UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

ATITUDES E HABILIDADES ENVOLVIDAS NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS: UM ESTUDO SOBRE O GÊNERO, A ESTABILIDADE DAS ATITUDES E ALGUNS COMPONENTES DA HABILIDADE MATEMÁTICA

Miriam Cardoso Utsumi

Profa. Dra. Márcia Regina Ferreira de Brito

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por Miriam Cardoso Utsumi e aprovada pela comissão Julgadora.
Data: 20/12/2000
Assinatura: Márcia Regina F. de Brito

Comissão Julgadora:

Márcia Regina F. de Brito

2000

CATALOGAÇÃO NA FONTE ELABORADA PELA BIBLIOTECA
DA FACULDADE DE EDUCAÇÃO/UNICAMP

Ut7a

Utsumi, Miriam Cardoso.
Atitudes e habilidades envolvidas na solução de problemas algébricos : um estudo sobre o gênero, a estabilidade das atitudes e alguns componentes da habilidade matemática / Miriam Cardoso Utsumi. -- Campinas, SP : [s.n.], 2000.

Orientador : Márcia Regina Ferreira de Brito.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Matemática - Atitudes. 2. Capacidade matemática. 3. Solução de problemas. 4. Gênero. 5. Álgebra. I. Brito, Márcia Regina Ferreira de. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

Dedico este trabalho ao meu marido Marcílio, e a meus pais, Elza e Damasio, com muito amor.

Agradecimentos

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo auxílio financeiro, que nos deu a tranquilidade para desenvolver este estudo e participar de inúmeras atividades acadêmicas. Ao parecerista FAPESP pela leitura cuidadosa e pareceres incentivadores.

À Professora Dra. Márcia Regina Ferreira de Brito pela orientação incansável, por ampliar nossa visão sobre a pós-gradução e incentivar a participação em congressos e escrita de artigos científicos.

Ao Professor Dr. Cleiton de Oliveira, nosso orientador no Mestrado, pelo incentivo para prosseguirmos nos aprimorando profissionalmente.

Aos Professores Dra. Sylvia Helena Souza da Silva e Dr. Daniel Clark Orey pelas sugestões no exame de qualificação e pelo acompanhamento, posterior, do presente estudo.

Aos amigos do grupo de pesquisa PSIEM pelas discussões valiosas, apoio e amizade.

À amiga Irene pela leitura e revisão da parte estatística e à amiga Clayde, companheira de congressos e elaboração de artigos, pela paciência e apoio constantes.

Aos funcionários da Faculdade de Educação, Célia, Nadir, Gisleine, Malu, Yoko, Ana, Rose e Gildenir, pelo carinho e atenção com que sempre fomos recebidos nas vezes em que os procuramos.

À secretária de Educação de Paulínia, Meire Therezinha Muller, e a direção das escolas participantes do estudo pela disponibilidade, carinho e atenção que nos deram durante a realização da pesquisa de campo.

Aos alunos das sextas, sétimas e oitavas séries do estudo piloto e deste estudo, especialmente, à Giane, ao Rafael e ao José Carlos, pela grande contribuição que nos deram: sem vocês não haveria estudo.

Aos meus pais pelo incentivo que sempre deram aos filhos.

Ao meu marido Marcílio Toshiaki, grande incentivador de todas as nossas ações, pelo amor, carinho e paciência infinitos, você é praticamente co-autor desse trabalho.

A todas estas pessoas e outras mais que, por esquecimento involuntário, não foram citadas, expressamos a nossa sincera gratidão.

SUMÁRIO

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Anexos:

RESUMO

Com o objetivo de verificar se as atitudes em relação à Matemática estavam relacionadas às variáveis gênero, série e desempenho, 256 sujeitos oriundos de sexta, sétima e oitava séries do ensino fundamental, de uma escola da rede pública de ensino do Estado de São Paulo, responderam a um questionário para sua caracterização, uma escala de atitudes em relação à Matemática e um teste matemático. A partir dos resultados obtidos no teste matemático, foram selecionados os alunos com melhor desempenho em cada série, os quais foram submetidos a uma bateria de testes algébricos com a finalidade de investigar os seguintes componentes da habilidade matemática: percepção, generalização, flexibilidade de pensamento, reversibilidade dos processos mentais, encurtamento de raciocínio, compreensão, raciocínio e lógica, memória matemática e tipo de habilidade matemática. A média das atitudes foi de 57,1641 com desvio padrão de 12,5394 e a média das notas no teste matemático foi de 1,8506 com desvio padrão de 1,9976, sendo a nota mínima obtida zero e a máxima 8,0. A análise dos dados evidenciou que as variáveis série, reprovações, hábitos de estudo, compreensão dos problemas matemáticos e autopercepção de desempenho estavam relacionadas à atitude dos sujeitos em relação à Matemática e que as variáveis série, reprovações, gênero, compreensão dos problemas e autopercepção de desempenho estavam relacionadas à nota dos sujeitos no teste matemático. A análise dos protocolos dos sujeitos considerados mais capazes em Matemática, durante a solução de problemas algébricos, mostrou que os mesmos não eram capazes de solucionar os problemas propostos, soluções estas que evidenciariam, efetivamente, a habilidade matemática desses sujeitos.

Este estudo foi desenvolvido com o apoio financeiro da FAPESP, tendo recebido, inicialmente, apoio financeiro do CNPq.

SUMMARY

With the objective of assessing if the attitudes regarding Mathematics were related to variables such as gender, grades and performance, 256 subjects from the sixth, seventh and eighth grades of basic education from a public school in the state of Sao Paulo answered a questionnaire for characterization, a scale of attitudes toward Mathematics and a mathematics test. Based on the results of the mathematics test, the students in each grade with the best performance were selected, and they were submitted to a series of Algebra tests in order to investigate the following components of mathematical ability: perception, generalization, flexibility of thought, reversibility of mental processes, shorter thought processes, understanding, thought processes and logic, mathematical memory and kind of mathematical ability. The average in attitudes was 57.1641 with a standard deviation of 12,5394 and the average grade on the mathematical test was 1.8506 with a standard deviation of 1.9976 with the lowest grade being 0 and the highest being 8. The data analysis made evident that variables such as grade, failure rates, study habits, understanding of mathematical problems and self-perception of performance were related to the subjects' attitudes towards mathematics and that variables such as grade, failure rate, gender, understanding of problems and self-perception of performance were related to the subjects' grades on the mathematical test. The analysis of the protocols of the subjects considered the most capable in Mathematics, during the solution of algebraic problems, showed that they were not able to solve the proposed problems. Solving such problems would effectively show the mathematical ability of these subjects.

This study was developed with financial support from FAPESP, having initially received financial support from the CNPq.

Introdução

O fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aluno já conhece; descubra-se o que ele sabe e baseie nisso seus ensinamentos.

David Ausubel

O desenvolvimento da capacidade para a Matemática, que deveria ser um dos objetivos principais do ensino da Matemática, parece não estar sendo atingido. Krutetskii (1976) afirmou que a inclinação biológica inata para o desenvolvimento subseqüente de uma habilidade é necessária mas não é suficiente, pois as habilidades surgem e se desenvolvem apenas através da atividade. Esta afirmação mostra que todos podem ter capacidade para a Matemática, embora apresentem diferentes níveis de habilidade, e que esta pode ser melhorada através de situações e atividades adequadamente planejadas, de modo a promover um incremento que leve o sujeito a adquirir domínio na área específica.

Vários pesquisadores, entre eles Farivar e Webb (1994), Whitney (1980), Daniels, Senviau e Lamb (1991), sugeriram abordagens e atividades que, segundo eles, de alguma forma contribuem para a melhoria do ensino. Taylor, Stevens, Peregoy e Bath (1991), por exemplo, relataram um estudo com índios americanos onde era abordada a comunicação, a exploração geométrica, numérica e as relações matemáticas, dentre outros aspectos. O fato de as atividades terem sido realizadas em grupo e a partir da cultura indígena foi considerado importante e propiciou o desenvolvimento de atitudes positivas com relação à Matemática.

O desenvolvimento de uma habilidade ou um aumento da capacidade de compreensão dos alunos parece algo ainda difícil de ser alcançado, quando se observa a situação de algumas escolas brasileiras.

Utsumi (1995), em um estudo realizado junto a algumas Escolas-Padrão na cidade de Campinas, São Paulo, através de entrevistas e questionários, detectou alguns fatores que ainda constituíam obstáculos para a melhoria do ensino, dentre eles:

- a alta rotatividade dos professores que atuavam na rede pública de ensino, impossibilitando ou dificultando a continuidade do desenvolvimento de uma proposta pedagógica consistente;
- a ausência de política governamental, a médio e longo prazo, voltada para a capacitação e atualização dos professores. A maioria, apesar de conhecer a proposta pedagógica, não trabalhava com a mesma por sentir dificuldades e insegurança em relação aos conteúdos;
- currículos inadequados à nova realidade cultural e de mercado.

De acordo com os Referenciais para a Formação de Professores (1999, p. 32), poderia ser acrescentado, ainda, como obstáculo a melhoria do ensino o fato dos professores estarem desatualizados em relação à discussão sobre a educação, à profissão e seu papel social, escreverem e lerem pouco, terem uma enorme dependência do livro didático e uma visão bastante utilitária do aperfeiçoamento profissional..

Outros fatores têm sido levantados a partir das avaliações periódicas do desempenho dos alunos, realizadas pelo governo através do SAEB - Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica - desde 1990, cujo objetivo principal é o de melhorar a qualidade do ensino fundamental e médio. De acordo com o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais - INEP (1999) o SAEB monitora os resultados das políticas e estratégias educacionais, fornecendo subsídios para o planejamento, adequação de currículos e formação de professores, dentre outros. O conteúdo de Matemática avaliado pelo SAEB foi agrupado em cinco áreas de conteúdo: a) números e operações, b) medidas, c) geometria, d) análise de dados, estatística e probabilidade, e) álgebra e funções. As habilidades em Matemática foram classificadas em três categorias: a) compreensão de conceitos - reconhecer, dar nomes e apresentar exemplos de termos, definições e princípios; b) conhecimento e utilização de procedimentos - selecionar e aplicar corretamente cálculos, algoritmos, construções, estimativas, interpretar e produzir gráficos e construções geométricas; c) aplicação ou resolução de problemas - selecionar e usar adequadamente estratégias, modelos, procedimentos matemáticos, raciocínio lógico e espacial, indutivo e dedutivo, estatístico e proporcional; reconhecer e formular problemas, bem como verificar as soluções obtidas.

O SAEB, em 1995, segundo dados do INEP (1997), avaliou 90499 alunos do ensino fundamental (quarta e oitava séries) e médio (terceira série) de escolas públicas e particulares de todo o país. Foram construídos quatro níveis de proficiência que variavam de 0 a 150, 151 a 225, 226 a 300 e de 301 a 375. A média nacional de proficiência em Matemática na quarta série foi de 174, os alunos situando-se no 2° nível, sendo, portanto, capazes de reconhecer regras que relacionavam duas seqüências de números inteiros; demonstrar conhecimento consolidado a respeito das quatro operações e problemas simples envolvendo números naturais; identificar termos desconhecidos em sentenças matemáticas; ordenar números fracionários e com eles operar; resolver problemas simples envolvendo frações; operar com números decimais; efetuar conversões de medida de comprimento e de tempo; interpretar gráficos de barras e relacionar dados de tabelas simples com gráficos de setor. A média nacional dos alunos da oitava série foi de 253 e a dos alunos da terceira série do ensino médio 290, situando-os portanto no 3° nível de proficiência, onde os alunos demonstraram dominar os algoritmos e os conceitos envolvendo as quatro operações em problemas de mais de um passo; reconhecer o valor posicional relativo de um algarismo; reconhecer as frações equivalentes; transformar frações em números decimais e realizar cálculos com aproximações; utilizar regra de três e porcentagem; identificar leis de formação de seqüências formadas por números inteiros ou por figuras geométricas; resolver equações simples de primeiro grau; operar com monômios; discriminar ângulos agudos, retos e obtusos; reconhecer retas paralelas; aplicar proporcionalidade em triângulos semelhantes; interpretar gráficos cartesianos; relacionar dados envolvendo porcentagens a gráficos de setor; estimar volumes; converter unidades de medida de massa e aplicá-las em problemas simples.

Da avaliação do SAEB[1], em 1997, participaram 167196 alunos das mesmas séries de 1995. Foram delimitados quatro níveis de proficiência que variavam de 0 a 174, 175 a 249, 250 a 324 e 325 a 400. A média nacional de acertos dos alunos da quarta série do ensino fundamental em Matemática foi de 187 pontos (46,75% de acertos). Nesse nível os alunos eram

---

[1] Os dados referentes ao SAEB-97 foram obtidos pela Internet em julho de 2000, na página http://www.inep.gov.br/saeb/saeb97/saeb97.htm e na página http://www.inep.gov.br/noticias/saeb

capazes de reconhecer o valor de cédulas e moedas, ler horas em relógios digitais e analógicos, dizer que a hora tem 60 minutos e resolver problemas simples de adição e subtração com números naturais. Os alunos de oitava série obtiveram uma média de acertos de 250 pontos (62,50% de acertos) e os da terceira série do ensino médio, 307 pontos (76,75% de acertos), com ambos os grupos situando-se no terceiro nível de proficiência, onde os alunos eram capazes de reconhecer polígonos e quadriláteros; estabelecer relações entre os valores de cédulas e moedas; resolver situações de pagamento e troco (embora não soubessem operar com decimais); multiplicar, dividir e identificar unidades, dezenas e centenas; resolver problemas que envolviam mais de uma operação; adicionar e subtrair frações de mesmo denominador; interpretar gráficos de barra e de setor e identificar o gráfico mais adequado para representar uma dada situação.

De maneira geral, os dados levantados pelo SAEB em 1997 evidenciaram que os alunos da oitava série dominavam conteúdos da quarta série e os alunos da terceira série do ensino médio, conteúdos da oitava série do nível fundamental: 55,6% dos alunos da quarta série foram capazes de resolver problemas simples de adição e subtração de números naturais, desempenho mínimo que se espera dos alunos nesta série. 10,9% dos alunos da quarta série e 47,6% da oitava série alcançaram o nível 250 de proficiência, enquanto 12,8% dos alunos da terceira série do ensino médio sequer alcançaram este nível, que seria desejável para os sujeitos que estavam encerrando o primeiro ciclo do ensino fundamental (ou seja, a quarta série). O nível 400, que traduziria o mínimo no currículo escolar ao final da escolaridade básica, foi atingido apenas por 5,3% dos alunos da terceira série do ensino médio.

A média de acertos em Matemática, dos sujeitos do gênero feminino, foi ligeiramente inferior à do masculino na quarta série (185 pontos contra 188) e na oitava série (245 contra 256), mas superior à do gênero masculino na terceira série do ensino médio (295 pontos contra 290). Com base nos resultados dos SAEBs anteriores, o INEP identificou alguns fatores que teriam influenciado o desempenho dos alunos, a saber[2]:

- **idade do aluno:** o desempenho dos alunos caiu à medida que a idade avançou, em todas as séries, disciplinas e regiões estudadas.

[2] Dados obtidos através da Internet em julho de 2000, na página http://www.inep.gov.br/noticias/news_83.htm

- **grau de escolarização dos pais**: observou-se uma tendência de crescimento das médias de proficiência dos alunos à medida que se elevava o grau de escolarização do pai e da mãe.
- **descompasso entre o currículo proposto e o efetivamente aprendido:** os resultados obtidos mostraram que poucos alunos apresentaram um desempenho próximo do que seria o desejável em relação à proposta curricular;
- **formação dos professores:** alunos de professores com nível superior completo, bem pagos e com dedicação exclusiva obtiveram um desempenho melhor.
- **características da escola:** alunos oriundos de escolas bem conservadas, equipadas com biblioteca, laboratórios de ciências e de informática, dotadas de melhores recursos didáticos, alcançaram maior rendimento.

O SAEB de 1999 foi aplicado a 360451 alunos das mesmas séries que os anteriores e o nível de proficiência variava de zero a 500 pontos. Os resultados dessa avaliação ainda não se encontravam disponíveis quando da conclusão do presente estudo.

Com objetivos semelhantes aos do SAEB, o Estado de São Paulo, a partir de 1996 instituiu o SARESP - Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo. O primeiro SARESP[3] avaliou todos os alunos de terceira e sétima séries do ensino fundamental de todas as escolas estaduais de São Paulo. Em 1997, foram avaliados os alunos de quarta e oitava séries do ensino fundamental e em 1998, os alunos da quinta série do ensino fundamental e da primeira série do ensino médio. A média de acertos em 1996, nas questões de Matemática, foi de 65% para a terceira série; 30,6% para a sétima série diurna e 28,06% para a sétima série noturna. Em 1997, a média de acertos foi de 42,47% para os alunos da quarta série, 35,5% para os alunos da oitava série diurna e 34,5 % para os da oitava série noturna. Os dados das avaliações do SARESP evidenciaram que as variáveis raça, gênero e idade eram importantes em todas as séries e disciplinas (na oitava série noturna, o desempenho do gênero masculino foi superior em Matemática), que a repetência teve um forte impacto negativo no desempenho dos alunos da oitava série, enquanto a lição de casa e os exercícios de matemática, realizados com freqüência, na oitava série, contribuíram positivamente para o desempenho dos alunos.

[3] Os dados referente ao SARESP foram obtidos pela Internet em julho de 2000, na página http://www.educacao.sp.gov.br/resultados/saresp

Esses índices confirmaram a necessidade de mudança no ensino de Matemática, conforme é apontado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997b e 1998).

Na tentativa de contribuir para a melhoria do ensino de Matemática nas séries finais do ensino fundamental, o presente estudo buscou compreender e sistematizar os procedimentos de solução de problemas algébricos, utilizados pelos alunos das séries finais do ensino fundamental, bem como a relação entre a escolha do procedimento e as atitudes, considerando ainda a questão do gênero como uma variável de estudo.

O presente trabalho foi estruturado a partir da busca de estudos similares, do confronto de aspectos teóricos e da sistematização dos dados obtidos.

Assim, o Capítulo I apresenta uma revisão bibliográfica com os principais artigos que se relacionam com o tema em questão, tendo utilizado, dentre outras fontes, a base de dados do ERIC (*Educational Resources In Center*), que contém resumos de periódicos da área de Educação, Psicologia e correlatos; da UNIBIBLI, que fornece um catálogo de livros, dissertações, teses e periódicos da Universidade de São Paulo, da Universidade Estadual de Campinas e da Universidade Estadual Paulista, além da ANPEd (Associação Nacional de Pós - Graduandos em Educação), que fornece uma base de dados com resumos de dissertações e teses sobre educação em nível nacional.

O Capítulo II reúne elementos teóricos a respeito das habilidades, das atitudes e da solução de problemas, procurando contextualizar o tema da presente investigação com os aspectos mais relevantes da literatura revista e das abordagens da Psicologia Cognitiva, com ênfase especial na Álgebra.

O Capítulo III descreve o problema, sua justificativa, os sujeitos e o método utilizado no encaminhamento e realização das etapas da investigação.

No Capítulo IV está a análise dos dados, sendo apresentada, em primeiro lugar, uma análise descritiva da amostra e, em seguida, a análise estatística dos dados relativos às atitudes, às notas e aos problemas utilizados no teste matemático. A última parte do capítulo refere-se à análise das soluções apresentadas pelos alunos mais capazes, quando da utilização do método pensar em voz alta.

Finalizando, o Capítulo V apresenta as principais conclusões do estudo e o Capítulo VI algumas orientações gerais para a introdução de alguns conceitos algébricos.

Capítulo I

Revisão Bibliográfica

... só se vê bem com o coração. O essencial é invisível para os olhos.
Antoine de SAINT-EXUPÉRY

O presente trabalho teve como tema central o estudo das questões ligadas às atitudes, às diferenças relacionadas ao gênero e às habilidades na solução de problemas algébricos. Com base nessa delimitação, a revisão bibliográfica analisou trabalhos de pesquisa que tratavam da relação entre estas variáveis.

Gonçalez (1995), Brito (1996a), Moron (1998) e Araújo (1999) revisaram parte da literatura sobre as variáveis afetivas, mostrando que estas ajudavam a controlar, de maneira mais bem sucedida, o sucesso ou fracasso dos alunos em Matemática, ressaltando ainda que as pesquisas vinham confirmado a existência de laços fortes entre as variáveis afetivas e as realizações escolares.

Kloosterman e Cougan (1994), em um estudo que relacionou crenças e realizações matemáticas, verificaram que os alunos que apreciavam Matemática eram também confiantes em sua habilidade na disciplina e apresentavam desempenho melhor. Os pesquisadores submeteram 62 alunos de primeira a sexta séries, de uma escola cujos professores participavam de um projeto para melhoria do ensino de Matemática, a testes matemáticos e a entrevistas. Os instrumentos usados referiam-se a gostar da escola e da Matemática, ao recebimento de ajuda dos pais nas tarefas, opinião sobre a utilidade da Matemática e sobre a habilidade para aprender essa disciplina. A maioria dos alunos da amostra acreditava que era importante aprender Matemática e que qualquer um que tentasse poderia fazê-lo. O estudo mostrou também que havia pequena evidência de uma relação entre o apoio dos pais e as realizações dos alunos.

Ainda com relação ao peso das variáveis afetivas na aprendizagem, o estudo de Norwich (1994) apontou a auto-eficácia como o melhor preditor das intenções de aprendizagem dos estudantes. Os resultados obtidos por Hernández e Gómez-Chacon (1997), tendo como sujeitos alunos da escola secundária, sugeriram que, mesmo quando a mudança nas atitudes era lenta, a evolução e os resultados nas realizações matemáticas desses estudantes apresentavam incrementos positivos.

Para Whitney (1980), as atitudes representariam pensamentos que, se consolidados, poderiam tornar-se crenças passíveis de manipulação sem exame. Esse autor mostrou as formas de intervir nas atitudes, ressaltando que estas não são ensinadas; mas que poderiam ser criadas condições favoráveis para o seu surgimento e desenvolvimento.

Se as atitudes podem ou não ser ensinadas, é uma questão que não se encontra bem definida na literatura disponível. Estudos como os de Taylor e outros (1991); Daniels e outros (1991), mostraram que atividades de ensino adequadas levam ao surgimento de atitudes mais positivas, como havia afirmado Whitney (1980). Por outro lado, autores como Klausmeier (1977) e Brito (1996a) afirmaram que as atitudes surgem e podem ser modificadas porque elas são aprendidas, logo podem ser ensinadas. Este estudo se apoiou nesta segunda posição por julgá-la mais coerente.

