, sendo assim identifique quais figuras representam matrizes, justificando. Indique também a ordem das mesmas.



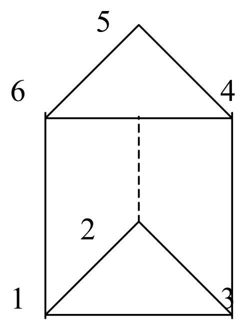
ANEXO 6: PROVA II

1- Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Responda: a) Qual é a ordem da matriz A?

b) Qual é o elemento a_{43} , a_{12}, a_{32}?

c) Quais são os elementos da 2ª linha?

2- Observe o prisma triangular regular cujos vértices estão numerados. A ele podemos associar a matriz $A = (a_{ij})_{6x6}$ onde $a_{ij} = 1$ se os pontos estiverem ligados e $a_{ij} = 0$ se os pontos não estiverem ligados.



3- Associe uma matriz B a um tetraedro regular, codificando uma nova ligação para os seus vértices.

4- Construir uma matriz $A = (a_{ij})_{2x4}$ sabendo que aij = 3i + 2j.

5- Uma montadora produz três modelos de automóveis A, B e C. Cada modelo é manufaturado parcialmente na fábrica V_1 em São Bernardo do Campo e depois terminado na fábrica V_2 em Taubaté. O custo total de cada produto é a soma do custo de produção com o custo de transporte. Então, os custos em cada fábrica (em reais) podem ser descritos pelas matrizes 3x2 de V_1 e V_2. Calcule o custo total de produção e transporte para o modelo B e C.

$$V_1 = \begin{array}{c} \\ \text{Modelo A} \\ \text{Modelo B} \\ \text{Modelo C} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Custo Produção} & \text{Custo Transporte} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2000 & 200 \\ 3000 & 220 \\ 4000 & 240 \end{pmatrix} \end{array} \qquad V_2 = \begin{array}{c} \\ \text{Modelo A} \\ \text{Modelo B} \\ \text{Modelo C} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Custo Produção} & \text{Custo Transporte} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3000 & 220 \\ 4000 & 230 \\ 6000 & 240 \end{pmatrix} \end{array}$$

6- Joga-se pesticida nas plantas para eliminar insetos daninhos. Entretanto, parte do pesticida é absorvida pela planta. Os pesticidas são absorvidos pelos herbívoros que comem essas plantas. Para determinar a quantidade de pesticida absorvida por um herbívoro, vamos proceder da maneira descrita a seguir. Suponha que temos três tipos de pesticidas e quatro tipos de plantas. Denote por a_{ij} a quantidade do pesticida i (em miligramas) que foi absorvida pela planta j. Esta informação pode ser representada pela matriz:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Planta 1} & \text{Planta 2} & \text{Planta 3} & \text{Planta 4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Pesticida 1} \\ \text{Pesticida 2} \\ \text{Pesticida 3} \end{array}$$

Suponha, agora que temos três herbívoros e denote por b_{ij} o número de plantas do tipo i que um herbívoro do tipo j como por mês . Esta informação pode ser representada pela matriz:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Herbívoro 1} & \text{Herbívoro 2} & \text{Herbívoro 3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 12 & 8 \\ 28 & 15 & 15 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Planta 1} \\ \text{Planta 2} \end{array}$$

B =	30	12	10	Planta 3
	40	16	20	Planta 4

Calcule a quantidade de pesticida de tipo i que o animal j absorveu, dado $i = 2$ e $j = 3$.

7- O fabricante de móveis faz cadeiras e mesas, cada uma das quais passa por um processo de montagem e outro de acabamento. O tempo necessário para esses processos é dado (em horas) pela matriz:

$$A = \begin{array}{cc} \text{Montagem} & \text{Acabamento} \\ \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Cadeira} \\ \text{Mesa} \end{array}$$

O fabricante tem uma fábrica em São Bernardo do Campo e outra em Itatiba. As taxas por hora para cada um dos processos são dadas (em reais) pela matriz:

$$\begin{array}{cc} \text{S.Bernardo do Campo} & \text{Itatiba} \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 14 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Montagem} \\ \text{Acabamento} \end{array}$$

Calcule o custo total da produção de cada produto em cada cidade.

8- Num parque de diversões , Vinícios, Roberto, Márcio e Rui foram andar de roda-gigante. Havia uma única cadeira vaga e em cada cadeira da roda gigante só podiam sentar duas pessoas . De quantas maneiras diferentes eles puderam escolher a dupla que foi no brinquedo? Sugestão: Utilize uma matriz para representar o caso dos 4 amigos na roda gigante.

9- Quantas possibilidades há de podermos escolher sorvetes de duas bolas dispondo de 4 sabores (limão, uva, nozes, chocolate), sendo:

a) duas bolas iguais;

b) duas bolas diferentes independentemente do sabor estar no fundo ou em cima das casquinha;

c) duas bolas diferentes e a posição do sabor na casquinha fornece uma nova possibilidade.

Sugestão: Utilize uma matriz para descrever as possibilidades.

10- Chamamos um segmento de reta orientado de vetor. Como um vetor é uma matriz podemos interpretar a soma dos vetores da seguinte forma:

u = (1,2) e v= (3,-4) u+ v = (1 +3 , 2 + (-4)) = (4,-2).Dadas as matrizes

u= (2,3) e v = (-2,5) efetue as operações:

a) u + v b) u – v c) 2u d) 3u – 2v