O impacto das variáveis afetivas é freqüentemente subestimado porque elas tendem a ter efeitos indiretos nas realizações escolares, por exemplo, nas leituras extraclasse e no engajamento em trabalhos escolares, só se refletindo posteriormente no desempenho dos alunos, como apontaram os trabalhos de Meece, Wigfield e Eccles (1990) e de Reynolds e Walberg (1992).

Brito (1996a) relatou que os estudos estavam mais concentrados nas diferenças de desempenho matemático entre os gêneros, *onde os aspectos cognitivos sobrepujam os afetivos* (p. 107) e poucos eram os estudos que relacionavam as três esferas componentes do processo de ensino-aprendizagem: a afetiva, a cognitiva e a motora.

Tentando relacionar variáveis afetivas e desempenho, Bassarear (1991) realizou um estudo com 83 mulheres e 63 homens de um curso de Matemática para universitários. Com a finalidade de avaliar a habilidade matemática, os sujeitos foram submetidos a dois testes diagnósticos e para avaliar as variáveis afetivas (divididas em quatro grupos: ansiedade, atribuição de sucesso e fracasso, crenças e motivação) os sujeitos foram submetidos a um questionário. A análise dos dados mostrou que as variáveis afetivas eram um fraco preditor do desempenho e que apesar das médias das notas entre os gêneros serem praticamente iguais, o gênero feminino apresentava um índice de autoconfiança na sua habilidade em aprender Matemática significativamente menor que o índice do gênero masculino.

Um estudo que também se ocupou das diferenças de atitudes e suas relações com o gênero, foi o desenvolvido por Aksu (1991), levado a efeito na Turquia, com 50 alunos de Matemática matriculados no primeiro ano de bacharelado e 32 oriundos do primeiro ano de formação de professores, divididos igualmente segundo o gênero. Os sujeitos foram submetidos a uma escala de atitudes em relação à Matemática (Aiken, 1979), tendo respondido a ela em 1986 e em 1988. De uma maneira geral, as atitudes dos alunos decresceram desde o início até o período final na universidade. Em 1986, as mulheres tinham atitudes significativamente mais positivas que os homens, porém, dois anos mais tarde, esta diferença já não existia. As atitudes em relação à Matemática dos alunos de licenciatura eram significativamente mais positivas que as apresentadas pelos alunos de bacharelado, fato este que, segundo o autor, se devia a preocupações com o emprego futuro: os licenciados tinham emprego assegurado pelo Ministério da Educação assim que terminassem a faculdade, enquanto os bacharéis não tinham qualquer perspectiva de emprego.

Reynolds e Walberg (1992) estudaram a relação entre as atitudes e as realizações matemáticas de 2553 alunos da segunda série do segundo grau de uma escola pública. Os alunos foram avaliados no início e no final da segunda série e no início da terceira série do segundo grau. Foram colhidos dados a respeito dos pais e professores destes alunos. Para avaliar as realizações matemáticas, os sujeitos foram submetidos a testes sobre habilidade e conhecimento, aplicações de rotina e solução de problemas desenvolvidos pelo *National Assessment of Educational Progress (1986)*. A atitude foi medida através de quatro itens sobre a percepção da utilidade da Matemática. Os resultados mostraram que o meio familiar e as realizações prévias tiveram grandes efeitos nas realizações dos estudantes e que a motivação, as atitudes, o ambiente de sala de aula, a quantidade e a qualidade dos cursos de Matemática influenciaram significativamente os resultados alcançados pelos alunos.

Outras evidências de pesquisas mostraram que crianças provenientes de lares cujos pais eram mais envolvidos e acompanhavam o desempenho escolar conseguiam obter melhores resultados na escola.

Gage e Berliner (1992) relataram que mais do que 20% dos ingressantes do *Massachusetts Institute of Technology* e mais que 25 % dos estudantes da Universidade da Califórnia eram americano-asiáticos, e estes representavam cerca de 2% da população americana. De acordo com eles, o sucesso dos americano-asiáticos estava aparentemente ligado a aspectos familiares. As mães americano-asiáticas, por exemplo, enfatizavam a necessidade de estudo contínuo e os benefícios econômicos do sucesso escolar, apresentavam alta expectativa com relação ao desempenho de seus filhos e, normalmente, mostravam-se insatisfeitas com o nível de desempenho deles, esperando que as crianças trouxessem tarefas escolares para casa, além de limitarem o tempo que elas podiam despender assistindo à televisão.

Ainda com relação à influência que os pais podem exercer nas atitudes das crianças, podem-se citar os estudos de Jacobs (1991) e Tocci e Engelhard (1991). O primeiro analisou a influência dos estereótipos sexuais nas atitudes de pais e crianças da sexta série do ensino básico à segunda série do ensino secundário. A análise dos dados mostrou que a autopercepção da criança não é diretamente influenciada pelo estereótipo dos pais. As crenças dos pais sobre a criança influenciariam diretamente a autopercepção da criança e tanto o estereótipo dos pais como a autopercepção da criança influenciariam no desempenho em Matemática.

Tocci e Engelhard (1991) realizaram um estudo comparativo, examinando a influência dos pais sobre as atitudes de adolescentes americanos e adolescentes tailandeses. O objetivo era investigar as diferenças de atitudes em relação à Matemática entre os gêneros, as relações entre atitudes e o desempenho matemático, o apoio dos pais e as diferenças de atitudes que eles adotariam em relação ao gênero. Os resultados mostraram diferenças de atitudes relacionadas ao gênero nos dois grupos de adolescentes, sendo que o gênero feminino acreditava, mais que o gênero masculino, que a disciplina era de domínio masculino. Os pais estavam entre aqueles que mais influenciavam as atitudes dos alunos.

Também o estudo de Schiff, Duymé, Dumaret, Stewart, Tomkiewicz e Feingold (1978, citado por Gage e Berliner, 1992) corroborou a influência da família no desempenho das crianças. O estudo foi realizado com 32 crianças francesas, filhos de mães da classe trabalhadora, que haviam sido adotadas por famílias de classe média alta e 39 crianças, filhos das mesmas mães trabalhadoras e que não haviam sido entregues à adoção. As crianças adotadas tiveram uma taxa de fracasso escolar de 13%, bem menor do que a taxa de 56% das demais.

Mais recentemente, os pesquisadores Cooper, Lindsay, Greathouse e Nye (1998) conduziram um estudo com setecentos trios compostos por sujeitos matriculados na escola elementar e média, um dos seus responsáveis e mais o respectivo professor. E verificaram que a participação dos pais, nas tarefas de casa, afetava as realizações escolares daqueles estudantes.

A influência da atitude dos pais em relação à Matemática na atitude dos filhos em relação a esta disciplina foi objeto de estudo de Caston (1993), que analisou os resultados obtidos por 220 alunos da terceira série do segundo grau no *California Achievement Test*, para medir o desempenho matemático, e na Escala de Atitudes (Dutton, 1951), para avaliar as atitudes. Os pais dos alunos responderam apenas à escala de atitudes. Os resultados apontaram que não existiam diferenças significativas entre as atitudes das mães e as atitudes dos filhos; todavia, as atitudes dos pais pareciam influenciar de maneira significativa as atitudes dos filhos. Os alunos também foram agrupados por nível de desempenho e por gênero, sendo que os resultados mostraram que não haviam diferenças significativas entre as atitudes dos sujeitos que pudessem estar relacionadas a estas variáveis.

As atitudes em relação à Matemática de 209 alunos do ensino fundamental foram investigadas por Utsumi e Mendes (2000). Os alunos foram submetidos a uma escala de atitudes (Aiken, 1961; Aiken e Dreger, 1963; Brito, 1996a e 1998) e a um questionário para sua caracterização, elaborado a partir do instrumento elaborado por Brito (1996a). A média obtida na escala de atitudes foi de 52,718, com desvio padrão de 11,837, sendo a média do gênero feminino ligeiramente mais positiva que a do masculino, o que não é um fato comum na literatura. Foram encontradas diferenças significativas nas atitudes dos sujeitos quanto ao tipo de escola que freqüentavam (pública ou particular), quanto à freqüência com que compreendiam os problemas matemáticos trabalhados em sala de aula, quanto à série em que estudavam, à idade e a percepção que possuíam de seu desempenho matemático. As autoras sugeriram a adoção de atividades diferenciadas, tais como trabalhos em grupos cooperativos e a solução de problemas para tentar aumentar as atitudes positivas em relação à Matemática e o desempenho dos alunos nessa disciplina.

Algumas pesquisas relacionam as atitudes em relação à Matemática com a qualidade do trabalho do professor e o ambiente de aprendizagem. Autores como Tesser e Shaffer (1990), Anderson e Anderson (1991), Cacioppo, Marshall-Goodell, Tassinary e Petty (1992) sugeriram que a atitude do professor seria um fator preponderante no aprendizado dessa disciplina. Autores como Csikszentmihalyi (1988), Mc Leod (1990), Mc Leod e Adams (1989), Schiefele (1992) verificaram que a solução de problemas, a criatividade e a compreensão profunda do material de aprendizagem requeria um alto nível de "emoções positivas" e de "motivação intrínseca".

Nesta mesma linha de pesquisa, Karp (1991), usando o método de estudo de caso, demonstrou que os professores com atitudes positivas em relação à Matemática desenvolviam em seus alunos a autonomia, possibilitando-lhes um maior desenvolvimento do raciocínio e das habilidades básicas necessárias à solução de problemas. Por outro lado, os professores com atitudes negativas em relação à Matemática desenvolviam em seus alunos uma total dependência, pois estes eram desencorajados a participar das atividades, apresentavam pouca confiança em si próprios e baixa disponibilidade para superar obstáculos. Os sujeitos deste estudo, professores de quarta e sexta série de uma escola pública de Nova York, foram observados em sala de aula e responderam a duas Escalas de Atitudes (Fennema e Sherman, 1976; Dutton, 1976). O estudo sugeriu que fossem desenvolvidos programas de intervenção que ajudassem os professores com atitudes negativas em relação à Matemática a modificá-las.

Enfatizando a importância das atitudes positivas dos professores, Leat (1993) lembrou que o pensamento é indissociável do sentimento e, portanto, as tentativas para desenvolver a competência do professor e a qualidade do ensino deveriam levar em consideração os fatores de ordem afetiva relacionados ao ensino.

Com o objetivo de investigar as relações entre a escolha profissional e as habilidades e atitudes em relação à Matemática, Araújo (1999) aplicou um questionário, uma escala de atitudes, um teste matemático e uma série de problemas algébricos a 145 alunos do ensino médio e 233 do ensino superior. Foram encontradas diferenças significativas no desempenho e nas atitudes em relação à Matemática, favorecendo os sujeitos da área de ciências exatas, que eram predominantemente do gênero masculino. A pesquisadora ressaltou que o fato dos sujeitos das áreas de ciências humanas e biológicas não gostarem das disciplinas de ciências exatas, parecia ser um indicador da influência desse sentimento negativo na escolha profissional.

A influência das atitudes na escolha profissional dos indivíduos também foi objeto de estudo de Daniels e outros (1991) que, partindo das conclusões de várias pesquisas, afirmaram que as mulheres possuíam atitudes mais negativas em relação à Matemática do que os homens e também não apresentavam um desempenho satisfatório nesta disciplina, fatos que, dentre outros, as impossibilitava de ingressarem nas áreas tecnológicas. Os pesquisadores desenvolveram um estudo, tendo como sujeitos alunas superdotadas de escolas rurais isoladas, com o objetivo de determinar a eficácia de um programa de intervenção que aumentasse as atitudes positivas em relação à Matemática. As alunas foram divididas em dois grupos - experimental e de controle - e após o período de intervenção foram encontradas diferenças significativas entre esses grupos, levando os autores a concluir que os ganhos mostrados pelo grupo experimental poderiam ser atribuídos à variedade e abrangência das atividades oferecidas pelo programa de intervenção. O fato corroborou a afirmação de Whitney (1980) sobre a possibilidade de serem criadas, nas escolas, atividades que favoreçam o surgimento de atitudes mais positivas em relação à Matemática.

Os estudos de Hyde, Fennema e Lamon (1990), Frost, Hyde e Fennema (1994), Seegers e Boekaerts (1996), que relacionaram realizações, atitudes e gênero, confirmaram a literatura, indicando que os sujeitos do gênero feminino apresentavam crenças menos favoráveis a respeito de suas habilidades matemáticas.

Com relação às realizações matemáticas, o estudo de Seegers e Boekaerts (1996), envolvendo 186 alunos entre onze e doze anos, constatou que os meninos enfrentavam de maneira mais positiva que as meninas situações de aprendizagem com testes matemáticos, além de superá-las nas tarefas matemáticas que refletiam os conteúdos dados em sala de aula, contradizendo o estudo de Benbow (1992), que indicou que os sujeitos masculinos apresentavam desempenho melhor nos testes padronizados, enquanto o gênero feminino se sobressaía em testes semelhantes àqueles usados em sala de aula.

Outros estudos também têm mostrado que o gênero feminino apresenta atitudes mais negativas em relação à Matemática que os homens. Tobias e Weissbrod (1980) e Sherman

(1982) apresentaram revisões de alguns estudos deste tipo, enfatizando que as diferenças de atitudes, entre os gêneros, iriam acentuando-se com o aumento da idade.

Com o objetivo de verificar se havia diferença de desempenho em Matemática que pudesse estar relacionado ao gênero ou às influências sócio-culturais, Sherman (1980) submeteu 200 alunos de oitava série a testes sobre habilidade verbal, visualização espacial e solução de problemas, a Escala de Atitudes em relação ao Sucesso em Matemática de Fennema e Sherman (1976) e a Escala de Motivação para a Matemática. Os alunos foram avaliados novamente quando estavam na terceira série do segundo grau. Os resultados mostraram que, quando estavam na oitava série, os meninos e as meninas apresentavam habilidades cognitivas e atitudes semelhantes, porém na terceira série do segundo grau o desempenho dos meninos era superior ao desempenho das meninas e as atitudes das meninas em relação à Matemática decresceram. Não foram encontradas diferenças nos resultados dos testes de visualização espacial que pudessem estar relacionadas ao gênero. O estudo apontou ainda que os sujeitos do estudo percebiam a Matemática como um domínio masculino e isto, segundo a autora, poderia ser atribuído à influência dos fatores sócio-culturais.

Em um outro estudo sobre atitudes, Sherman (1982) pesquisou as atitudes de 84 alunas iniciantes de segundo grau, as quais responderam a escala de atitudes em relação à Matemática de Fennema e Sherman quando iniciaram o segundo grau e tornaram a respondê-la três anos depois, com o objetivo de verificar se havia mudança de atitudes. As alunas foram submetidas a um teste matemático, a entrevistas sobre planos educacionais profissionais e também quanto a suas expectativas em relação à Matemática. Os resultados mostraram que, quanto menor era a autoconfiança das alunas para aprender Matemática, tanto menor era a procura pelo curso de Matemática.

Confirmando os estudos de Sherman, Hanna (1994) verificou que algumas variáveis que contribuíam para que as meninas tivessem atitudes mais negativas em relação à Matemática foram: a) o maior número de reprovação nesta disciplina; b) percepção que possuíam da Matemática como um domínio essencialmente masculino; c) autopercepção negativa sobre suas próprias capacidades para aprender Matemática; d) incentivos diferenciados dados pelos pais quando se tratava de meninos ou meninas, em relação à aprendizagem dessa disciplina; e) interesse profissional futuro.

Para Brito (1996), a crença de que a Matemática é um domínio exclusivamente masculino é mantida e reforçada pelo próprio sistema educacional, pois está presente também nas concepções da escola, da família e nos meios de comunicação.

Bandalos, Yates e Thorndike-Christ (1995) usaram modelos de equações estruturais para testar um modelo de teste de ansiedade. As variáveis do modelo incluíam o gênero, o tempo de permanência no curso de Matemática, atribuições de sucesso e fracasso, autoconceito sobre o desempenho matemático, percepção do próprio desempenho, realização, teste geral de ansiedade e teste estatístico de ansiedade. A análise dos dados mostrou que os sujeitos do gênero feminino que atribuíram sucesso a causas comportamentais apresentaram níveis mais altos de autoconceito matemático que os que atribuíram seu sucesso a causas externas. Os sujeitos do gênero masculino que atribuíram falha a causas externas apresentaram níveis superiores de ansiedade no teste estatístico.

Larose e Roy (1995) verificaram quinze itens sobre fatores comportamentais, emocionais e crenças que interferiam na situação de aprendizagem, sendo estas situações típicas das duas universidades estudadas (uma universidade rural e uma universidade urbana). Nas duas universidades, as disposições pessoais femininas foram significativamente diferentes das masculinas. O gênero feminino demonstrou melhor preparação, qualidade de atenção superior ao estudar, facilidade em pedir ajuda aos colegas quando tinha problemas acadêmicos, além de uma crença maior nos métodos de trabalho efetivo. Em geral, o gênero feminino mostrava crenças e comportamentos mais favoráveis à aprendizagem. Porém, quando as disposições eram de natureza afetiva, os sujeitos do gênero feminino da escola rural apresentaram reações fortemente negativas.

O estudo de Pattison e Grieve (1984) mostrou diferenças entre os gêneros nas realizações matemáticas, sendo que cada um se sobressaía em determinados conteúdos. Foram estudados: 192 meninos e 156 meninas da segunda série do segundo grau; 11 meninas e 31 meninos da quarta série do segundo grau do curso de Matemática Pura e Aplicada; 95 meninas e 91 meninos da quarta série do segundo grau do curso de Matemática Geral de uma escola australiana com longa reputação no incentivo das realizações em Matemática e Ciências. Os sujeitos foram submetidos a teste verbais e matemáticos, abrangendo Geometria (bi e tridimensional), Aritmética e Lógica. Os resultados mostraram que o gênero feminino apresentou desempenho melhor nos problemas abstratos e de Lógica, enquanto o gênero masculino demonstrou maior domínio nos problemas de Geometria, escala e proporcionalidade.

O estudo conduzido por Alves (1999), a respeito das realizações matemáticas, mostrou a influência de alguns componentes da habilidade matemática (percepção, generalização, encurtamento de raciocínio e memória matemática) no desempenho de estudantes em problemas aritméticos. O estudo foi realizado em duas fases, sendo que, na primeira, a autopercepção de desempenho e o desempenho de 53 sujeitos concluintes do ensino médio foram aferidos. A partir desse estudo preliminar, foram selecionados nove sujeitos que responderam a um teste de raciocínio verbal, uma escala de atitudes em relação à Matemática e uma bateria de problemas aritméticos, extraídos daqueles propostos por Krutetskii (1976). A análise dos resultados evidenciou que os sujeitos da primeira fase encontraram dificuldade na obtenção da informação matemática a partir do enunciado verbal do problema. Na segunda parte do estudo, foi verificado que o desempenho dos sujeitos, na solução de problemas aritméticos, não era determinado pelos componentes da habilidade matemática estudados, nem pelas atitudes, mas poderia estar sendo influenciado pelo raciocínio verbal.

Brito, Fini e Garcia (1994) afirmaram que o raciocínio verbal não era um fator determinante dentre os elementos componentes da estrutura das habilidades matemáticas, embora tivesse relação com o fator matemático geral. Os pesquisadores estudaram a relação entre a solução de problemas e o desempenho em um teste verbal, tendo como sujeitos 60 alunos de um curso noturno de licenciatura em Matemática. Os sujeitos responderam a uma prova com 12 problemas de natureza algébrica, aritmética e geométrica sem a questão formulada. Eles eram solicitados, a partir da compreensão das relações e dados do problema, a formular a pergunta adequada e, em seguida, a solucionar o problema. Além do teste matemático, os sujeitos foram submetidos a um teste de raciocínio verbal que se destinava a avaliar a habilidade de abstrair e generalizar conceitos expressos em palavras. O teste matemático foi considerado muito simples para o nível dos sujeitos. A análise dos dados evidenciou que as variáveis compreensão da natureza do problema matemático, resolução do problema, raciocínio matemático e raciocínio verbal estavam interligadas e exerciam influência entre si: a compreensão da natureza do problema estava fortemente associada à resolução do problema e a compreensão verbal do problema se mostrou mais associada ao raciocínio matemático que ao raciocínio verbal. Os pesquisadores concluíram que a compreensão da natureza do problema, embora não predominantemente verbal, era tão importante para a solução do mesmo quanto o conjunto de habilidades matemáticas. Dessa forma, seria *necessário um mínimo de habilidade verbal para possibilitar a compreensão da natureza matemática do problema.* (p. 43)

A aparente contradição entre os dois estudos poderia ser explicada pela diferença de idade dos sujeitos dessas pesquisas - alunos do ensino médio e alunos do ensino superior (área de exatas) - pois, de acordo com Davis-Dorsey, Ross e Morrison (1991), a reformulação verbal do problema matemático tem mais influência no desempenho de alunos mais novos do que no de alunos mais velhos. O estudo conduzido por Davis-Dorsey e outros (1991) evidenciou que os sujeitos mais novos mostravam mais tendência a fracassar na reformulação do problema matemático quando a formulação verbal era muito complicada, mas podiam resolver outros problemas com o mesmo nível de dificuldade matemática quando a formulação era mais simples.

Fennema e Carpenter (1981) analisaram as realizações matemáticas de mais de 70.000 alunos de 9, 13 e 17 anos, que participaram da segunda Avaliação de Matemática do *National Assessment Educational Progress (NAEP)*. Elas dividiram o conteúdo do teste em cinco tópicos: a) número e numeração, b) variáveis e relações, c) geometria, d) medida e e) outros tópicos. Cada tópico foi avaliado em quatro níveis: conhecimento, habilidade, compreensão e aplicação. Os resultados da análise mostraram que, em geral, existia pequena diferença entre os gêneros, bem como na faixa de 9 a 13 anos, nas realizações matemáticas. Entretanto, aos 17 anos, o gênero feminino não conseguia atingir o mesmo nível de desempenho que o masculino, principalmente nas tarefas complexas, mesmo quando ambos haviam freqüentado o mesmo curso de Matemática. Os autores ressaltaram a importância de se encorajar as meninas a freqüentarem os mesmos cursos que os meninos, porém lembraram que este seria apenas o primeiro passo de uma série de mudanças que deveriam ocorrer com o objetivo de melhorar as realizações matemáticas e as atitudes do gênero feminino.

Um estudo mais recente com alunos de quarta e oitava séries e do último ano do ensino secundário de 26 países, o *National Center for Education Statistics - NCES*[4] - ofereceu dados interessantes. Em relação à quarta série, não foram encontradas diferenças significativas nas

---

[4]Os dados do TIMSS foram obtidos pela Internet em novembro de 1998 na página htttp://www.nces.ed.gov/timss/

realizações matemáticas relacionadas ao gênero de estudantes em 22 países, incluindo os Estados Unidos, avaliados pelo *Terceiro Estudo Internacional de Matemática e Ciências (TIMSS)*. Em 10 países, incluindo os Estados Unidos, foram encontradas diferenças significativas nas realizações em Ciências, favorecendo o gênero masculino. O teste de Matemática da quarta série incluiu um conjunto de itens planejados para testar a habilidade dos alunos com: a) números inteiros (valor posicional, ordenação, comparação, solução de problemas de adição, subtração e multiplicação); b) frações e proporcionalidade (reconhecimento e operações com frações e decimais, problemas com enredo); c) medida, estimativa e sentido numérico (medidas comuns de tamanho, tempo e temperatura); d) representação e análise de dados e probabilidade; e) geometria (visualização de formas bidimensionais e tridimensionais, propriedades e termos básicos, equivalência de figuras e coordenadas) e f) padrões, relações e funções. Em cinco das seis "áreas" investigadas, a média dos alunos americanos foi superior a média internacional em cada área. O teste de Matemática da oitava série foi aplicado em 41 países. Com relação ao currículo americano, o estudo mostrou que este cobria os assuntos do currículo de sétima série dos outros países. Por exemplo, os estudantes japoneses e alemães estudavam Álgebra e Geometria na oitava série, enquanto os estudantes americanos estudavam Álgebra apenas nos cursos de nível mais avançado e poucos estudavam Geometria. A média dos alunos americanos em Matemática ficou abaixo da média internacional e abaixo da média dos alunos de quarta série. No último ano do ensino secundário, o teste matemático exigiu analisar problemas, decidir que ferramentas matemáticas usar e os algoritmos usados na solução. Os itens demandavam não somente uma base forte de conhecimentos, mas também uma variedade de outras habilidades tais como raciocínio, aplicação de conhecimento e planejamento da solução. O desempenho dos estudantes americanos não foi bom, pois alunos mais jovens de países como a Nova Zelândia e Áustria apresentaram resultados significativamente melhores. Os estudantes russos com idades inferiores, que cursavam o equivalente à segunda série do ensino médio brasileiro, tiveram um desempenho semelhante ao dos estudantes americanos.

As diferenças nas realizações matemáticas relacionadas ao gênero, utilizando problemas algébricos contendo informações insuficientes, suficientes e irrelevantes para a solução, foram analisadas por Low e Over (1993). Os autores verificaram que as meninas identificavam, com mais freqüência que os meninos, as informações irrelevantes como sendo necessárias para a solução do problema, porém elas eram mais capazes que os meninos na solução de problemas contendo informações suficientes, dando a impressão de que uma habilidade compensava a falta da outra.

Stipek e Gralinski (1991) realizaram um estudo sobre as diferenças no desempenho matemático e as relações com o gênero. Estudaram também as crenças e respostas emocionais ao sucesso e fracasso em Matemática, tendo como sujeitos 194 estudantes de terceira série de uma escola elementar e 279 de terceira série do segundo grau. Os pesquisadores verificaram que o gênero feminino apresentava crenças mais negativas no futuro desempenho e atribuía o possível fracasso à pouca habilidade que possuía, enquanto o sucesso era pouco relacionado à habilidade; em contrapartida, os sujeitos do gênero masculino apresentavam crenças mais positivas no desempenho que teriam e atribuíam o sucesso à grande habilidade que possuíam, sendo o fracasso pouco relacionado à falta de/ou pouca habilidade. Com relação à série dos estudantes, a pesquisa mostrou que as diferenças entre os gêneros, nas variáveis estudadas, apareciam desde a terceira série do primário, embora afetassem menos o desempenho das alunas mais novas que o das alunas mais velhas. A conclusão dos pesquisadores apontou para a necessidade de os programas de intervenção serem planejados visando melhorar o desempenho matemático das alunas desde o início da escolaridade.

A análise dos dados do estudo de Shiomi (1992) demonstrou que a atitude em relação à Matemática apresentou efeitos significativos no desempenho também dos alunos japoneses, apontando a existência de diferenças desses efeitos ao longo das séries. O estudo mostrou um alto índice de ansiedade em relação à Matemática por parte do gênero feminino, enquanto o gênero masculino mostrou um alto índice de confiança para aprender esta disciplina.

Sax (1994) realizou um estudo com estudantes universitários, no qual descreveu a maneira como os gêneros percebiam as próprias habilidades matemáticas e quais eram os fatores que contribuíam para o desenvolvimento dessa percepção. O estudo mostrou que a universidade, dentre outras coisas, reforçava as diferenças entre os gêneros e diminuía a "auto-estima matemática" do estudante, sendo este efeito mais forte nas alunas.

Mais recentemente, Brito (1996) realizou um estudo, com alunos da terceira série do primeiro grau à terceira série do segundo grau, sobre atitudes e autopercepção de desempenho, relacionando-as à idade, série e gênero. Os resultados mostraram que não existia estabilidade nas atitudes de meninos e meninas e, aparentemente, as sétimas e oitavas séries eram os períodos considerados cruciais para as atitudes. A análise dos dados revelou a existência de diferenças significativas entre os gêneros com relação às atitudes, pois o gênero masculino as apresentava mais positivas em relação à Matemática que o gênero feminino. A pesquisadora afirmou que as diferenças de desempenho entre os gêneros não podiam ser atribuídas apenas às diferenças de habilidades e salientou que o fator cultural desempenhava um papel importante neste resultado. Mostrou ainda que as atitudes em relação à Matemática estavam diretamente relacionadas ao sucesso ou fracasso na disciplina e aos aspectos a ela relacionados, citando como fontes de influência a capacidade para a solução de problemas, o método usado pelos professores e as atitudes dos professores, pais e colegas.

Gwizdala e Steinback (1990) estudaram a importância e utilidade atribuída à Matemática, a auto-estima em Matemática e as questões sobre gostar ou não desta disciplina, tendo como sujeitos alunas de três escolas preparatórias para a universidade - uma escola católica exclusivamente feminina, outra católica mista e outra laica mista. A análise dos dados mostrou que a maioria das alunas apresentava atitudes positivas em relação à Matemática, o que é incomum na literatura, e o desempenho matemático delas era alto. As meninas da escola exclusivamente feminina apresentavam atitudes mais positivas e maior envolvimento em sala de aula, segundo o pesquisador, por se sentirem mais confortáveis, confiantes e seguras que as alunas da escola mista. Os autores concluíram mostrando a necessidade de estudos sobre as variáveis que afetariam as atitudes, a auto-estima e o desempenho das alunas com relação à Matemática.

Estudo realizado por Schiefele e Csikszentmihalyi (1995), relacionando interesse, motivação adquirida, habilidade matemática, qualidade da experiência (uso de estratégias) e realizações matemáticas, mostrou que a qualidade das experiências estavam relacionadas principalmente ao interesse em relação à Matemática e que a habilidade não estava altamente correlacionada com a experiência.

Steinkamp e Maehr (1983) e Reynolds e Walberg (1991), apontaram para três grupos principais de fatores que influenciariam as realizações matemáticas: as características cognitivas do aluno (p.e., uso de estratégias), meio familiar (p.e., ocupação dos pais) e o contexto escolar (p.e., qualidade da instrução).

No estudo realizado por Benbow (1992) foram encontradas diferenças de desempenho relacionadas ao gênero em 1996 estudantes superdotados e altamente habilidosos em Matemática, que foram testados durante a sétima e oitava séries. De modo geral, o gênero feminino tendia a apresentar um desempenho melhor em sala de aula, que aparecia em notas e prêmios, porém o gênero masculino tendia a participar mais nas áreas de Matemática e Ciências, obtinha desempenho melhor nos testes padronizados destas disciplinas e tinha aspirações educacionais mais elevadas. No geral, a pesquisa mostrou que, além da habilidade matemática, existiam outros fatores relevantes para o desempenho futuro, tais como as oportunidades educacionais, os antecedentes familiares e as atitudes.

Malan (1993) procurou identificar as atitudes em relação à Matemática presentes em estudantes secundaristas nigerianas e quais as relações entre essas atitudes, o tipo de escola (mista ou homogênea) e a variável gênero do professor (se professor ou professora). A análise dos dados mostrou que as estudantes da escola homogênea, onde as aulas de Matemática eram ministradas por professoras, apresentavam atitudes mais positivas, enquanto na escola mista, onde os professores de Matemática eram homens, as atitudes positivas eram consideravelmente mais baixas. O autor conjecturou que os professores, provavelmente, não motivavam as alunas a estudar Matemática, direcionando-as mais às Artes, e sugeriu que fossem criados cursos intensivos de Matemática nos quais as meninas fossem incentivadas a superar as barreiras psicológicas que impediam o seu bom desempenho matemático.

Born e Lynn (1994) estudaram os resultados obtidos por estudantes americanos, escoceses e holandeses, num teste que foi padronizado na Holanda em 1982. Os resultados da análise dos dados confirmaram a literatura tradicional, onde os homens aparecem como melhores na habilidade espacial e as mulheres nas habilidades de velocidade de percepção e habilidade de memória.

Leeson (1995) investigou o desempenho de alunos da sexta série de escolas australianas que participaram de duas competições matemáticas nacionais em 1990 e 1992. O estudo verificou que o desempenho do gênero masculino era superior ao do gênero feminino em itens que envolveram estimativas (de números e medidas), proporções, velocidade, espaço e tempo, porcentagem e problemas incomuns. Por outro lado, o desempenho das meninas era superior na identificação de figuras, padrões numéricos e reflexão de formas.

Rosén (1995) submeteu 1224 alunos da sexta série, na Suécia, a uma bateria de treze testes de habilidade e três testes de desempenho. A análise dos dados mostrou que não havia diferenças relacionadas ao gênero, quando se tratava da estrutura das habilidades cognitivas. Foram encontradas diferenças significativas, favorecendo o gênero feminino na inteligência geral e em alguns outros fatores mais específicos. Por outro lado, o gênero masculino apresentou médias superiores nos testes de dimensão espacial e numérica, assim como na habilidade verbal.

Robinson, Abbott, Berninger e Bussue (1996) estudaram a organização das habilidades cognitivas e diferenças relacionadas ao gênero no raciocínio matemático avançado em crianças mais novas (pré-escolares e jardim de infância). Os meninos obtiveram escores mais altos em oito medidas quantitativas, de um total de onze; nenhuma, de três medidas verbais e apenas uma, de três medidas espaciais, incluindo memória espacial e quantitativa. Os fatores quantitativos e espaciais mostraram-se altamente correlacionados; o fator verbal correlacionou-se fracamente com os outros, mas mostrou uma relação mais forte com o fator espacial para os meninos do que para as meninas.

Os pesquisadores Benbow (1988), Stanley (1990), Dark e Benbow (1990 e 1991) e Casey, Nuttall, Pezaris e Benbow (1995) também estudaram as diferenças de gênero e habilidades cognitivas para o raciocínio matemático avançado, mas com grupos de crianças mais velhas (por volta da sétima série).

Existem poucos estudos sobre matemática avançada com crianças mais novas e, dentre estes, podem ser citados Assouline e Lupkowski (1992), Lupkowski - Shoplik, Sayler e Assouline (1993), Mills, Ablard e Stumpf (1993) e Stanley (1994), que têm encorajado a identificação precoce de alguns talentos matemáticos. As crianças talentosas menores de dez anos têm sido largamente ignoradas. Questões de diferenças relacionadas ao gênero e relações com as habilidades cognitivas são praticamente inexploradas nesses grupos.

Garcia (1995) realizou um estudo comparativo entre o conceito de habilidade para pensar de forma resumida (Krutetskii) e o conceito de automatização do processamento da informação (Sternberg). O pesquisador submeteu 69 estudantes de graduação a uma prova de raciocínio verbal do teste de aptidões específicas (DAT), um teste de raciocínio matemático, três testes para avaliar a habilidade de automatizar o processamento da informação e três testes para avaliar a habilidade de pensar em estruturas abreviadas. Os resultados obtidos apoiaram a idéia de que a habilidade para automatizar o processamento da informação e a habilidade para pensar em estruturas abreviadas eram dois fenômenos distintos, pois a segunda encontrava-se associada ao raciocínio matemático e a automatização, não parecia estar relacionada, de forma específica, nem ao raciocínio matemático e nem ao raciocínio verbal.

Estudando a solução de problemas algébricos por alunos franceses, Freitas (1994) conduziu três experimentos com o objetivo de identificar os tipos de demonstrações matemáticas produzidas por alunos da primeira série do ensino médio, que estavam mudando do pensamento aritmético para o algébrico. Além disso, tentou avaliar as representações que os alunos possuíam da demonstração matemática. No primeiro experimento, 147 sujeitos foram submetidos a um teste escrito que continha um problema que deveria ser resolvido e sua solução, demonstrada. No segundo experimento foram observados, durante três sessões, seis pares de sujeitos solucionando problemas. O último experimento foi realizado com estudantes brasileiros. Foi solicitado a eles que escolhessem entre duas soluções (uma demonstração por enunciados[5] e uma demonstração algébrica[6]) para um determinado problema. Em seguida, era apresentado um problema para solução. A análise dos resultados evidenciou que, tanto entre os sujeitos brasileiros como franceses, as demonstrações algébricas eram mais valorizadas como demonstrações que validavam respostas; entretanto, os sujeitos escolhiam menos essa forma de solução.

Parcialmente em desacordo com Freitas (1994), Friedlander e Hershkowitz (1997) afirmaram que grande parte dos alunos não reconhecem que a Álgebra é uma ferramenta para provar ou refutar uma afirmação e, freqüentemente, utilizam exemplos numéricos como prova irrefutável, considerando o fazer algébrico uma atividade irrelevante e claramente inferior ao uso dos exemplos numéricos. Os autores enfatizaram que o estágio inicial do ensino de Álgebra deveria incluir a compreensão dos conceitos algébricos como variável, expressão, função e equação, bem como a habilidade de construir e analisar representações de situações e padrões numéricos. O estudo propôs a utilização de tarefas que conectavam a Aritmética e a Geometria à Álgebra, levando os alunos a generalizar e justificar os padrões encontrados. Segundo os autores, esse tipo de abordagem teve algumas vantagens claras, como ter aumentado a motivação dos

[5] Demonstração por enunciados consiste na organização de diversas proposições em linguagem natural onde cada uma dessas proposições é considerada como verdadeira.
[6] Demonstração algébrica consiste na validação de uma proposição pela utilização da linguagem algébrica.

alunos, permitido que cada um deles adquirisse o processo de generalização e demonstração, de acordo com o seu próprio nível de raciocínio e compreensão da tarefa. Os pesquisadores verificaram ainda que aquele nível pôde ser gradualmente aumentado como parte de uma atividade contínua que promovia o raciocínio matemático e a compreensão da natureza das demonstrações matemáticas.

As dificuldades de 93 estudantes franceses de nível secundário no uso da Álgebra como ferramenta de formalização e resolução de problemas foram analisadas por Falcão (1994). Os alunos foram submetidos a uma bateria de dez problemas aritméticos e quatro problemas algébricos. No primeiro estudo, 48 sujeitos receberam ajuda na representação prévia dos problemas e na manipulação algébrica das expressões. No segundo estudo, 21 sujeitos receberam ajuda na transposição do problema da linguagem natural para a algébrica, e 24 não receberam qualquer ajuda. Os dados obtidos confirmaram, segundo o pesquisador, a importância da etapa de representação prévia do problema, bem como da eficácia didática do treinamento dos alunos em escrita simbólica (de fórmulas e equações) para a realização da passagem Aritmética-Álgebra.

Brito (1996b) estudou o processo de generalização e as atitudes em relação à Matemática. Quatro estudantes da oitava série do ensino fundamental foram submetidos a um conjunto de problemas envolvendo a passagem gradual do concreto para o abstrato, um questionário e uma escala de atitudes. A análise dos dados mostrou que os estudantes solucionaram melhor os problemas intermediários e encontraram dificuldades nos problemas completamente abstratos. Comparando o desempenho durante a solução de problemas, a pontuação obtida na escala de atitudes e as notas em Matemática, a pesquisadora afirmou que os sujeitos evidenciaram habilidades para trabalhar com os conteúdos matemáticos envolvidos.

O ensino da Álgebra nos currículos de Matemática no Brasil acontece na sexta série na maioria das escolas, quando os conceitos de Aritmética já estão solidificados, sendo a base para o desenvolvimento dos conceitos em Álgebra. Brito Lima e Falcão (1998) apresentaram um estudo com 72 crianças de primeira a sexta séries do ensino fundamental, com idades variando entre 6 e 13 anos, onde era investigada a solução de problemas algébricos. Os sujeitos solucionaram doze problemas com enredo não havendo tempo-limite para a conclusão da tarefa. A solução apresentada pelos alunos foi avaliada segundo quatro categorias: a) tipo de resposta: certa ou errada; b) tipo de procedimento: aritmético ou representação prévia; c) tipo de manipulação: ações do sujeito sobre a representação proposta; d) suporte simbólico: tipo de suporte mobilizado no processamento da informação. A análise dos dados mostrou que os problemas de estruturas mais simples foram resolvidos principalmente através de procedimento aritmético, enquanto os problemas de estruturas mais complexas necessitaram de representação prévia à solução. As crianças mais novas necessitaram da intervenção do examinador para atingir a solução. A representação prévia espontânea apareceu mais sistematicamente entre os sujeitos da sexta série, que representavam os dados do problema com equações. Houve diferenças significativas no desempenho dos sujeitos mais novos em relação à presença ou ausência de intervenção do examinador. Os pesquisadores concluíram que é possível trabalhar no campo conceitual da Álgebra bem mais cedo do que o proposto pela grade curricular e concomitantemente aos conceitos e procedimentos aritméticos.

Os resultados encontrados por Brito Lima e Falcão (1998) parecem indicar justamente uma conclusão contrária. Se os sujeitos mais novos não conseguiram atingir a solução, e se a representação prévia espontânea dos dados do problema com equações apareceu mais sistematicamente entre os sujeitos da sexta série, isso parece indicar que as crianças mais novas não têm a maturidade, não atingiram um nível de desenvolvimento cognitivo, que lhes permita entender os conceitos algébricos e trabalhar com seus procedimentos.

Vários pesquisadores têm demonstrado preocupação com a adequação das atividades algébricas propostas aos alunos. Ken (1989), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Lins e Gimenez (1997) ressaltaram que, para se iniciar as crianças no pensamento algébrico, seriam desejáveis a utilização de situações-problema que desenvolvessem as linguagens natural, aritmética e geométrica, possibilitando a construção de uma linguagem simbólica com significado para o aluno pois *a introdução precoce e sem base significativa de uma linguagem simbólica abstrata pode funcionar como freio à aprendizagem significativa da Álgebra.* (Fiorentini, Miorim e Miguel, 1993, p.89)

A fim de tornar a aprendizagem de Álgebra mais significativa, Leitze e Kitt (2000) sugeriram o uso de "tiras algébricas" confeccionadas em casa. Essas tiras consistiam de quadrados pequenos representando as unidades, quadrados grandes representando $\mathbf{x^2}$ e retângulos representando **x**. De acordo com as pesquisadoras, as tiras combinam uma abordagem algébrica e uma abordagem geométrica para auxiliar na aprendizagem de alguns conceitos algébricos, a saber:

a) adição, subtração e multiplicação entre inteiros e literais; b) modelagem de expressões algébricas e agrupamento de termos semelhantes; c) uso da propriedade distributiva da multiplicação; d) solução de equações lineares usando adição, subtração, multiplicação ou divisão; e) multiplicação de um monômio por um monômio, por exemplo, $3\mathbf{x} \, . \, 5\mathbf{x}^2$, um binômio por um monômio p. e, $(3\mathbf{x} + 7) \, . \, 5\mathbf{x}^2$, ou um binômio por um binômio, p. e, $(3\mathbf{x} + 7) \, . \, (5\mathbf{x}^2 - 2)$; f) fatorar trinômios quadrados, p. e, $\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} + 6$, ou a diferença de dois quadrados, p. e, $9x^2 - 25$; g) completar quadrado. As autoras asseguraram que o uso das tiras beneficiou os estudantes porque forneceu uma referência para aqueles que não conseguiam pensar de maneira abstrata.

A literatura revista mostrou, entre outros aspectos, que:

- existem diferenças de atitudes relacionadas ao gênero; e que, em geral, as meninas apresentam atitudes mais negativas com relação à Matemática;
- existem outros fatores, não cognitivos, que podem afetar o desempenho dos sujeitos;
- existem diferenças de desempenho relacionadas ao gênero, estando relacionadas também aos campos da Matemática;
- as atitudes dos professores em relação à Matemática podem influenciar a atitude e o desempenho dos alunos;
- as atitudes em relação à Matemática podem ser modificadas com programas adequados de intervenção;
- a forma de introdução dos conceitos algébricos pode influenciar o desempenho dos alunos e, consequentemente, as atitudes, crenças e concepções em relação à Álgebra;
- o desempenho dos alunos, em Matemática, pode ser melhorado com atividades adequadas de ensino.

A revisão da literatura permitiu constatar muitas sugestões de programas de intervenção elaborados com o objetivo de melhorar as atitudes dos sujeitos do gênero feminino, de forma a levá-las a superar as dificuldades psicológicas e melhorar a autoconfiança e o desempenho matemático.

Capítulo II

Fundamentação Teórica

> *A motivação energiza e dirige o comportamento. Ela sustenta nossa atenção e mantém nossos esforços nas atividades nas quais nos engajamos.*
>
> Jean-Claude Lejeune

Habilidades

Krutetskii (1976) afirmou que as habilidades se referem às qualidades internas de uma pessoa, qualidades estas que permitem realizar uma determinada atividade. A habilidade matemática seria um conjunto de

> *características psicológicas individuais que respondem aos requisitos da atividade matemática escolar e que influencia, mantendo-se todas as outras condições iguais, o sucesso no domínio criativo da Matemática como uma disciplina escolar - em particular com um domínio relativamente rápido e fácil de conhecimentos, destrezas e hábitos em Matemática.* (p.75)

Krutetskii (1976) diferenciou habilidade de hábito, destreza e conhecimento, afirmando que os três últimos conceitos são adquiridos, sendo as habilidades desenvolvidas no processo de domínio desses elementos relacionados a uma atividade específica, por exemplo a Matemática. Para ele, as habilidades seriam a condição necessária, mas não suficiente, para a boa execução de uma tarefa; as habilidades seriam totalidades, cujos componentes não poderiam funcionar de forma isolada.

Para Klausmeier (1977), quando um componente da habilidade não é dominado pelo indivíduo, prejudicando-o em seu desempenho global, ele deve praticá-lo para obter um melhor controle sobre este componente, sendo que a duração e o intervalo de descanso entre períodos de prática ativa vão depender da natureza da habilidade e das características do indivíduo.

Klausmeier (1977) enumerou duas perspectivas teóricas distintas a respeito da natureza do desempenho hábil:

(1) uma, mais antiga, que afirma que o desempenho hábil resulta de um encadeamento de numerosas unidades estímulo-resposta (E→R), de modo que seja formada uma seqüência longa e ordenada de comportamentos;

(2) outra, fornecida pelos teóricos do processamento de informação, segundo os quais aquilo que é adquirido durante a aprendizagem das habilidades não é uma cadeia de unidades E→R, mas um programa interno, semelhante ao de um computador, onde a ênfase é menor nas respostas e suas conseqüências, e maior sobre os "inputs" externos e internos necessários;

Ainda segundo Klausmeier (1977, pp. 383-388), a aprendizagem de uma habilidade passa por três fases: uma fase inicial, de caráter cognitivo; uma fase intermediária, organizadora e uma fase final de aperfeiçoamento. Com relação às habilidades que exigem mais do componente motor que do componente cognitivo, o autor afirmou que a mudança de um nível inferior para um nível superior dessas habilidades é caracterizada por: a) a passagem do controle voluntário para o controle involuntário de movimentos; b) melhor diferenciação de índices; c) melhor "feedback" e correção; d) movimentos mais rápidos e precisos; e) melhor coordenação de movimentos e respostas.

Corroborando essas afirmações, Hayes-Roth, Klahr e Mostow (1980) afirmaram que a aquisição do conhecimento e o desenvolvimento de habilidades é um processo interativo, sendo que, na primeira fase, uma capacidade inicial é adquirida pela compreensão de instruções e obediência a recomendações. Os autores estudaram os tipos de conhecimentos aprendidos no processo de desenvolvimento de uma habilidade intelectual, detendo-se particularmente em três desses tipos de conhecimentos, a saber:

(a) os que incluem conceitos e heurísticas melhorados, que caracterizam a esfera do problema; (b) os que incluem significados eficazes para se alcançar objetivos na esfera do problema; e (c) os que incluem conhecimento melhorado das conseqüências esperáveis do plano de aquisição.

Logo, desenvolver as habilidades, segundo esses autores, significa melhorar a qualidade e aumentar a cobertura desses três tipos de conhecimento, tanto quanto a capacidade para aplicá-los apropriadamente.

A prática conduz à melhora e o aumento da prática leva a uma melhoria no desempenho. Newell e Rosenbloom (1980) alertaram para a existência de limites para a extensão da prática (quantidade que se pratica) e para o alcance na melhoria (quantidade que se melhora).

O que tem sido evidenciado a esse respeito é que a prática conduz a um melhor controle sobre uma habilidade. No caso da habilidade em Álgebra, Sternberg (1992) afirmou que o que distingue um solucionador realmente talentoso de outro menos capacitado não é o uso de heurísticas mais poderosas ou diferentes, mas uma capacidade para escolher o melhor trajeto para a solução sem fazer tentativas prévias com outros. Já Lewis (1980) esperava que um solucionador competente conhecesse um conjunto de operadores adequados e possuísse estratégias de conhecimento apropriadas que caracterizassem o desempenho desse solucionador altamente habilidoso, que seria um indivíduo com a capacidade para selecionar os operadores que conduzem a uma solução econômica (o que é concordante com as afirmações de Sternberg); capacidade para selecionar operadores mais poderosos do que aqueles usados pelos selecionadores pouco habilidosos (o que é discordante das afirmações de Sternberg).

De acordo com Pozzo (1994), para que um sujeito passe de novato a "expert" não é necessário apenas promover um aumento de conhecimentos, mas é preciso também que ocorra uma verdadeira reorganização de seus conhecimentos para que ele consiga selecionar os operadores mais eficazes para a solução de um problema.

Lewis (1980) considerou ainda que as operações combinadas, usadas pelos "experts", impuseram uma limitação importante para a composição e produção, como um mecanismo de aprendizagem. Algumas das transformações dos procedimentos envolvidos nas operações de Álgebra não tinham nada a ver com a Álgebra; o que estava sendo tratado como habilidade em Álgebra, era, de fato, apenas uma habilidade para manusear os procedimentos em geral.

Krutetskii (1976) asseverou que, além das habilidades, as atitudes positivas em relação a uma atividade constituiriam condições psicológicas gerais e necessárias para que um indivíduo executasse uma dada atividade com sucesso. Além disso, considerou que a atitude positiva se caracterizaria como uma inclinação pessoal para a atividade.

Atitudes

Há muita confusão com relação ao termo atitude, sendo que muitos confundem atitude com seus correlatos, como comportamento, gosto, valores e crenças.

Segundo Brown (como citado em Brito, 1996), o termo atitude foi usada como um conceito psicológico pela primeira vez por W. Thomas e F. Znaniecki em 1918. Isso marcou a mudança de significado do termo, de uma ação do corpo para um conceito de caráter marcadamente psicológico.

Para Klausmeier (1977) *a palavra atitude é usada para designar tanto disposições emocionais matizadas de indivíduos, como também entidades públicas identificáveis, que são usadas para comunicar significados entre indivíduos que falam a mesma língua* (p. 413). O autor distinguiu atitude de gosto e valores com base na estabilidade desses conceitos: o gosto refere-se a algo específico (como gostar ou não de um arranjo específico de uma composição musical), os valores são mais abrangentes (como o papel que a música desempenha na vida dos indivíduos) e a atitude está no meio dos dois (como aceitação ou rejeição de certos tipos de música).

Ainda segundo Klausmeier (1977, pp. 414-417), as atitudes possuem cinco atributos definidores: a) **aprendibilidade** - todas as atitudes são aprendidas, algumas não intencionalmente e sem consciência por parte do aprendiz; b) **estabilidade** - algumas atitudes aprendidas afirmam-se e perduram, outras são modificadas ou deixam de ocorrer; c) **significado pessoal-societário** - uma atitude envolve a relação entre uma pessoa e outras pessoas e, também, envolve a relação entre uma pessoa e coisas, sendo que as ações sobre essas pessoas e coisas afetam a maneira como o indivíduo se sente em relação a si mesmo; d) **conteúdo afetivo-cognitivo** - o componente afetivo de uma atitude refere-se às emoções que um indivíduo tem em relação ao objeto da atitude, enquanto o componente cognitivo refere-se à informação factual que o indivíduo tem do objeto da atitude; e) **orientação aproximação-evitamento** - se o indivíduo possui uma atitude favorável em relação a um objeto, ele irá se aproximar deste e defendê-lo; ao contrário, se possui uma atitude desfavorável, irá evitar o objeto ou apresentar comportamentos negativos com relação ao mesmo.

Gonçalez (1995), em um estudo sobre a estabilidade das atitudes em professores e alunos de magistério, compilou várias definições do termo, dentre as quais:

> *atitude é a soma total de inclinações e sentimentos humanos, prejuízos ou distorções e noções pré-concebidas, idéias, temores e convicções acerca de um determinado assunto.* (Thurstone, 1928, como citado em Gonçalez, 1995, p. 17)

> *atitudes são as sensações emocionais dos estudantes, contra ou a favor de alguma coisa.* (Dutton, 1951, como citado em Gonçalez, 1995, p. 17)

Essas definições não abrangem a amplitude do conceito e por essa razão optou-se, no presente estudo, pela conceituação apresentada por Brito (1996a), por contemplar os atributos essenciais do conceito de forma mais completa:

> *atitude poderia ser definida como uma disposição pessoal, idiossincrática, presente em todos os indivíduos, dirigida a objetos, eventos ou pessoas, que assume diferente direção e intensidade de acordo com as experiências do indivíduo. Além disso, apresenta componentes do domínio afetivo, cognitivo e motor.* (p.11)

As atitudes com relação à Matemática têm sido objeto de interesse dos pesquisadores por muitos anos, sendo que este interesse tem aumentado muito, especialmente durante os últimos 25 anos - particularmente após Aiken (1961) ter desenvolvido a <u>Escala de Atitudes em relação à Matemática</u>, que foi revista 2 anos mais tarde (Aiken e Dreger, 1963) - provavelmente devido à consciência de que para se melhorar as atitudes há necessidade de compreendê-las e a seus componentes, desde as maneiras para acessá-las até como modificá-las.

As técnicas mais comuns usadas para se acessar atitudes, segundo Brito (1996a), eram as seguintes:

> *escalas diferenciais (Thurstone), escala de postos ou classificação (rating scales), escala de classes somativa, escalas de diferencial semântico, técnicas projetivas, observação antropológica, entrevistas, dados observacionais controlados, análise de conteúdo de depoimentos, etc...* (p.31)

A maioria dos estudos revisados usou escalas do tipo Likert e os trabalhos de Aiken (1961, 1963, 1970, 1979) foram bastante citados. O presente estudo usou para acessar as atitudes em relação à Matemática um instrumento (escala de atitudes) do tipo Likert (Aiken e Dreger, 1963, revisto, traduzido e adaptado por Brito, 1996), por ser um instrumento que mede a atitude em relação à Matemática por si mesma, evitando proposições sobre a atuação do professor ou sobre o tipo de atividades matemáticas propostas, além de ter uma grande aceitação por parte dos pesquisadores que estudam atitudes em relação à Matemática.

Acessar as atitudes dos alunos em relação à Matemática é um aspecto importante de uma tarefa maior, que é ensinar e propiciar modificações nas atitudes dos alunos, buscando melhorar o autoconceito e o desempenho dos mesmos.

A aprendizagem de atitudes e sua modificação pode ocorrer em todos os níveis escolares. Apesar de não poderem ser observadas diretamente, as atitudes podem ser inferidas através do comportamento dos estudantes. Logo, um dos objetivos principais da escola deveria ser o desenvolvimento de atitudes mais positivas tanto em relação `a escola como às disciplinas específicas e às atividades escolares.

Confirmando a importância das variáveis afetivas na aprendizagem, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs (Brasil, 1997a) propõem que:

> *(...) Os aspectos emocionais e afetivos são tão relevantes quanto os cognitivos, principalmente para os alunos prejudicados por fracassos escolares ou que não estejam interessados no que a escola pode oferecer. A afetividade, o grau de aceitação ou rejeição, a competitividade e o ritmo de produção estabelecidos em um grupo interferem diretamente na produção do trabalho.* (p.98)

e ainda,

> *(...) A ansiedade* [presente na situação de aprendizagem] *pode estar ligada ao medo de fracasso, desencadeado pelo sentimento de incapacidade para realização da tarefa ou de insegurança em relação à ajuda que pode ou não receber de seu professor, ou de seus colegas, e consolidar um bloqueio para aprender.* (p. 101)

Tanto a orientação dos PCNs (Brasil, 1997a), quanto Klausmeier (1977, pp. 436-445) fornecem pistas sobre como utilizar as variáveis afetivas em favor do ensino. Segundo Klausmeier, para se ensinar atitudes é necessário: a) fornecer modelos para serem usados como exemplos; b) propiciar experiências emocionais agradáveis; c) ampliar as experiências informativas; d) usar técnicas de grupos; e) propiciar prática adequada; f) incentivar o aprimoramento independente de atitudes.

A grande maioria dos estudos revisados destacou a necessidade de se estudar as variáveis que afetam as atitudes, a auto-estima e o desempenho dos alunos, procurando conhecê-las e atuando sobre as mesmas com o objetivo de planejar atividades adequadas que levem a uma melhoria desses aspectos.

Segundo alguns autores, entre eles Whitney (1980), Daniels e outros (1991) e Taylor e outros (1991), as atividades adequadas de ensino levam ao desenvolvimento de atitudes mais positivas em relação à Matemática. Sendo assim, parece valer a pena tentar melhorar as atitudes dos alunos em relação à essa disciplina, levando-os a desenvolver um maior interesse pelas atividades matemáticas.

Na visão de Polya (1981), o objetivo primordial do ensino deveria ser "ensinar a pensar", o que para ele significa não a mera transmissão de informações, mas o desenvolvimento da habilidade dos estudantes para usar a informação transmitida; isto é, o professor deveria incentivar seus alunos para que eles tivessem hábitos de pensamento desejáveis, atitudes adequadas, além, é claro, de conhecimentos. Essa noção sobre os objetivos desejáveis de ensino era bastante próxima, na opinião do autor, da abordagem de solução de problemas. Para ele, o pensamento matemático não é puramente formal, não diz respeito somente a axiomas, definições e provas, mas a muitos outros aspectos, dentre eles o ato de generalizar[7] a partir de casos observados, argumentar indutivamente, argumentar por analogia, reconhecer um conceito matemático e extraí-lo a partir de situações concretas. Ainda segundo o autor, *o professor de Matemática tem uma excelente oportunidade para desenvolver em seus alunos este processo de pensamento informal altamente importante.* (Parte II, p.100)

Complementando Polya, Greenwood (1994) afirmou que o pensamento matemático envolve, dentre outras, a habilidade para reconhecer uma situação modelo; generalizar situações-problema comuns; identificar os erros e produzir estratégias alternativas.

[7] Extensão de uma idéia a todos os casos a que se pode aplicar, a partir da observação de casos particulares ou por meio de demonstração.

Álgebra e Solução de Problemas

O nascimento da linguagem algébrica teve início com Vièta (em Paris), em 1953, quando ele estabeleceu as regras sintáticas do uso dos símbolos na Introdução à Arte Analítica.

A partir daí, a Álgebra se converteu numa ferramenta importante para a Matemática. Com o sistema simbólico organizado por Vièta era possível representar as quantidades conhecidas e desconhecidas, estabelecer relações operatórias entre elas, enunciar, resolver e demonstrar problemas.

Segundo Garcia (1997), a busca por generalizações dos problemas aritméticos e geométricos clássicos foi o que impulsionou o desenvolvimento e a consolidação da linguagem algébrica.

Nas duas últimas décadas, o interesse nas dificuldades da aprendizagem da Álgebra tem sido grande. De acordo com Robayna e Medina (1997), os estudos nessa área apontaram que as dificuldades dos alunos estavam centradas no significado das letras, na mudança de uma série de convenções diferentes das usadas na Aritmética e no reconhecimento/uso de estruturas algébricas. Essas pesquisadoras relataram, ainda, que a introdução nos conceitos algébricos é muito rápida e o pensamento operacional concreto dos alunos não estaria suficientemente maduro para passar para o pensamento operacional formal.

Contrariando essa posição, alguns autores, Brito Lima (1996) e Brito Lima e Falcão (1997, 1998), sugeriram que a Álgebra poderia ser ensinada paralelamente à Aritmética, antes mesmo da época sugerida pelas grades curriculares de Matemática.

Lins e Gimenez (1997) corroboraram esses pesquisadores, na medida em que asseveraram que a Aritmética não deveria necessariamente preceder a Álgebra, mas que as duas deveriam coexistir, de modo que uma estivesse implicada no desenvolvimento da outra.

Entretanto, aquilo que Brito Lima e Falcão (1997 e 1998), Lins e Gimenez(1997) consideraram como Álgebra, poderia ser entendido como pré-Álgebra por aqueles pesquisadores que defendem a necessidade de uma introdução mais lenta e melhor trabalhada da Álgebra, porque:

> *a Álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade* (Lins e Gimenez, 1997, p. 137).

A despeito de não haver uma única posição entre os educadores matemáticos sobre o momento ideal para se introduzir os conceitos algébricos, tem-se uma certa concordância sobre o assunto: a Álgebra não deve ser vista apenas como uma generalização da Aritmética (Kieran, 1991; Falcão, 1997; Lins e Gimenez, 1997; Robayna e Medina, 1997; Garcia, 1997 e Ortiz, 1997), tendo em vista a potência e a simplicidade de seus registros formais e método. Apesar da simplicidade de seus registros formais, sua aprendizagem pode ser considerada bastante difícil pelos alunos.

Segundo Robayna e Medina (1997), há evidências de que muitas das dificuldades dos estudantes para trabalhar com símbolos algébricos eram devidas à introdução aos processos mais avançados, sem que os mesmos tivessem aprendido os fundamentos da Álgebra.

Complementando essas evidências, Ortiz (1997) asseverou que alguns alunos não conseguiam compreender o significado dos símbolos algébricos que eles aprendiam formalmente porque ignoravam o significado das fórmulas e conceitos, inventando significados que substituíam os originais. Por outro lado, também havia os estudantes que dominavam bem os cálculos algébricos, mas não utilizavam a Álgebra como ferramenta para compreender generalizações, conexões e argumentar em Matemática, o que poderia ser considerada uma subutilização da Álgebra.

Dessa forma, a solução de problemas, segundo Garcia (1997), seria um meio adequado para iniciar a linguagem algébrica, porque essa abordagem conectaria os conceitos algébricos com o meio do aluno e justificaria o papel da linguagem e a notação simbólica na escola.

A abordagem da solução de problemas é vista como de suma importância para o desenvolvimento da capacidade para a Matemática pois, conforme Abrantes (1991), a solução de problemas é um aspecto central no processo de ensino-aprendizagem da Matemática e é grande a preocupação dos educadores matemáticos com o desenvolvimento de pesquisas nessa área.

Com relação à habilidade para solucionar problemas, as recentes teorias sobre a inteligência e o processamento de informações têm dedicado especial atenção à essa habilidade, conforme mostrado por Sternberg (1992):

A solução de problemas é uma habilidade cognitiva complexa que caracteriza uma das atividades humanas mais inteligentes. Da infância em diante, ativamente solucionamos *problemas que o mundo nos apresenta. Adquirimos informações sobre o mundo e as organizamos em estruturas de conhecimento sobre objetos, eventos, pessoas e nós mesmos, que são armazenadas em nossas memórias. Essas estruturas de conhecimento (...) influenciam o modo como conectamos nossas experiências e o modo como solucionamos os problemas com os quais nos confrontamos na vida cotidiana, na escola, em nossos empregos e nos momentos de lazer* (p. 250).

Apesar da Proposta Curricular de Matemática do Estado de São Paulo (São Paulo, 1991) ter valorizado a solução de problemas, entendendo-a de grande importância para a Educação Matemática, o que se presencia em algumas escolas é, em muitos casos, a substituição desta atividade por exercícios repetitivos que visam somente a memorização dos conceitos. Em outros casos, os procedimentos envolvidos na solução de um problema são menos valorizados que o seu resultado final.

Isso pode levar os alunos a adquirirem uma concepção distorcida da Matemática, quando então muitos se dedicam ao cálculo sem qualquer idéia de onde irão chegar e outros esperam ter uma idéia brilhante, sem contudo fazerem qualquer esforço para que ela apareça. Quando encontram alguma solução, não se preocupam em verificá-la e não se espantam com os resultados, por mais absurdos que eles sejam.

Schoenfeld (1985) também observou a inconsistência de respostas através de uma observação da solução de um problema, no qual perguntava o tempo que, juntos, dois garotos gastariam para cortar a grama de um local, sabendo-se que um deles, sozinho, gastaria 12 horas para fazer o serviço enquanto o outro despenderia 8 horas para fazer o mesmo serviço. A maioria dos sujeitos respondeu que o tempo gasto seria de 10 horas. Aparentemente os alunos não viam nada de errado em concluir que o tempo necessário para as duas pessoas juntas cortarem a grama seria 10 horas, embora uma delas, sozinha, conseguisse fazê-lo em 8 horas!

Gage e Berliner (1992) apontaram que os alunos necessitam ter habilidades de linguagem, domínio de fatos básicos e o conhecimento de protótipos (representações mentais dos problemas que fornecem a compreensão fundamental dos mesmos e são construídos somente com grande experiência em solução de problemas similares) para que consigam um desempenho eficiente na solução de problemas.

Gagné (como citado em Gage e Berliner, 1992) observou que os alunos necessitariam também aprender estratégias de solução de problemas, bem como avaliar se a estratégia escolhida é adequada, verificando se a resposta encontrada é compatível com as informações disponíveis no problema.

Fala-se muito em habilidade para solucionar problemas, mas o que seria um problema? Na visão de Sternberg (1992, p. 252) *um problema é uma situação na qual você está tentando alcançar algum objetivo e deve encontrar um meio para chegar lá.* Segundo o autor todos os problemas partem de um estado inicial e têm algum objetivo. Para solucioná-los, o sujeito precisa realizar algumas operações sobre o estado inicial buscando atingir o objetivo do problema.

A visão de Polya (1981) era semelhante, pois para este autor *ter um problema significa buscar, conscientemente, alguma ação apropriada para alcançar um objetivo claramente imaginado, mas não imediatamente atingível. Resolver um problema significa encontrar tal ação.* (Parte I, p.117)

Polya (1981) desenvolveu um interessante processo de solução de problemas em quatro passos. Este processo foi adaptado por Billstein, Libeskind e Lott (1987) para solucionar problemas com enredo ("word problems") nos quais o uso de Álgebra é apropriado.

Quando da aplicação deste método de ensino o professor precisará, além de observar a apropriação do uso da Álgebra nos problemas, visto que a Álgebra pode ser usada para resolver muitos tipos de problemas, o professor, naturalmente, deverá observar o nível de dificuldade e complexidade adequados a cada série escolar e escolher os problemas que possam ajudar a desenvolver os vários componentes da habilidade necessários para a solução de problemas.

Billstein, Libeskind e Lott (1987) elaboraram um modelo para representar o método de solucionar problemas com enredo. Os passos a seguir seriam voltados para formular o problema como um problema matemático; solucioná-lo e interpretar a solução nos termos do problema original.

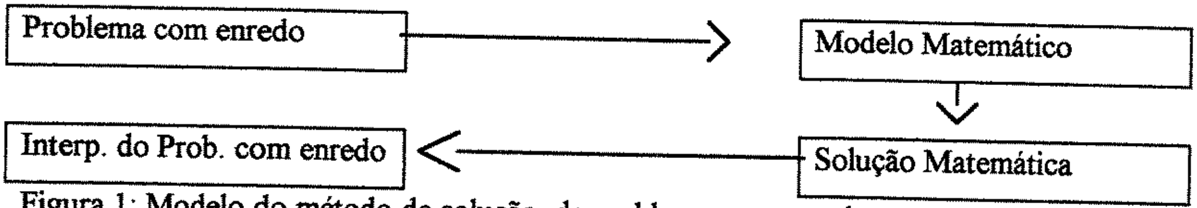


Figura 1: Modelo do método de solução de problema com enredo

O modelo de Polya, adaptado para solucionar problema com enredo, envolve cada um dos seguintes estágios (Billstein, Libeskind e Lott , 1987, p. 194):

1) Compreender o problema: identificar o que é dado e o que será encontrado;
2) Desenhar um plano: atribuir letras para as quantidades desconhecidas e traduzir os dados em equações ou desigualdades;
3) Executar o plano: solucionar as equações ou desigualdades;
4) Fazer verificação: checar e interpretar a solução nos termos da situação dada no problema.

Fortunato, Hecht, Tittle e Alvarez (1991) relataram um estudo sobre as atividades cognitivas na expressão de um problema matemático, tendo como sujeitos 165 alunos de sétima série. As pesquisadoras verificaram que 75% dos sujeitos dessa amostra costumavam ler o problema mais de uma vez antes de começar a resolvê-lo, mas apenas 40% tentavam fazer analogia com problemas resolvidos anteriormente, mesmo sendo esta uma estratégia válida e importante na solução de qualquer problema. Após resolverem o problema, 61,7% dos alunos verificavam se a resposta encontrada fazia sentido e apenas 23,3% procurava uma maneira diferente de resolver o problema. O estudo mostrou que estas estratégias eram relevantes para todos os problemas e que os alunos deveriam ser encorajados a sempre fazer uso delas.

Talvez o ensino que utilizasse problemas com mais de uma solução, ou que possibilitasse a discussão entre os estudantes e o professor quanto às estratégias utilizadas, pudesse ajudar a enriquecer e expandir o repertório de procedimentos de solução empregados por estes alunos.

Blanco (1991) destacou que Polya, em 1949, já afirmava que o primeiro dever de um professor de Matemática era fazer todo o possível para desenvolver, em seus alunos, a habilidade de resolver problemas. No entanto, não podemos esquecer que

> *... a resolução de problemas matemáticos não deve servir apenas para responder as interrogações que surgem na vida diária, ou por sua aplicação nas ciências físicas e*

sociais, ou nos campos profissionais (...), mas também deve servir para desenvolver e integrar em maior grau a Matemática nela mesma (Diaz e Poblete, 1995, p. 59).

Klausmeier (1977, pp. 366-371) propôs que os professores desenvolvessem nos alunos as habilidades necessárias para solucionar problemas, com base nas seguintes orientações: a) identifique problemas passíveis de solução; b) ajude os alunos a estabelecerem e delimitarem os problemas; c) auxilie os alunos a encontrarem as informações; d) auxilie os alunos no processamento de informações; e) estimule a formulação de hipóteses e o teste das mesmas; f) encoraje a descoberta e a avaliação independentes.

Já Krutetskii (1976) identificou três estágios básicos da atividade mental na solução de um problema matemático, os quais estão, de certa forma, relacionados às atividades propostas por Klausmeier (1977), para desenvolver a habilidade de solucionar problemas: obtenção da informação matemática; processamento da informação de maneira a obter a solução e retenção da informação sobre o problema e sua solução.

Para Krutetskii (1976, como citado em Garcia, 1995) a cada um desses estágios corresponderiam alguns componentes da habilidade matemática:

Estágio I: habilidade para perceber as relações entre os dados e compreender a estrutura formal do problema;

Estágio II: a) habilidade lógica; b) habilidade de generalização; c) habilidade para "resumir" processos e pensar através de processos resumidos; d) flexibilidade mental; e) clareza, simplicidade, economia e racionalidade da solução; f) habilidade de reversibilidade dos processos mentais;

Estágio III: habilidade de memória matemática.

Os resultados apresentados por Krutetskii foram baseados na análise de protocolos que mostravam a solução de problemas matemáticos por alunos de escolas de Moscou, na biografia de matemáticos e físicos famosos, nas entrevistas com professores eminentes de universidades que trabalhavam com Matemática e Física e nas entrevistas realizadas com professores dos sujeitos da pesquisa, dentre outros. Foi usada a análise fatorial com o objetivo de isolar os componentes da habilidade matemática e a análise de variância para comparar os componentes da habilidade entre os grupos de crianças, classificadas como mais capazes, capazes e menos capazes. Essa classificação foi feita a partir dos procedimentos que os estudantes utilizavam nas atividades matemáticas propostas por ele.

Para acessar os componentes da habilidade, Krutetskii usou o método de "pensar em voz alta", que consiste em o sujeito resolver o problema explicitando em voz alta os procedimentos de solução, isto é, o método é usado com a finalidade de evidenciar os caminhos usados e as relações estabelecidas para se chegar a um resultado.

Além das três etapas de obtenção da informação matemática, processamento e retenção da informação, Krutetskii estabeleceu ainda a existência de um outro traço, que identificou como componente geral sintético, associado à existência de um tipo de "mente" matemática.

A existência desse elemento geral foi justificada por Gage e Berliner (1992) da seguinte forma:

> *A maioria dos psicólogos acredita que existe uma habilidade mental geral (g) simplesmente porque todos os testes de habilidade cognitiva tendem a se correlacionar positivamente um com o outro. Estas descobertas sustentam-se para todos os testes de habilidades cognitivas, mesmo que eles difiram em conteúdo (verbal, matemático e espacial) ou processo de raciocínio (dedutivo, indutivo, analogia, memória e discriminação).* (p. 58)

Os estudos de Sternberg (Sternberg, 1985 e Wagner e Sternberg, 1984) têm apontado para o fato de que um comportamento inteligente de qualquer tipo, em qualquer área, pode ser decomposto em um conjunto de componentes ou atividades. Foram descritos três grandes componentes do processo geral:

a) componentes meta - são processos de ordem superior que regulam tudo o que o ser humano faz, mental e fisicamente. Por exemplo: solucionar um problema, completar uma tarefa ou avaliar as estratégias utilizadas.
b) componentes de desempenho - são processos mentais que o ser humano utiliza ao executar uma tarefa. Por exemplo: decodificar a tarefa, fazer relações de inferência ou comparar possíveis estratégias de solução.

c) componentes de aquisição do conhecimento - são processos mentais para aprender coisas novas. Por exemplo: relacionar informações novas às antigas ou distinguir informações relevantes de irrelevantes.

Para Gage e Berliner (1992), a teoria do processamento da informação trouxe duas contribuições para a Educação: desmitificou os processos mentais que as pessoas inteligentes usam e abriu a possibilidade para que se treine o comportamento inteligente, trabalhando com os alunos os componentes meta, ensinado-lhes a monitorarem seu tempo, suas estratégias e a verificarem onde repousam suas dificuldades:

Munidos com as modernas concepções de inteligência das teorias do processamento da informação, nós podemos ver que a habilidade mental geral baixa pode não ser uma condição permanente, mas pode ser um padrão comportamental que pode ser remediado. Uma vez diagnosticado acuradamente o problema, podemos prescrever formas pelas quais os estudantes podem aprender a agir de maneira mais inteligente frente a itens de uma determinada classe ou de um tipo particular de contexto. (p.76)

Gardner e Hatch (1989) se concentraram em relatos da literatura sobre inteligência, estudos neurológicos sobre o cérebro humano, descrições de gênios, artistas e pessoas com distúrbios de aprendizagem, relatos antropológicos de diversos povos e práticas em diferentes culturas. A partir dessas evidências os pesquisadores teorizaram a existência de pelo menos sete tipos distintos de inteligência, fracamente correlacionados ou interdependentes:

a) Inteligência verbal - é a capacidade que algumas pessoas têm de usar criativamente o vocabulário, fazer análises verbais, compreender metáforas e materiais verbais complexos. É uma característica notável em poetas, escritores, jornalistas, oradores, dentre outros.
b) Inteligência musical - é a capacidade que algumas pessoas possuem de organizar os sons de maneira criativa, a partir da discriminação de elementos como timbres e tons. É uma característica notável em músicos.
c) Inteligência lógico-matemática - é a capacidade mais ligada à idéia tradicional de inteligência. Determina a habilidade para o raciocínio dedutivo, compreensão de encadeamentos de raciocínio e solução de problemas matemáticos. É uma característica notável em cientistas, matemáticos e físicos, por exemplo.

d) Inteligência espacial - é a capacidade de formar modelos mentais precisos de uma situação e utilizar esse modelo para orientar-se ou transformar as características de um determinado espaço. Característica de arquitetos e engenheiros, entre outros.

e) Inteligência corpóreo-cinestésica - é a consciência quase perfeita de/e controle do corpo, bem como a destreza de manipular objetos. É uma característica notável em atletas e bailarinos.

f) Inteligência intra-pessoal - é a capacidade de pessoas com grande autoconhecimento, ou conhecimento profundo de seus sentimentos e controle das funções de seu corpo, que lhes permite formar um modelo real de si mesmo e conduzir-se proveitosamente na vida. Característica de líderes religiosos, líderes de comunidades, dentre outros.

g) Inteligência inter-pessoal - é a capacidade de pessoas que convivem bem em ambientes sociais complexos, compreendendo as demais pessoas, percebendo suas motivações e satisfazendo suas expectativas emocionais. Característica de líderes de grupo, professores e políticos, dentre outros.

De acordo com Gardner, uma única medida de inteligência, como os testes de QI, seria inadequada para medir a capacidade das pessoas.

A teoria das inteligências múltiplas também trouxe implicações educacionais. Muitos educadores acreditam que as escolas deveriam desenvolver outras habilidades nos alunos além das habilidades matemática e verbal.

Por outro lado, outros educadores, segundo Gage e Berlinger (1992), afirmaram que outras instituições que não a escola, como a família, as organizações religiosas, a mídia e os amigos deveriam cultivar os outros tipos de inteligência, porque tipos diferentes de inteligência teriam diferente importância para a sociedade:

> *(...) embora a música seja uma fonte de grande beleza e satisfação, ela é menos importante que a leitura, a escrita e a matemática para a economia. (...) e a demanda para os diferentes tipos de inteligência é variada; nossa sociedade pode necessitar de cientistas mais do que de atletas.* (p.79)

No caso específico da habilidade matemática, foram propostas diferentes maneiras de medir esta capacidade. Para Sternberg (1992), existem duas maneiras básicas para o problema da mensuração da capacidade matemática. São elas: **a psicométrica** - onde a habilidade matemática é medida pelo desempenho nos testes; e **a de processamento de informação** -

baseada na análise de tarefas, sendo que a habilidade é definida como o conjunto de todas as operações cognitivas, habilidades e conhecimento componentes da tarefa matemática.

Krutetskii, em 1976, já criticava o uso de testes apenas, como instrumento de medida, pois, segundo ele, não se podia descobrir muito sobre o processo de pensamento pela análise dos resultados, pois essa análise avaliaria o conhecimento, a destreza, a experiência e o resultado do ensino, e não a habilidade matemática. Para Krutetskii, a habilidade é sempre para uma atividade específica, existindo apenas nessa atividade e se manifestando através dela. Dessa forma, uma investigação sobre a habilidade matemática deveria analisar o processo utilizado na solução de problemas matemáticos.

Reforçando a crítica ao uso dos testes como instrumento de medida de desempenho, Moede e Piorkowski (como citado em Krutetskii, 1976) afirmaram que alguns fatores limitariam o valor dos testes, citando o índice de talento mental, doença e nervosismo do examinado, influência de treinamento e exercícios anteriores, possível falta de interesse do examinado nos exames, além do cansaço.

Apesar de concordarem que alguns fatores prejudicam o resultado dos testes, Gage e Berliner (1992) asseveraram que os testes de inteligência que exigem um bom conhecimento acadêmico são úteis para predizer o sucesso escolar, enquanto que os testes que exigem pouco conhecimento acadêmico são mais úteis para detectar talentos que podem vir a ser desenvolvidos. Os pesquisadores alertaram para o fato de que tais testes eram escritos tentando eliminar diferenças nas médias das notas que pudessem ser atribuídas ao gênero, entretanto o mesmo esforço não era feito para se eliminar diferenças que fossem devidas à raça e à classe social dos sujeitos.

Ao longo dos anos, os psicólogos aprenderam muito sobre a natureza do processo de solução de problemas e foram desenvolvidas várias pesquisas a respeito do tema, o que tem ajudado a tornar mais adequadas tanto a mensuração da habilidade matemática quanto as maneiras de desenvolvê-la.

Autores como Farivar e Webb (1994), por exemplo, descreveram um programa onde atividades de solução de problemas, realizadas em pequenos grupos, desenvolveram a cooperação entre os estudantes bem como a comunicação de suas idéias matemáticas e responsabilidade sobre seu próprio comportamento e aprendizagem.

Swenson (1994) afirmou que uma situação-problema rica poderia valer mais que uma dúzia de exercícios formais, desde que: a) o aluno fosse encorajado a enfrentar a dificuldade como uma necessidade real a ser resolvida; b) fosse estimulado a investigar os dados, selecionando os mais relevantes; c) fosse encorajado a desenvolver uma variedade de estratégias para resolvê-la; e d) se fizesse seu próprio julgamento sobre a validade das várias soluções encontradas.

Este tipo de situação-problema desenvolveria no aluno o "poder matemático" porque, segundo Carey (1992), as atividades de solução de problemas *proporcionam ao estudante a oportunidade de exercitar sua criatividade e criar estratégias de pensamento que o ajudarão a solucionar o problema.* (p. 203)

Os educadores devem estar conscientes de que o pensamento crítico e a solução de problemas dependem de uma quantidade razoável de conhecimentos básicos, tais como o conhecimento e domínio de definições, bem como exemplos e estratégias que necessitam ser incorporados à estrutura de conhecimento e disponibilizados pela memória, quando necessário.

Para Gage e Berliner (1992) o importante seria que se selecionasse os tipos de conhecimentos importantes para o campo de interesse de cada sujeito. Esses conhecimentos deveriam ser retidos sem o receio de tolher a criatividade dos alunos, *(...) conhecimento não é danoso à criatividade ou à auto-expressão. Na verdade uma sólida base de conhecimentos pode ser necessária à criatividade* (p. 44).

Dentro dessa mesma perspectiva, Maher e Martino (1992) enfatizaram que o desenvolvimento do "poder matemático" deve ser um objetivo específico do ensino de Matemática e a aprendizagem deve estar dirigida ao desenvolvimento do raciocínio dos estudantes.

A solução de problemas tem sido tratada pela Psicologia desde o final do século XIX. De acordo com Sternberg (1992), a importância da representação inicial de um problema foi mostrada pela escola da Gestalt, mas apenas nas últimas décadas a importância da representação mental para a solução de problemas foi ampliada.

Larkin (1985) e Siegler (1985) relataram que a representação mental e/ou gráfica de um problema é crucial para que a solução seja alcançada. A representação determinaria qual conhecimento deve tornar-se disponível na memória de longo prazo, possibilitando que o solucionador comece a elaborar o problema; portanto, as diferentes representações mentais de um mesmo problema levariam a diferentes tentativas de solução para o mesmo.

Existem diferentes estratégias pelas quais um sujeito pode iniciar a solução de alguns tipos de problemas e cada uma pode ser mais, ou menos, apropriada para aquele tipo. Às vezes, quebrar um problema em partes, também pode ajudar na sua solução, outras vezes começar a partir do que se quer provar é mais adequado. Seja qual for a estratégia escolhida, os solucionadores bem sucedidos mantêm o controle dessas estratégias, monitorando-as durante todo o tempo gasto para a solução do problema, seja revisando-as ou mesmo abandonando-as, no caso de ser uma estratégia inadequada (Krutetskii, 1976; Lewis, 1980; Fortunato e outros, 1991 e Sternberg, 1992).

Em suma, a escola deve buscar métodos de ensino que permitam aumentar as atitudes positivas dos estudantes em relação à Matemática e desenvolver a habilidade matemática dos mesmos, aumentando sua capacidade de solucionar problemas e, enfim, melhorando seu desempenho nessa área.

Capítulo III

Problema, Procedimentos, Materiais e Método

... a construção de atitudes positivas deve ser a meta dos educadores que pretendem ir além da transmissão de conhecimentos, garantindo aos seus alunos espaço para o desenvolvimento do autoconceito positivo, autonomia nos seus esforços e o prazer da resolução do problema, ...

Maria Helena Gonçalez, 1995, p. 2

Problema de Pesquisa

Com o objetivo de compreender melhor a natureza da capacidade para a Matemática, além das atitudes e habilidades envolvidas na solução de problemas, foi feito um estudo a respeito da solução de problemas algébricos e das atitudes em relação à Matemática, buscando responder às seguintes questões:

Quais as relações entre as atitudes e a habilidade matemática? Como o gênero e a série se relacionariam com as atitudes e a habilidade matemática?

Partindo desse questionamento inicial, o presente estudo buscou também elementos para responder aos seguintes quesitos:

a) **Os melhores alunos das séries finais do 1° grau têm a habilidade necessária para a solução de problemas algébricos?**
b) **Quais são os componentes da habilidade matemática que se revelam, nos sujeitos mais habilidosos, durante a solução de problemas algébricos?**

c) **Existem diferenças de atitudes que possam ser relacionadas à série, ao gênero ou ao desempenho em Matemática?**

Justificativa do estudo

A escolha da Álgebra é justificada pela importância que a mesma assume nas séries finais do ensino fundamental. A Álgebra é descrita no *National Council Teaching of Mathematics* (NCTM's, 1989, p. 50) como *a linguagem através da qual a Matemática é comunicada* e, muitas vezes, o estudante é colocado frente a esta linguagem sem as necessárias preliminares.

Schultz (1991) descreveu um projeto de aproximação da Álgebra com os números, desenvolvido com crianças de sétima e oitava séries. Para ele, o conceito de variável deveria ser construído gradualmente, usando tabelas, gráficos e jogos de cálculo como auxiliares nesta construção. Assim seria mais apropriado tratar a Álgebra como um corpo coeso de conceitos, rigorosamente conectados a outros ramos da Matemática.

Essa idéia é adequada tendo em vista que a representação de um problema consiste, essencialmente, na interpretação ou compreensão do mesmo. Para Polya (1978),

> *equacionar significa expressar por símbolos matemáticos uma condicionante que está formulada por palavras; é a tradução da linguagem corrente para a linguagem das fórmulas matemáticas.* (p. 73)

A emergência das representações matemáticas na solução de problemas ocorre quando as equações são aprendidas; equacionar ou representar usando corretamente os símbolos é importantíssimo, pois facilita a solução dos problemas.

Contudo, os alunos aparentam ter bastante dificuldade em perceber a Álgebra como uma generalização da Aritmética. Segundo Kieran (1991), eles nem acreditam que a Aritmética possa ser generalizada, cabendo então ao professor o dever de criar situações onde seja estimulada a exploração, a investigação e a tomada de decisão pelos alunos do "como fazer", pois *ao serem encorajados, os estudantes justificam seu próprio pensamento; as notações e a Álgebra passam a ser vistas como um modo natural de expressão* (p. 51).

Por ser uma das primeiras representações, a Álgebra não é apenas um capítulo do livro didático que se esgota em si mesmo, mas sim um elemento de fundamental importância para o desenvolvimento do raciocínio, da criatividade, da abstração e da organização do conhecimento. Alguns estudos (Robayna e Medina, 1997 e Ortiz, 1997) mostraram que as dificuldades na aprendizagem da Álgebra e na solução de problemas algébricos pode influenciar no desempenho futuro dos estudantes e nas atitudes que estes apresentam em relação à Matemática.

Brito (1996a), em seu estudo, comentou que existe uma lacuna com relação aos estudos realizados no Brasil no que se refere às atitudes de estudantes. Embora em outros países as atitudes sejam amplamente estudadas, aqui estes estudos não parecem ter sido grandemente apreciados. Em uma análise sobre a estabilidade das atitudes (Brito, 1995), essa autora relacionou a introdução da Álgebra com o decréscimo nas atitudes positivas com relação à Matemática. O estudo mostrou a questão das atitudes como um componente do sistema educacional e revelou ainda que *a maioria dos trabalhos levanta duas questões principais: 1) homens e mulheres diferem no desempenho matemático; 2) homens e mulheres diferem nas atitudes em relação à Matemática* (p. 56).

Tendo em vista os poucos estudos realizados no Brasil relacionando os temas em questão e o reconhecimento da interferência das variáveis afetivas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997a), considerou-se importante verificar se existiam, de fato, diferenças entre as atitudes e habilidades na solução de problemas algébricos e se estas diferenças poderiam ser atribuídas à variável gênero.

É conveniente notar que quanto mais estudos visando investigar a questão do desempenho e das habilidades relacionadas ao gênero (não apenas na solução de problemas) forem feitos, mais dados estarão disponíveis para melhorar o ensino. Além disso, identificar as dificuldades que podem ocorrer no processo de aprendizagem da Álgebra também pode auxiliar o professor a reconhecer essas dificuldades e incentivá-lo a buscar novos métodos de ensino que favoreçam uma aprendizagem mais significativa para os alunos. Assim, os rótulos de "domínio masculino" ou "domínio feminino" da Matemática poderão ser descaracterizados, ajudando inclusive os estudantes a optarem por outras carreiras, nas quais eles apresentam condições de terem desempenho mais satisfatório.

Sujeitos, Materiais e Procedimento

Sujeitos

A amostra de conveniência foi constituída por 256 estudantes matriculados nas sextas, sétimas e oitavas séries de uma escola da rede pública de ensino de Paulínia.

Materiais

Na primeira fase do estudo foi aplicado um instrumento contendo: a) cinco problemas matemáticos para as sextas e sétimas séries, e quatro para as oitavas séries; b) uma escala de atitudes em relação à Matemática; e c) um questionário para caracterizar o perfil do aluno (anexo A). A partir dos resultados obtidos no instrumento matemático, foram selecionados três alunos dentre os de melhor desempenho (isto é, três que demonstraram, através do instrumento, habilidade em Matemática), para solucionarem problemas usando o método "pensar em voz alta", com a finalidade de se identificarem os componentes da habilidade que se evidenciam durante a solução de problemas.

Foram utilizados os seguintes instrumentos:

a) um instrumento, tipo lápis e papel, contendo quatro problemas (na oitava série) e cinco problemas (sexta e sétima séries), elaborados pelo Grupo de Pesquisa de Psicologia da Educação Matemática da Faculdade de Educação da UNICAMP;

b) um instrumento, tipo lápis e papel, contendo vários problemas algébricos, já utilizados por Krutetskii (1976), extraídos das séries I (problemas incompletos, anexo B), V (sistemas de problemas de um único tipo, anexo C), VIII (composição de problemas de um determinado tipo, anexo D), X (composição de equações usando os termos de um problema, anexo E), XIII (problemas com várias soluções, anexo F), XIV (problemas com mudança de conteúdo, anexo G), XV (problemas de reconstrução de uma operação, anexo H), XVII (problemas diretos e reversos, anexo I), XVIII (tarefas heurísticas, anexo J), XXI (sofismas matemáticos, anexo K), XXII (problemas com termos difíceis de serem lembrados, anexo L) e XXIV (problemas com formulações visuais e verbais, anexo M) para investigar os seguintes componentes da habilidade matemática: percepção, generalização, lógica, automatização do raciocínio, busca por soluções elegantes e econômicas, memória, reversibilidade e tipo de habilidade;

A percepção dos fatos concretos em um problema foi investigada através da solução dos problemas extraídos das séries I, V, VIII, X, XXII e XXIV.

As séries V, VIII, IX, X, XVIII, XXII e XXIV forneceram material para investigar a generalização matemática.

A lógica no raciocínio foi estudada principalmente pelas séries IX, X, XVIII e XXI.

As séries IX, X, XVIII e XXIV forneceram material para o estudo da automatização do processo de raciocínio.

A flexibilidade de pensamento foi investigada nas séries X, XIII, XIV, XV e XXI.

A busca por soluções elegantes foi observada através da série XIII e a reversibilidade dos processos mentais, através dos problemas extraídos da série XVII.

As séries XXII e XXIV forneceram material para o estudo da memória matemática.

Os tipos de habilidade matemática (analítica, geométrica ou harmônica) foram investigados utilizando-se as séries XV, XXI e XXIV.

Com base no tempo disponível para fazer a aplicação das séries, algumas exigências, tais como reaplicar a série após uma semana (série XIII), após um mês (séries XIV e XVII), foi estabelecida uma ordem de apresentação das séries aos sujeitos: Série XVIII, Série V, Série XVII, Séries I e XIII, reaplicar a Série XIII, Série XIV, reaplicar a Série XVII, Série X, Série XXI, reaplicar a Série XIV, Séries XXII e VIII, Série XV e Série XXIV.

c) uma escala de atitudes do tipo Likert (anexo A) composta de 10 proposições negativas e 10 proposições positivas a respeito da Matemática, elaborada por Aiken (1961), revista por Aiken e Dreger (1963), traduzida, adaptada e validada por Brito (1996a, 1998);

d) um questionário elaborado para atender as finalidades do presente estudo, baseado no questionário elaborado por Brito (1996a, 1998), contendo questões referentes ao gênero, idade, escolaridade dos pais, preferência por disciplina, hábitos de estudo, dentre outras;

e) gravador, para obtenção dos dados a partir da solução de problemas em voz alta.

Procedimento

Com o objetivo de verificar a adequação do questionário informativo e do teste matemático elaborado pelo Grupo de Pesquisa de Psicologia da Educação Matemática da Faculdade de Educação da UNICAMP (PSIEM), foi realizado um estudo piloto com 209 estudantes do período diurno, provenientes de sexta, sétima e oitava séries de duas escolas, sendo uma delas da rede pública de ensino de Paulínia (112 sujeitos) e outra da rede particular de ensino de Campinas (97 sujeitos). Esses instrumentos foram aplicados, numa outra amostra, para selecionar os sujeitos com melhor desempenho que participariam da segunda etapa do estudo.

Nessa amostra, do estudo piloto, 56,9% dos sujeitos eram do gênero masculino e 43,1% do gênero feminino, com idades que variavam de 11 a 19 anos.

Os resultados mostraram um fraco desempenho dos sujeitos no teste matemático, tendo sido encontrados muitos testes com todas as respostas incorretas e/ ou não respondidas. Quando os sujeitos foram agrupados de acordo com a série e aplicada a análise de variância, $F(2{,}206) = 17{,}27$, $p = 0{,}000$, foram verificadas diferenças significativas entre as médias das notas dos grupos. O teste de *Tukey-HSD* mostrou que a sexta série teve um desempenho significativamente melhor que a sétima e esta, por sua vez, obteve resultado superior ao da oitava série.

Mesmo tendo sido observada uma grande quantidade de notas zero, o teste foi julgado apropriado, pois a função final deste teste era selecionar o sujeito com melhor desempenho em cada uma das três séries. Se o teste fosse substituído por outro mais fácil, esse objetivo seria descaracterizado.

Ainda com base nos resultados desse estudo, foram também feitas pequenas adaptações no questionário informativo (Anexo A), sem contudo descaracterizar o modelo no qual se baseou. A forma como algumas questões foram apresentadas não era adequada porque:

- a questão sobre a idade do sujeito, que solicitava os anos e meses, suscitou dúvidas. Os alunos não conseguiram respondê-la sem ajuda (não sabiam contar os meses além do número inteiro de anos); logo, na fase seguinte de aplicação dos instrumentos, como a precisão deste dado não era tão importante, foi solicitada apenas a idade completa em anos;

- as questões que se referiam à escolaridade dos pais geraram grande confusão. Os sujeitos sabiam apenas até que série os pais haviam freqüentado, mas não em que grau esta se encaixava, logo, esta questão que no estudo piloto era fechada passou a ser aberta (sem as alternativas);
- a questão sobre "quantos dias" o sujeito estudava Matemática recebeu o complemento "fora da escola", pois alguns sujeitos entenderam que era durante as aulas de Matemática;
- observou-se também problemas com vocabulário. Dessa forma, para a Fase I, o questionário sofreu algumas mudanças e durante a aplicação dos instrumentos o questionário e a escala de atitudes em relação à Matemática foram lidos, item por item, para os sujeitos.

Os problemas, o questionário e a escala de atitudes (anexo A) foram aplicados a todos os alunos das sexta, sétima e oitava séries do período diurno de uma outra escola da rede pública de Paulínia (Fase I). Com base no teste matemático, foram selecionados o aluno com melhor desempenho da sexta, sétima e oitava séries para trabalhar com os problemas extraídos das séries propostas por Krutetskii (anexos B, D, E, F, G, H, I, J, K, L e M), durante a Fase II.

Foi estabelecido com os sujeitos da Fase II que cada encontro duraria cerca de uma hora e que haveria quinze encontros (correspondentes à aplicação das doze séries e à reaplicação de três séries), sendo que em cada encontro seria trabalhada uma série. Entretanto, devido a problemas pessoais dos sujeitos, algumas séries foram vistas num mesmo encontro, de maior duração. Cada um dos sujeitos escolheu o dia e o horário em que preferiam realizar os encontros.

Os problemas da Fase II eram apresentados numa folha e era solicitado ao sujeito que solucionasse um problema de cada vez, usando o método "pensar em voz alta". Todos os encontros foram realizados na escola em que os sujeitos estudavam, fora do período de aulas e gravados em fitas cassete, as quais se encontram em poder do Grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática da Faculdade de Educação da UNICAMP.

As fitas foram transcritas e a partir dessa transcrição foi feita a análise dos procedimentos de solução dos problemas. Com esse procedimento tentou-se identificar os componentes da habilidade que eram evidenciados durante a solução de problemas algébricos.

Caracterização da rede pública de ensino fundamental e médio de Paulínia

A rede pública de ensino fundamental e médio de Paulínia, em 1998, ano em que se iniciou a coleta de dados, era constituída de 5 (cinco) escolas estaduais, 4 (quatro) escolas municipais e 1 (uma) escola de ensino Supletivo. Segundo dados da Secretaria Municipal de Educação de Paulínia, a rede pública de ensino do município era composta pelas seguintes escolas:

1- Escola A, localizada à Rua Rio de Janeiro, 70, na vila José Paulino Nogueira. Funcionava em 3 (três) períodos e oferecia ensino da quinta à oitava série e de segundo grau.
2- Escola B, localizada à Rua Presidente Costa e Silva, 520, no bairro Nova Paulínia. Funcionava em 3 (três) períodos e oferecia ensino da quinta à oitava série e de segundo grau.
3- Escola C, localizada à Rua Campos Sales, 350, no bairro João Aranha. Funcionava em 3 (três) períodos e oferecia ensino da primeira à oitava série.
4- Escola D, localizada à Rua Aragarças, s/nº, no bairro Jardim Planalto. Funcionava em 3 (três) períodos e oferecia ensino da quinta à oitava série.
5- Escola F, localizada à Av. Aristóteles Costa, 373, no Centro. Funcionava em 3 (três) períodos e oferecia ensino da quinta à oitava série.
6- Escola G, localizada à Av. Brasil, 330, na Vila Bressani. Funcionava em 3 (três) períodos e oferecia ensino de segundo grau.
7- Escola H, localizada à Av. Luiz Grecco, 181, no bairro Jardim Monte Alegre I. Funcionava em 3 (três) períodos e oferecia ensino da primeira à oitava série e de segundo grau.
8- Escola I, localizada à Rua Constante Pavan, 1001, no bairro Betel. Funcionava em 3 (três) períodos e oferecia ensino de segundo grau.
9- Escola J, localizada à Rua do Comércio, s/nº, no bairro Betel. Funcionava em 2 (dois) períodos e oferecia ensino da primeira à quarta série (manhã) e da sexta à sétima série (tarde).
10- Escola K, localizada à Rua Padre Anchieta, 121, no Centro. Funcionava no período noturno em duas unidades (Centro e Monte Alegre) e oferecia ensino supletivo da quinta à oitava série e de segundo grau.

A Tabela 1 apresenta a quantidade de alunos por escola, nas séries utilizadas no presente estudo. Observe-se que as letras que nomeiam as escolas são diferentes das letras que as nomearam na caracterização para preservar as escolas e os sujeitos da pesquisa.

Tabela 1:

Quantidade de alunos por série por escola

Escolas		6ª série	7ª série	8ª série	Total de alunos
α	M	6	1	-	
	T	-	3	3	
quantidade de alunos		210	140	105	455
β	**M**	**-**	**-**	**4**	
	T	**5**	**6**	**1**	
quantidade de alunos		**200**	**240**	**200**	**640**
δ	M	-	-	-	
	T	2	2	-	
quantidade de alunos		76	76	-	152
ε	M	3	1	1	
	T	2	3	1	
quantidade de alunos		210	168	84	462
φ	M	2	2	1	
	T	2	2	2	
quantidade de alunos		180	180	135	495
λ	**M**	**-**	**-**	**3**	
	T	**3**	**3**	**-**	
quantidade de alunos		**120**	**120**	**120**	**360**
π	M	-	-	-	
	T	1	1	-	
quantidade de alunos		40	40	-	80
Total de alunos		1036	964	644	2644

As escolas β e λ foram intencionalmente escolhidas para o estudo piloto e para as Fases I/II, respectivamente, constituindo-se em uma amostra de conveniência, pelo fato de terem oferecido amplas facilidades de acesso.

Capítulo IV

Análise dos dados

> *Aprender* [o conteúdo escolar] *é uma tarefa árdua, na qual se convive o tempo inteiro com o que ainda não é conhecido. Para o sucesso da empreitada, é fundamental que exista uma relação de confiança e respeito mútuo entre professor e aluno, de maneira que a situação escolar possa dar conta de todas as questões de ordem afetiva.*
>
> PCN's (Brasil, 1997a, p. 101)

Neste capítulo, são apresentados os resultados da análise dos dados dos instrumentos utilizados na Fase I (com 256 sujeitos do período diurno de uma escola pública) e os utilizados na Fase II (com três sujeitos, selecionados a partir da Fase I).

Os dados obtidos foram analisados usando o pacote estatístico SPSS (Statistical Package for Social Sciences) versão 6.0 (Norusis, 1993). A seguir são apresentadas algumas considerações sobre o nível de significância e sobre os testes utilizados no presente estudo.

Sobre o nível de significância

Segundo Witter (1996), o nível de significância é uma probabilidade estabelecida pelo pesquisador, que indica a probabilidade de ocorrência de um erro plausível, aceito como risco calculado e denominado também de margem de erro. O nível de significância depende do tamanho da amostra, da variabilidade interna da variável estudada naquela amostra, bem como das condições de pesquisa.

Ainda de acordo com Witter (1996), ao se escolher o nível de significância deve-se levar em consideração os pontos fracos e limitações da pesquisa. Neste sentido, deve-se examinar o nível de desenvolvimento do conhecimento da área, as condições experimentais (se for o caso), controle de variáveis, confiabilidade e fidedignidade dos instrumentos de medida e as conseqüências da tomada de decisões. Assim, quanto mais precisos forem os instrumentos de medida, mais controlado for o experimento, menor a interferência de fatores exógenos e nenhuma conseqüência grave da tomada de decisão, neste caso pode-se ser mais exigente na escolha do nível de significância. Porém, quando se trabalha em condições de sala de aula, contando-se com a boa vontade dos sujeitos para participar da pesquisa, pode-se ser mais flexível na escolha deste nível. De acordo com estas considerações, para o presente trabalho foi escolhido o nível de significância de 0,050, ou seja uma margem de erro de 5%, que, ademais, segundo o manual da APA - *American Psychological Association* (1996), é um dos níveis de significância mais utilizados nas pesquisas de Psicologia.

Sobre os testes utilizados

Os testes *t* e *F* (Análise de Variância) são estatísticas paramétricas amplamente utilizadas para examinar diferenças entre as média de grupos, quando se analisa uma variável dependente quantitativa, contínua ou intervalar, em função do número de grupos que estão sendo comparados.

Por exemplo, para analisar a pontuação total na escala de atitudes, variável quantitativa contínua, definida como variável dependente, em função do gênero, variável qualitativa, definida como variável independente, que tem dois níveis, masculino e feminino, foi utilizado o teste *t*. Embora, também, pudesse ter sido usado o teste *F*, o teste *t* é o mais apropriado quando se compara dois grupos (Cone e Foster, 1993, p. 179). Já para analisar as atitudes por série, com três níveis, ou autopercepção de desempenho em Matemática, com quatro níveis, ou seja três ou mais grupos, foi utilizado o teste *F*.

Tanto o teste *t* como o teste *F* possuem vários pressupostos que devem ser examinados para sua aplicação adequada. No presente trabalho três pressupostos foram examinados: normalidade da variável dependente, homogeneidade da variância e a independência das amostras ou grupos.

Para examinar a normalidade da variável foi utilizado o teste de *Lilliefors*, que é uma modificação do teste de *Kolmogorov-Smirnov*, utilizado quando a média e a variância populacional são desconhecidos e que está baseado na maior diferença, em valor absoluto, entre o valor observado da função de distribuição acumulada da variável e o valor esperado da distribuição teórica (Norusis, 1993). Deve-se observar que a principal característica da distribuição normal é a simetria em torno da média, o que às vezes não acontece com a distribuição das atitudes, principalmente quando ela contempla grupos diferentes, o que pode acentuar a assimetria positiva ou negativa. Este problema foi mais notório quando se analisou a variável nota no teste de Matemática, pois a maioria dos alunos obteve notas baixas, concentrando a maioria nesses valores, fazendo com que a assimetria positiva fosse muito acentuada, o que poderia comprometer a normalidade da variável. Contudo, isto não se revelou um problema tendo em vista que o tamanho da amostra era suficientemente grande ($N = 256$), o que garantia a convergência à normalidade, pelo Teorema Central do Limite (Bussab e Morettin, 1986).

Para examinar a homogeneidade da variância foi utilizado o teste de *Levene*, que é o que menos depende da suposição de normalidade da variável em relação à maioria dos testes, o que o torna um teste útil para a análise de variância. Este teste é obtido calculando-se, para cada caso, o valor absoluto da diferença da observação em relação à média de seu grupo e aplicando-se a análise de variância de um fator.

Quanto à independência das amostras, ela foi garantida no momento em que se analisaram grupos diferentes, cujos resultados não interferiam nos resultados dos outros grupos. Por exemplo, a atitude da aluna X da sexta série independe da atitude do aluno Y da mesma série.

Uma vez aplicados esses testes, duas situações poderiam ocorrer (Milton, 1992):

a) conclusão de que, com base nos dados, não seria possível detectar diferenças entre as médias. Neste caso a análise de variância dos dados estaria completa.

b) constatação de que existem diferenças entre os grupos. No caso do teste *t*, para dois grupos, a análise estaria concluída. Porém, quando se tivessem três grupos ou mais, a análise deveria continuar a fim de situar onde exatamente essas diferenças existiam.

Existem vários métodos para detectar diferenças entre as médias de grupos, denominados testes de comparações múltiplas.

Como existem vários métodos, a escolha levou em consideração seu poder, robustez ante a violação dos pressupostos, bem como as situações nas quais cada método era mais apropriado do ponto de vista conceitual. De acordo com Jaccard, Becker e Wood (como citado em Cone e Foster, 1993), com medidas repetidas e variâncias não homogêneas, o teste *Tukey-HSD* (honestly significant difference) ou teste de *Bonferroni*, são adequados.

No presente trabalho, após a análise dos pressupostos subjacentes na ANOVA, decidiu-se usar o teste *Tukey - HSD*.

A maioria dos testes de comparações múltiplas ordenam as médias da menor à maior e iniciam o processo de comparação fixando a média menor e a maior média, se as médias forem iguais o processo termina, caso contrário, a menor média é comparada com a segunda maior média, se forem iguais o processo pára e, assim por diante, até exaurir as comparações. Esse processo se repete para as médias que forem diferentes. No caso do SPSS os dados são apresentados em uma matriz simétrica da seguinte forma:

Tabela x:

Diferença entre as atitudes em relação à Matemática em função da auto percepção do desempenho em Matemática.

Média dos grupos	"Eu não tenho bom desempenho em matemática"	Concordo totalmente	Concordo	Discordo	Discordo totalmente
40,88	1=Concordo totalmente		H_o: $\mu_1=\mu_2$	H_o: $\mu_1=\mu_3$	H_o: $\mu_1=\mu_4$
51,61	2=Concordo	H_o: $\mu_2=\mu_1$		H_o: $\mu_2=\mu_3$	H_o: $\mu_2=\mu_4$
57,92	3=Discordo	H_o: $\mu_3=\mu_1$	H_o: $\mu_3=\mu_2$		H_o: $\mu_3=\mu_4$
67,37	4=Discordo totalmente	H_o: $\mu_4=\mu_1$	H_o: $\mu_4=\mu_2$	H_o: $\mu_4=\mu_3$	

Para apresentar os dados relativos ao teste F, foram colocados os graus de liberdade entre grupos, os graus de liberdade dentro dos grupos e o valor da estatística. Por exemplo: $F(2, 258) = 3{,}3168$, $p = 0{,}008$, significa que os graus de liberdade entre grupos era 2 (número de grupos menos um), uma vez que estavam sendo comparados três grupos; os graus de liberdade dentro dos grupos era 258 (número de dados menos o número de grupos), ou seja, havia 261 dados (ou sujeitos) e o valor da estatística F era 3,3168, sendo que o valor p foi de

0,008. Optou-se por este tipo de apresentação, colocando o valor exato de p, uma vez que isto permite ao leitor tirar suas próprias conclusões quanto à significância do teste.

No presente trabalho o teste chi-quadrado (X^2) foi aplicado com a finalidade de verificar se uma variável dependente categórica, por exemplo, tipo de resposta (certa, errada, meio-certa) estava associada a uma variável independente categórica, por exemplo, tipo de procedimento (algébrico, aritmético, viso-pictórico, tentativa e erro, não identificado), caso em que a tabela é 3x5.

Na apresentação dos resultados do teste neste caso, foi usada a seguinte notação: $X^2(8, N = 251) = 5{,}321$, $p = 0{,}0000$; onde oito se refere ao número de graus de liberdade, calculado como o produto do número de linhas menos um, vezes o número de colunas menos um. $N = 251$ se refere ao número de dados envolvidos na análise, via de regra igual ao número de sujeitos. O valor 5,321 é calculado a partir da amostra. Finalmente, o valor $p = 0{,}0000$ é a probabilidade de que a distribuição chi-quadrado com oito graus de liberdade seja maior que ou igual a 5,321.

A análise de correlação verifica o grau de associação linear entre duas variáveis quantitativas contínuas ou intervalares, tendo sido utilizada para verificar as possíveis relações entre as atitudes e a nota no teste matemático, bem como a nota no teste matemático e a média na escola. Para tal fim foi utilizado o coeficiente de correlação de Pearson (r), que indica a existência ou não de relação linear entre as variáveis. A análise de regressão foi utilizada para modelar essa relação.

Análise descritiva dos dados dos sujeitos

A primeira etapa do estudo teve como sujeitos 256 estudantes oriundos da sexta, sétima e oitava séries, tendo sido selecionadas, por conveniência, três classes de cada uma dessas séries, do período diurno de uma escola da rede pública municipal de ensino de Paulínia.

Tabela 2:

Distribuição de freqüência dos sujeitos por série

Série	Freqüência	Porcentagem
6ª	100	39,0
7ª	77	30,0
8ª	79	31,0
Total	256	100,0

Com relação ao gênero, 50,8% dos sujeitos pertenciam ao gênero masculino e 49,2% ao feminino. A idade dos sujeitos variava entre 11 e 19 anos. 64,7% destes sujeitos informou que não recebia ajuda para estudar ou realizar suas tarefas de Matemática e, dentre os que recebiam ajuda, predominava a assistência de pessoas da família, como pode ser observado na Tabela 3.

Tabela 3:

Distribuição de freqüência dos sujeitos de acordo com a pessoa da qual recebe ajuda no estudo

Auxiliador	Freqüência	Porcentagem
Alguém da casa	67	26,3
Outra pessoa da família	03	1,2
Outra pessoa	19	7,4
Ninguém	166	65,1
Total	255	100,0

Com relação à escolaridade dos pais, poucos tinham o segundo grau completo ou superior. Quase um terço dos sujeitos não soube informar a escolaridade dos pais, como pode ser observado na Tabela 4.

Tabela 4:

Distribuição de freqüência dos sujeitos de acordo com a escolaridade dos pais

Escolaridade	Pai		Mãe	
	Freqüência	Porcentagem	Freqüência	Porcentagem
Nunca estudou	02	0,8	02	0,8
1°. grau incompleto	85	33,2	109	42,6
1°. grau completo	40	15,6	31	12,1
2°. grau incompleto	03	1,2	12	4,7
2°. grau completo	15	5,9	17	6,6
Superior incompleto	05	1,9	02	0,8
Superior completo	09	3,5	08	3,1
Não sei	97	37,9	75	29,3
Total	256	100,0	256	100,0

A figura 2 mostra a distribuição dos sujeitos segundo a quantidade de dias dedicados ao estudo de Matemática. A maioria dos sujeitos (66,3%) afirmou que não dedicava nenhum dia por semana para estudar Matemática fora da sala de aula. A porcentagem de sujeitos que não estuda é bastante superior aos 30,4% encontrados por Brito (1996a) em um estudo que teve como sujeitos estudantes desde a terceira série do ensino fundamental à terceira série do ensino médio.

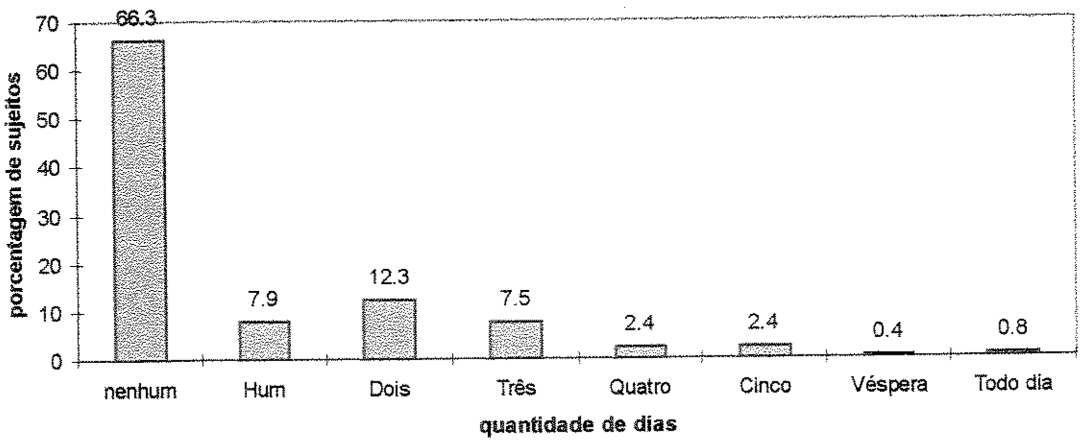


Figura 2:

Histograma da distribuição dos sujeitos segundo a quantidade de dias de estudo

Com relação à freqüência com que os sujeitos afirmaram entender os problemas matemáticos dados em sala de aula, 89,4% dos sujeitos declararam que entendiam sempre ou na maioria das vezes. Essa compreensão, no entanto, não foi confirmada na solução dos problemas do teste matemático deste estudo.

Tabela 5:

Distribuição dos sujeitos segundo a freqüência de sua compreensão

Compreensão	Freqüência	Porcentagem
Sim, sempre	44	17,3
Sim, maioria	184	72,1
Não, maioria	25	9,8
Não, nunca	02	0,8
Total	255	100,0

A disciplina Matemática foi citada como a preferida pelos sujeitos, enquanto a Geografia foi apontada como a disciplina de que os sujeitos menos gostavam. Estes resultados são concordantes com outros estudos realizados pelo grupo de pesquisa de Psicologia da Educação Matemática da Faculdade de Educação da UNICAMP, onde a Matemática aparece como a preferida ou entre as preferidas, enquanto Geografia e História aparecem como as que mais lhes desagradam.

Tabela 6:

Distribuição dos sujeitos segundo a disciplina preferida

Disciplina	Freqüência	Porcentagem
Matemática	72	28,1
Ed. Física	58	22,6
História	44	17,2
Ciências	26	10,2
Ed. Artística	20	7,8
Inglês	18	7,0
Português	13	5,1
Geografia	03	1,2
Química	01	0,4
Nenhuma	01	0,4
Total	256	100,0

Tabela 7:

Distribuição dos sujeitos segundo a disciplina de que menos gostam

Disciplina	Freqüência	Porcentagem
Geografia	74	28,9
Português	67	26,2
Ciências	46	18,0
Matemática	21	8,2
Inglês	18	7,0
Ed. Artística	13	5,1
Nenhuma	07	2,6
Química	04	1,6
História	02	0,8
Ed. Física	02	0,8
Todas	02	0,8
Total	256	100,0

Com relação à repetência, os sujeitos da amostra se distribuíram de maneira quase eqüitativa, pois 46,3% já haviam sido reprovados alguma vez e 53,7% nunca haviam sido reprovados.

A porcentagem de sujeitos de acordo com a proposição escolhida na escala de atitudes em relação à Matemática, encontra-se no anexo N.

A Proposição 21, "Não tenho um bom desempenho em Matemática", não faz parte da escala de atitudes original, tendo sido colocada posteriormente por Brito (1996a), com o objetivo de estudar possíveis relações entre a autopercepção do desempenho do sujeito e as atitudes em relação à Matemática. No presente estudo optou-se por mantê-la para estudar as relações entre a autopercepção do desempenho, as atitudes, o desempenho no teste matemático e o desempenho na escola. Desta forma, quando a escala é considerada, o resultado se refere às vinte primeiras proposições.

Tabela 8:

Distribuição dos sujeitos de acordo com a resposta à proposição 21

Não tenho um bom desempenho em Matemática	Freqüência	Porcentagem
Concordo totalmente	25	9,8
Concordo	77	30,0
Discordo	78	30,5
Discordo totalmente	76	29,7
Total	256	100,0

Como pode ser observado na Tabela 8, a autopercepção do desempenho mostra tendência à positividade, isto é, metade dos alunos se percebem como tendo bom desempenho em Matemática, o que não foi confirmado pelo teste aplicado.

Análise das Atitudes

Com a finalidade de aferir as atitudes dos sujeitos, foi aplicada uma escala de atitudes contendo vinte proposições. Dez destas proposições são negativas e as outras dez são positivas. Cada proposição possui quatro possibilidades de resposta: concordo totalmente, concordo, discordo e discordo totalmente.

A escala original de Aiken (1961) revista por Aiken e Dreger (1963) possuía cinco possibilidades de escolha: concordo totalmente, concordo, mais ou menos, discordo e discordo totalmente.

No presente estudo as proposições positivas receberam pontos que variavam de 1 a 4: discordo totalmente (1), discordo (2), concordo (3) e concordo totalmente (4),

As proposições negativas receberam pontos que variam de 1 a 4, numa escala invertida: concordo totalmente (1), concordo (2), discordo (3), discordo totalmente (4).

A média da pontuação obtida pelos sujeitos, na escala de atitudes, foi 57,164, com um desvio padrão de 12,539. Este valor é superior a média do grupo pesquisado por Brito (1996a), 52,514 com desvio padrão de 13,230 e a média do grupo estudado por Utsumi e Mendes (2000), 52,718 com desvio padrão 11, 837. Pode-se afirmar, com base nos estudos realizados pelo grupo de pesquisa em Psicologia da Educação Matemática da Faculdade de Educação da UNICAMP, que as atitudes do grupo de sujeitos do presente estudo apresentou tendências mais positivas que a média dos outros dois estudos.

Com base nos resultados, obtidos a partir das respostas dos sujeitos à escala de atitudes, pode-se dizer que, nesta amostra, os sujeitos com atitudes positivas em relação à Matemática foram os que apresentaram valores superiores a 57,164 (média do grupo considerado) na escala de atitudes e os sujeitos com atitudes negativas em relação à Matemática foram os que apresentaram valores inferiores a 57,164 na referida escala. Isto é mostrado na figura 3.

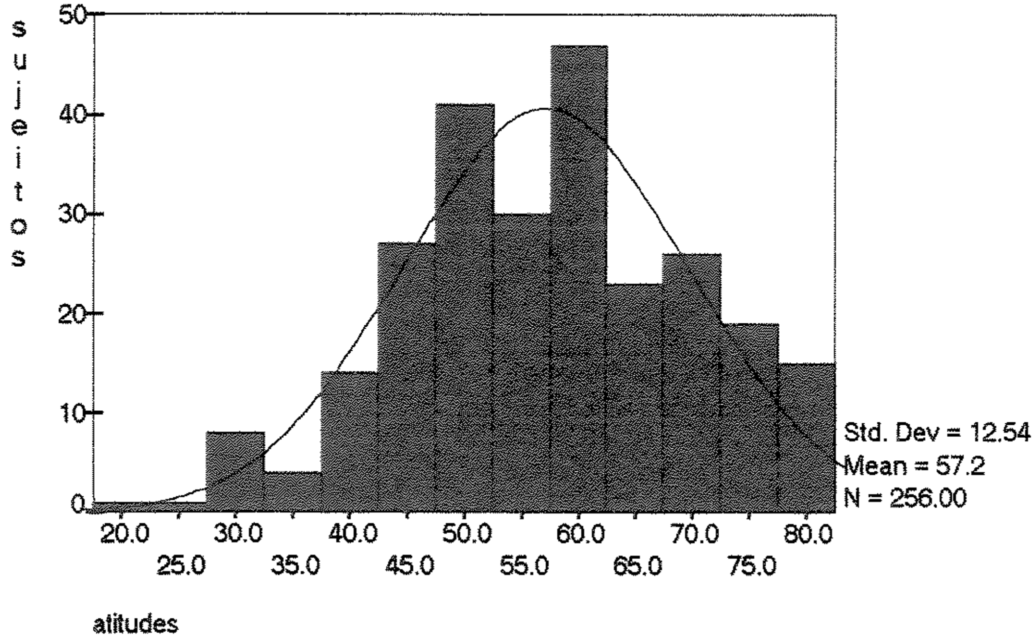


Figura 3:

Distribuição dos valores obtidos pelos sujeitos na escala de atitudes em relação à Matemática

Quando foram analisadas as médias obtidas na escala de atitudes, de acordo com a distribuição dos sujeitos por série, foi verificado que os sujeitos da oitava série apresentaram as atitudes mais positivas com relação à Matemática e os da sexta série, as mais negativas. Na Tabela 9, as médias dos sujeitos na escala de atitudes quando estes são agrupados por série:

Tabela 9:

Distribuição das médias dos sujeitos na escala de atitudes de acordo com a série

Série	N° de Sujeitos	Média	Desvio padrão	Mínima	Máxima
6ª	100	54,4700	12,8365	26,0000	80,0000
7ª	77	57,0390	12,8180	22,0000	80,0000
8ª	79	60,6962	11,0840	29,0000	80,0000
Total	256	57,1641	12,5390	22,0000	80,0000

A análise de variância $F(2, 253) = 5{,}64$, $p = 0{,}004$ revelou a existência de diferenças significativas entre as médias dos grupos.

Brito (1996a) encontrou que os alunos da sétima série apresentavam atitudes mais negativas e relacionou isso ao fato de esses alunos estarem aprendendo Álgebra na época. Como os sujeitos do presente estudo, oriundos da sexta e sétima séries estavam aprendendo praticamente o mesmo conteúdo algébrico, e os da oitava já o haviam aprendido, as médias das atitudes parecem indicar que conforme o aluno passa a dominar esse conteúdo, as atitudes assumem uma direção positiva, corroborando os resultados obtidos por Brito (1996a).

Com a finalidade de saber quais grupos apresentavam diferenças significativas entre as médias, foi aplicado o teste *Tukey - HSD*, obtendo-se os seguintes resultados:

Tabela 10:

Resultado do teste *Tukey-HSD* para as médias das atitudes por série

Médias	Grupo	6ª série	7ª série	8ª série
54,4700	6ª série			
57,0390	7ª série			
60,6962	8ª série	*		

(*) indica diferença estatisticamente significativa entre os grupos ($p < 0{,}050$)

O teste *Tukey-HSD* indicou que o resultado do grupo de sujeitos da sexta série era significativamente inferior ao da oitava série.

Parece haver indícios de relação entre repetência e atitude dos sujeitos desta amostra, em relação à Matemática. Os sujeitos que nunca haviam sido reprovados apresentaram atitudes mais positivas que aqueles que já haviam tido alguma reprovação. O teste *t* de Student $t(253) = -2{,}00$, $p = 0{,}046$ evidenciou que existia diferença significativa entre as médias das atitudes dos dois grupos.

Tabela 11:

Distribuição das médias dos sujeitos na escala de atitudes de acordo com a reprovação

Reprovação	N	Média	Desvio padrão	Mínima	Máxima
Sim	118	55,4576	12,7612	22,0000	80,0000
Não	137	58,5912	12,2430	26,0000	80,0000
Total	255	57,1412	12,5587	22,0000	80,0000

Quando os sujeitos foram agrupados de acordo com o gênero, foi verificado que a média do grupo masculino era ligeiramente superior à média obtida pelo grupo feminino. Entretanto, quando foi aplicado o teste *t* de Student $t(254)= 0{,}84$, $p = 0{,}399$, este não evidenciou diferenças significativas. Quando foram comparadas as médias das atitudes, agrupando os sujeitos por gênero e série, também não foram encontradas diferenças significativas entre as médias dos grupos.

Tabela 12:

Distribuição das médias dos sujeitos na escala de atitudes de acordo com o gênero

Gênero	N	Média	Desvio padrão	Mínima	Máxima
Masculino	130	57,8154	11,2228	28,0000	80,0000
Feminino	126	56,4921	13,7798	22,0000	80,0000
Total	256	57,1641	12,5394	22,0000	80,0000

Apenas um sujeito afirmou estudar somente na véspera da prova, tendo sido agrupado junto aos sujeitos que afirmaram não estudar nenhum dia e esta categoria foi denominada “menos de um dia”. Os sujeitos que afirmaram estudar quatro dias (6 sujeitos), cinco dias (6) e todos os dias da semana (2) foram agrupados na categoria “mais de quatro dias”. Dessa forma, as médias das atitudes dos sujeitos, quando agrupadas de acordo com a quantidade de dias dedicados por semana ao estudo de Matemática, distribuíram-se da seguinte maneira:

Tabela 13:

Distribuição das médias das atitudes de acordo com a quantidade de dias de estudo

Nº dias	N	Média	Desvio padrão	Mínima	Máxima
Menos de um	168	55,5893	12,7026	22,0000	80,0000
Um dia	20	54,2000	12,2371	29,0000	79,0000
Dois dias	31	59,4194	10,1152	39,0000	77,0000
Três dias	19	66,7368	08,6849	51,0000	80,0000
Mais de 4	14	63,4286	12,7925	39,0000	80,0000
Total	252	57,2262	12,5266	22,0000	80,0000

A análise de variância $F(7, 244) = 3,29$, $p = 0,000$ revelou que existiam diferenças significativas entre as médias.

O teste *Tukey-HSD* mostrou que o grupo de sujeitos que afirmou que se dedicava a estudar Matemática três vezes por semana apresentava média superior às médias dos demais grupos, sendo que as diferenças das médias entre este grupo e os grupos de sujeitos que se dedicavam a estudar um dia ou menos de um dia, por semana, foram significativas.

Tabela 14:

Resultado do teste *Tukey-HSD* para as médias das atitudes de acordo com a freqüência de estudo

Médias	Grupo	um dia	menos de um dia	dois dias	mais de quatro dias	três dias
54,2000	um dia					
55,5893	menos de um dia					
59,4194	dois dias					
63,4286	mais de quatro dias					
66,7368	três dias	*	*			

(*)indica diferenças significativas ($p < 0,050$)

Não foram encontradas diferenças significativas entre as médias de atitudes dos sujeitos, quando estes foram agrupados de acordo com a pessoa que os ajudava nas tarefas de Matemática.

Quanto à compreensão de problemas na sala de aula, a categoria dos sujeitos que afirmaram não compreender nunca os problemas matemáticos registrou duas ocorrências e estas foram agregadas à categoria dos sujeitos que afirmaram não compreender os problemas matemáticos na maioria das vezes.

Tabela 15:

Distribuição das médias das atitudes de acordo com a freqüência na compreensão

Compreensão	N	Média	Desvio padrão	Mínima	Máxima
Sim, sempre	44	69,8864	9,1454	48,0000	80,0000
Sim, maioria	184	56,1087	10,6908	26,0000	79,0000
Não	27	43,6296	11,2836	22,0000	64,0000
Total	255	57,1647	12,5640	22,0000	80,0000

A análise de variância $F(2, 252) = 37,87$, $p = 0,000$ apontou a existência de diferenças significativas entre as médias dos grupos.

Tabela 16:

Resultado do teste *Tukey-HSD* para média na escala de atitudes por freqüência na compreensão

Médias	Grupo	Não 43,6296	Sim, maioria 56,1087	Sim , sempre 69,8864
43,6296	Não			
56,1087	Sim, maioria	*		
69,8864	Sim, sempre	*	*	

(*) indica diferença significativa ($p < 0,050$)

O resultado do teste *Tukey-HSD* mostrou que os sujeitos que declararam sempre entender os problemas matemáticos dados em sala de aula obtiveram média superior na escala de atitudes, ou seja, estes sujeitos possuíam atitudes mais positivas em relação à Matemática do que os sujeitos que entendiam os problemas na maioria da vezes e do que os que não entendiam os problemas matemáticos nunca ou na maioria das vezes.

Os sujeitos foram agrupados de acordo com a sua autopercepção de desempenho e as suas médias na escala de atitudes ficaram assim distribuídas:

Tabela 17:

Distribuição das médias na escala de atitudes de acordo com a autopercepção de desempenho

Não tenho um bom desempenho em Matemática	N	Média	Desvio padrão	Mínima	Máxima
Concordo totalmente	25	40,8800	12,5377	22,0000	79,0000
Concordo	77	51,6104	08,6650	30,0000	70,0000
Discordo	78	57,9231	08,2427	42,0000	77,0000
Discordo totalmente	76	67,3684	10,5967	31,0000	80,0000
Total	256	57,1641	12,5394	22,0000	80,0000

Como pode ser observado na Tabela 17, os sujeitos que se percebiam com bom desempenho em Matemática apresentaram médias maiores na escala de atitudes em relação à Matemática. A análise de variância $F(3, 252) = 61,60$, $p = 0,000$ apontou a existência de diferenças significativas entre as médias dos grupos.

Tabela 18:

Resultado do Teste *Tukey-HSD* para as médias na escala de atitudes por autopercepção de desempenho

Médias	Grupo	Concordo totalmente	Concordo	Discordo	Discordo totalmente
40,8800	Concordo totalmente				
51,6104	Concordo	*			
57,9231	Discordo	*	*		
67,3684	Discordo totalmente	*	*	*	

(*) indica diferença significativa ($p < 0,050$)

O teste *Tukey-HSD* mostrou que o grupo de sujeitos que se percebia com bom desempenho era significativamente superior a todos os demais, quando foram comparadas as médias na escala de atitudes; enquanto aqueles que discordaram mais fracamente da afirmação eram superiores ao grupo que se percebia com fraco desempenho.

Análise estatística dos resultados obtidos no teste matemático

Novamente foi observada uma grande incidência de sujeitos com nota zero no teste matemático deste estudo (anexo A), e isso talvez possa ser explicado pela falta de motivação dos sujeitos para responderem ao referido teste, visto que a nota não seria computada para a disciplina de Matemática e, talvez, pelo medo de serem avaliados por alguém externo à escola. A seguir a distribuição dos sujeitos de acordo com a nota no teste matemático:

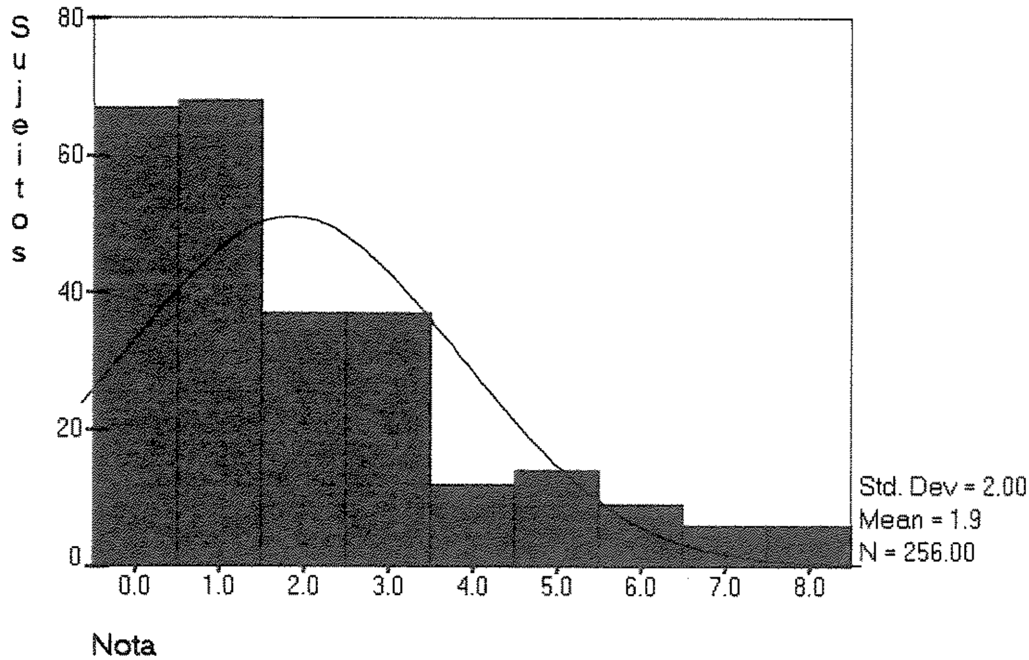


Figura 4:

Distribuição dos sujeitos de acordo com a nota no teste matemático

Como pode ser observado pela Figura 4, nenhum sujeito obteve a nota máxima (10,0) no teste. Quando os sujeitos foram agrupados por série, a média das notas ficaram distribuídas da seguinte forma:

Tabela 19:

Distribuição das médias no teste matemático de acordo com a série

Grupo	N	Média	Desvio padrão	Mínima	Máxima
6ª série	100	2,3850	2,1949	0,0000	8,0000
7ª série	77	1,5488	1,7716	0,0000	7,1600
8ª série	79	1,4684	1,8546	0,0000	7,5000
Total	256	1,8506	1,9976	0,0000	8,0000

A análise de variância $F(2,253) = 6,14$, $p = 0,002$ revelou a existência de diferenças significativas entre as médias das notas dos grupos.

Tabela 20:

Resultado do teste *Tukey-HSD* para a média das notas de acordo com a série

Médias	Grupo	8ª série 1,4684	7ª série 1,5488	6ª série 2,3850
1,4684	8ª série			
1,5488	7ª série			
2,3850	6ª série	*	*	

(*) indica diferença significativa ($p < 0,050$)

Os resultados do teste *Tukey-HSD* apontaram a existência de diferenças significativas entre as médias da sexta série e da sétima e oitava séries, ou seja a média das notas dos sujeitos da sexta série era superior às médias das notas da sétima e oitava séries.

Apenas na sexta série o teste t de Student $t(98)= -2,75$, $p = 0,007$ revelou a existência de diferenças significativas entre a média das notas do grupo com alguma reprovação e sem reprovação.

Tabela 21:

Distribuição das médias de acordo com ter ou não reprovação - 6ª série

Reprovação	N	Média	Desvio padrão	Mínima	Máxima
Sim	50	1,8000	1,6257	0,0000	6,0000
Não	50	2,9700	2,5282	0,0000	8,0000
Total	100	2,3850	2,1949	0,0000	8,0000

As notas dos sujeitos do gênero masculino foram superiores às notas dos sujeitos do gênero feminino, como pode ser observado na Tabela 22:

Tabela 22:

Distribuição das médias de acordo com o gênero

Gênero	N	Média	Desvio padrão	Mínima	Máxima
Masculino	130	2,3439	2,1002	0,0000	8,0000
Feminino	126	1,3417	1,7535	0,0000	8,0000
Total	256	1,8506	1,9976	0,0000	8,0000

O teste *t* de Student $t(254) = 4,15$, $p = 0,000$ revelou a existência de diferenças significativas entre as médias dos dois grupos, ou seja, para esta amostra, existiam diferenças entre as médias das notas que poderiam ser atribuídas à variável gênero.

Não foram encontradas diferenças significativas entre as médias das notas dos sujeitos, quando estes foram agrupados de acordo com a quantidade de dias que dedicavam ao estudo de Matemática.

Quando as variáveis nota e frequência na compreensão dos problemas matemáticos foram tratadas em conjunto, $F(2,\ 252) = 14,8419$, $p = 0,000$, foram encontradas diferenças significativas entre os grupos.

Tabela 23:

Distribuição das médias de acordo com a freqüência na compreensão

Compreensão	N	Média	Desvio padrão	Mínima	Máxima
Sim, sempre	44	3,2000	2,5272	0,0000	8,0000
Sim, maioria	184	1,6321	1,8025	0,0000	8,0000
Não	27	1,0430	1,1572	0,0000	4,0000
Total	255	1,8402	1,9946	0,0000	8,0000

O teste *Tukey-HSD* revelou que as médias das notas dos sujeitos que sempre compreendiam os problemas matemáticos dados em sala de aula eram superiores e estavam contribuindo para as diferenças significativas das médias dos sujeitos que compreendiam os problemas na maioria das vezes ou que não compreendiam os problemas matemáticos.

Tabela 24:

Resultado do teste de *Tukey-HSD* para as médias de acordo com a compreensão

Médias	Grupo	Não 1,0430	Sim, maioria 1,6321	Sim, sempre 3,2000
1,0430	Não			
1,6321	Sim, maioria			
3,2000	Sim, sempre	*	*	

(*) indica diferença significativa ($p < 0{,}050$)

A Tabela 25 mostra a distribuição das notas obtidas pelos sujeitos, estando agrupadas de acordo com a resposta dada por eles à questão da escala de atitudes relacionada com a autopercepção de desempenho.

Tabela 25:

Distribuição das médias de acordo com a autopercepção de desempenho

Não tenho bom desempenho em Matemática	N	Média	Desvio padrão	Mínima	Máxima
Concordo totalmente	25	1,4064	1,6738	0,0000	5,0000
Concordo	77	1,2790	1,4631	0,0000	6,6600
Discordo	78	1,6888	1,8077	0,0000	6,5000
Discordo totalmente	76	2,7420	2,4318	0,0000	8,0000
Total	256	1,8506	1,9976	0,0000	8,0000

A análise de variância $F(3{,}252)= 8{,}4013$, $p = 0{,}000$ revelou a existência de diferenças significativas entre as médias dos grupos. O teste *Tukey-HSD* mostrou que o grupo que discordava totalmente da afirmação, ou seja, os que se autopercebiam com um desempenho muito bom em Matemática , obtiveram as melhores notas no teste.

Tabela 26:

Resultado do teste *Tukey-HSD* para as médias das notas de acordo com a autopercepção do desempenho

Médias	Grupo	Concordo	Concordo totalmente	Discordo	Discordo totalmente
1,2790	Concordo				
1,4064	Concordo totalmente				
1,6888	Discordo				
2,7420	Discordo totalmente	*	*	*	

(*) indica diferença significativa ($p < 0{,}050$)

Em decorrência das baixas notas no teste matemático, buscou-se verificar se haveria relação entre estas médias e o rendimento escolar dos sujeitos, rendimento este representado pela média anual das notas nos vários bimestres.

A análise estatística dos dados, tanto através do coeficiente de correlação de Pearson ($r = 0{,}3023$), quanto do de Spearman ($r_s = 0{,}2711$) indicou uma fraca correlação entre as notas no teste matemático e a média escolar, embora, em ambos os casos, essa correlação fosse significativa ($p < 0{,}005$). Como pode ser observado na Figura 5, essa fraca relação pode ser explicada pela grande quantidade de sujeitos com boas médias anuais na escola e com baixo desempenho no teste. O presente estudo não permite inferir se esta discordância existe de fato ou se o baixo desempenho no teste matemático foi devido à falta de vontade do sujeito em responder ao mesmo. Entretanto, observou-se que praticamente todos os sujeitos cujas médias anuais foram baixas, também mostraram um baixo desempenho no teste matemático.

Como a correlação entre as notas no teste matemático e a média das notas na escola era significativa, fez-se uma análise de regressão para verificar como estas duas variáveis se relacionavam. Assim, considerando a variável nota no teste matemático como variável dependente e média anual na escola como variável independente, ou seja, modelando o desempenho no teste em função do desempenho escolar, os resultados foram: Nota = - 0,06 + 0,32* Média anual, com um coeficiente de determinação r^2 de 9,2%. Isso significa que para cada ponto a mais na média anual, obteve-se 0,32 pontos no teste matemático e que apenas 9,2% da variação da nota no teste pode ser explicada pela variação do desempenho escolar ao longo do período letivo.

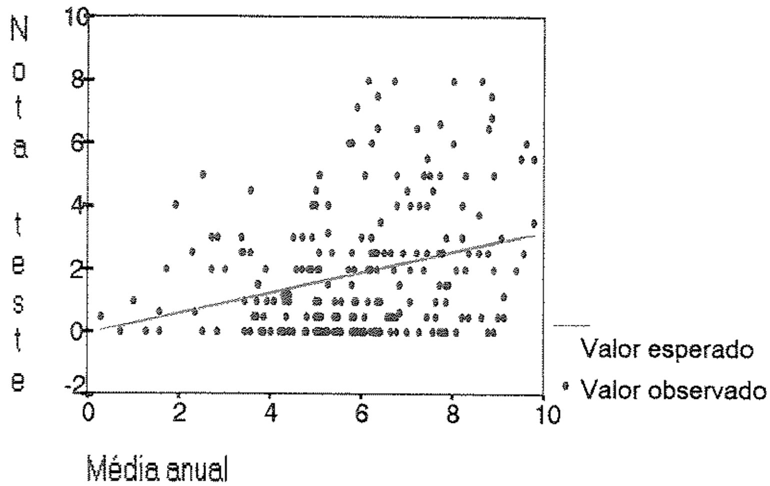


Figura 5:

Análise de regressão da nota no teste matemático em função da média escolar

Para verificar a relação entre as atitudes e o desempenho no teste matemático foi calculado o coeficiente de correlação de Pearson, cujo resultado foi de $r(256)= 0{,}2854$, $p= 0{,}000$, que mostrou uma relação fraca, porém significativa entre estas duas variáveis.

Para analisar a relação entre o aspecto afetivo e desempenho no teste matemático e vice-versa, foi utilizada a análise de regressão para modelar esta relação. O resultado mostrou a seguinte relação: Nota = - 0,75 + 0,04*Atitude, com um coeficiente de determinação $r^2 = 8{,}2\%$. Isto significa que para cada 10 pontos a mais na escala de atitudes, o sujeito aumentou o seu desempenho em 0,4 pontos na nota. Pode-se considerar que 8,2% da variação do desempenho no teste pode ser explicada pelas atitudes em relação à Matemática.

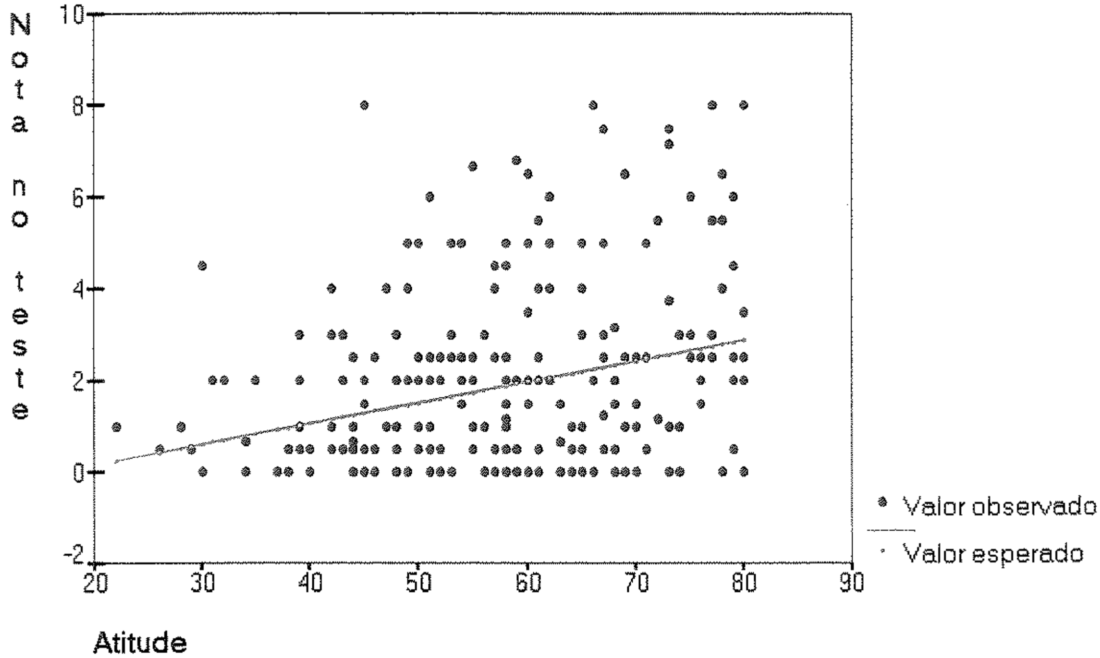


Figura 6:

Análise de regressão da nota no teste matemático em função da atitude em relação à Matemática

A Figura 6 permite observar que havia um grande grupo de sujeitos com atitudes positivas porém com baixo desempenho no teste matemático; por outro lado, foi muito raro encontrar sujeitos com atitudes negativas que tivessem tido um bom desempenho no teste. Neste sentido, deve-se observar a existência de dois sujeitos, que fugiram à tendência geral, sendo que um deles obteve pontuação em torno de 30 na escala de atitudes, embora sua nota estivesse na média. Um outro, cuja pontuação na escala de atitudes foi 45, apresentou um dos melhores desempenhos no teste.

Quando foi analisada a relação entre a média anual em Matemática e a pontuação do sujeito na escala de atitudes, foi encontrada uma relação mais forte do que a relação entre a nota no teste matemático e a atitude, $r(254)= 0{,}5086$, $p = 0{,}000$.

Como pode ser observado na Figura 7, a nuvem de pontos se concentra em torno da reta ajustada, embora também possam ser observados dois sujeitos mais distantes desta tendência.

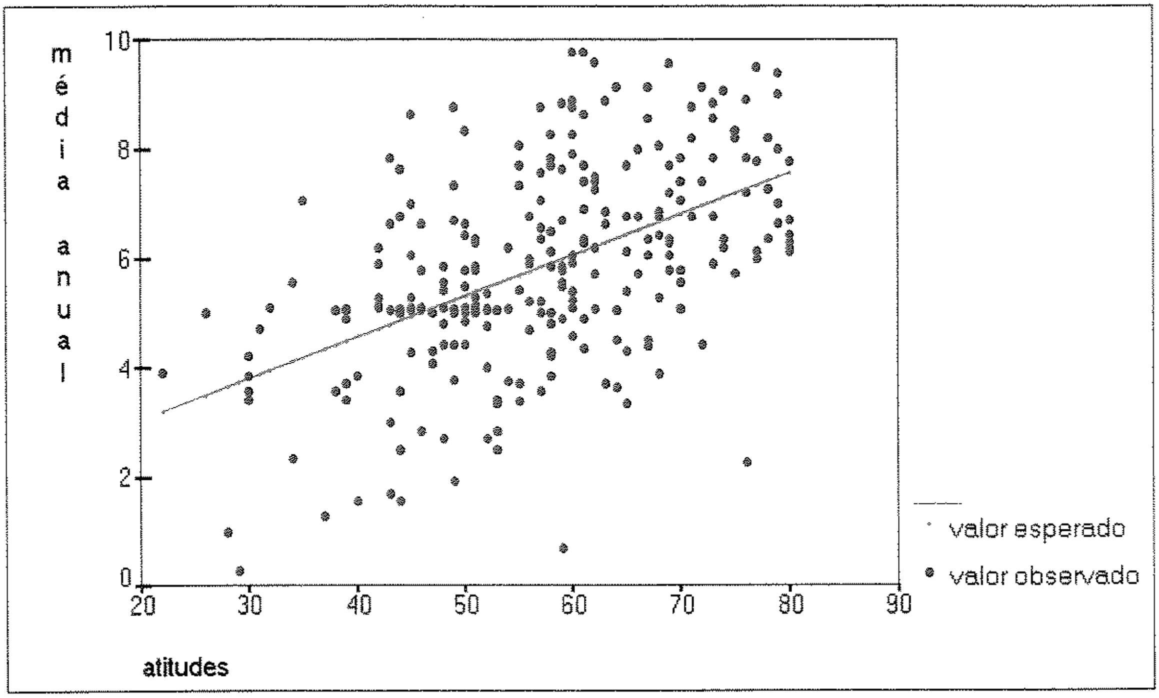


Figura 7:

Análise de regressão da média anual em função da atitude em relação à Matemática

Para analisar a relação entre as atitudes em relação à Matemática e o desempenho escolar e vice-versa, foi utilizada a análise de regressão para modelar esta relação. O resultado mostrou a seguinte relação: Média anual = 1,56 + 0,07*Atitude, com um coeficiente de determinação r^2 = 25,9%. Isto significa que para cada 10 pontos a mais na escala de atitudes, o sujeito aumenta o seu desempenho em 0,7 pontos na média anual na disciplina. Pode-se considerar que 25,9% da variação do desempenho escolar em Matemática pode ser explicado pelas atitudes em relação a esta disciplina. Isto mostrou que, nos sujeitos desse grupo, quanto mais positivas eram as atitudes em relação à Matemática, melhor era o desempenho nesta disciplina.

Comparando as figuras 6 e 7, pode se verificar que a média anual estava mais relacionada à atitude que à nota no teste matemático. Isto pode ser explicado pela natureza dos dois tipos de nota: a média anual é obtida pelo cômputo de várias provas ao longo do ano, avaliando a aprendizagem de conteúdos ensinados em sala de aula, enquanto o teste pode ser considerado com um grau elevado de dificuldade para estes alunos.

Análise dos Problemas do Teste Matemático

Para a correção dos problemas da sexta série foi utilizada a seguinte nomenclatura: certo, apenas inicia corretamente, erro de cálculo, erro na resposta, errado e não respondeu. Os problemas parcialmente corretos receberam uma nota correspondente à parcela correta, sendo que a solução correta recebeu 2,0 pontos; a iniciada corretamente, 0,5 ponto; a que continha erro de cálculo, 1,0 ponto e a que continha erro na resposta, 1,5 pontos. É apresentada, a seguir, a tabela contendo a distribuição dos sujeitos por problema.

Tabela 27:

Distribuição dos sujeitos da 6ª série de acordo com o desempenho

Solução	Problema 1		Problema 2		Problema 3		Problema 4		Problema 5	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Correta	04	4,0	35	35,0	15	15,0	29	29,0	15	15,0
Inicia correta/e			02	2,0	01	1,0	13	13,0	01	1,0
Erro de cálculo			01	1,0			27	27,0		
Erro na resposta			03	3,0			01	1,0		
Errada	94	94,0	53	53,0	54	54,0	25	25,0	33	33,0
Não respondeu	02	2,0	06	6,0	30	30,0	05	5,0	51	51,0
Total	100	100,0	100	100,0	100	100,0	100	100,0	100	100,0

Foi observado que a porcentagem de sujeitos que não responderam foi baixa, e quase inexistente nos problemas um, dois e quatro. Já a porcentagem de erros foi alta em todos os problemas, sendo maior no problema um. A seguir, os erros mais comuns que foram encontrados nos protocolos do teste de lápis e papel.

Problema 1:

Um vídeo cassete começou a gravar um programa de TV às 17h35min e desligou às 18h23min porque a fita havia terminado. Quantos minutos do programa foram gravados?

O problema um tratava de uma subtração na base sexagesimal, conteúdo que deveria ter sido aprendido nas séries iniciais do ensino fundamental. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997b), a escrita e operações em outras bases, devem ser iniciadas já na primeira série do ensino fundamental. A maioria dos sujeitos operou na base 10, ou seja, transformou a uma hora emprestada em 10 segundos, outros somaram as horas e minutos, obtendo 35 horas e 58 minutos, sequer levando em consideração que não existia uma fita que gravasse mais de 35 horas. Esse resultado pode estar indicando que os sujeitos não conseguiam trabalhar na base sexagesimal.

Problema 2:

O ônibus que faz a linha Campinas-Paulínia saiu da rodoviária de Paulínia com um certo número de passageiros. No trajeto subiram 16 passageiros, depois subiram 13, desceram 16 e logo depois, desceram mais 23 passageiros. Quando chegou ao ponto final, em Campinas, o ônibus:

a) não tinha passageiros;

b) tinha 10 passageiros a mais que no início;

c) tinha 10 passageiros a menos que no início;

d) tinha 12 passageiros a menos que no início.

O problema dois tratava de somas e subtrações na base decimal, não exigia nenhum cálculo ou raciocínio sofisticado, e alguns sujeitos conseguiram encontrar o valor "-10", mas não conseguiram interpretar o significado deste valor, o que pode estar indicando que estes sujeitos sabiam fazer as operações, mas não estavam preparados para solucionar problemas de maneira a obter uma aprendizagem significativa.

Problema 3:

Nestas férias fui à praia e tirei uma certa quantidade de fotos. Após revelá-las, observei que colocando 5 fotos em cada página do álbum, completo um certo número de páginas e fica sobrando 1 foto. Colocando 7 fotos em cada página, completo um número menor de páginas do álbum, é claro, mas também fica sobrando 1 foto. Nessas condições, a quantidade de fotos que eu tirei na praia, pode ser:

a) um número entre 70 e 75 fotos;

b) 49 ou 50 fotos;

c) um número entre 80 e 85 fotos;

d) 60 ou 61 fotos.

O problema três solicitava um conhecimento de múltiplos comuns a dois números, usualmente aprendido na quinta série do ensino fundamental. A maioria dos sujeitos não fez nenhuma operação ou representação do problema três. Tentaram por ensaio e erro encontrar uma alternativa adequada, sendo que alguns informaram que não conseguiam concluir, usando os seguintes argumentos: "não dá para fazer, porque não foi dito a quantidade de páginas" ou "é pegadinha, faltam dados". Os sujeitos que acertaram fizeram alguns cálculos que evidenciavam a procura de um múltiplo do valor sete, ou do valor cinco, ou de ambos, situado no intervalo das alternativas dadas.

Problema 4:

Comprei 18 garrafas de guaraná e 14 de coca-cola, cada uma por R$ 1,20. Paguei com uma nota de 50 reais. Quanto receberei de troco?

O problema quatro assemelhava-se aos de quarta série, podendo ser considerado de pouca dificuldade. Entretanto, vários sujeitos somaram a quantidade de refrigerantes e extraíram esta quantidade do dinheiro, para encontrar o troco. Outros, perceberam as relações entre os dados do problema, mas não conseguiram calcular corretamente o troco.

Problema 5:

Quantos copos com capacidade de ¼ de litro podem ser enchidos com o conteúdo de uma jarra de 2 ½ litros?

O problema tratava de divisão de frações, conteúdo normalmente aprendido na quinta série do ensino fundamental. Os sujeitos aparentemente encontraram dificuldade para trabalhar com a unidade de volume e não conseguiram sequer transformar as frações em decimais, para em seguida efetuar a divisão. Vários sujeitos responderam 2.

Para a correção dos problemas da sétima série foi utilizada a mesma nomenclatura usada na correção dos problemas da sexta série: certo, apenas inicia corretamente, erro de cálculo, erro na resposta, errado e não respondeu. Exceto para o problema 3, onde encontrar uma incógnita foi considerado inicia corretamente e recebeu 0,66 pontos e, encontrar duas incógnitas, não conseguindo encontrar a terceira incógnita, foi considerado erro de cálculo e atribuído 1,32 pontos. A solução dos demais problemas recebeu a seguinte nota correspondente à parcela correta: solução correta recebeu 2,0 pontos; iniciada corretamente, 0,5 ponto; que continha erro de cálculo, 1,0 ponto e a que continha erro na resposta, 1,5 pontos. É apresentada, a seguir, a tabela contendo a distribuição dos sujeitos por problema.

Tabela 28:

Distribuição dos sujeitos da 7ª série de acordo com o desempenho

Solução	Problema 1		Problema 2		Problema 3		Problema 4		Problema 5	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Correta	13	16,9	06	7,8	00	0,0	08	10,4	03	3,9
Inicia correta/e	09	11,7	09	11,7	09	11,7	06	7,8	36	46,8
Erro de cálculo			08	10,4	01	1,3	08	10,4	03	3,9
Erro na resposta							02	2,6		
Errada	37	48,1	39	50,6	45	58,4	39	50,6	21	27,3
Não respondeu	18	23,3	15	19,5	22	28,6	14	18,2	14	18,2
Total	77	100,0	77	100,0	77	100,0	77	100,0	77	100,0

Problema 1:

No retângulo da figura, a soma dos números de cada linha, coluna ou das duas diagonais é sempre a mesma. Qual o número que deve ficar no lugar de A ?

12	17	10
		15
	A	

O problema um apresentava um enunciado simples e para sua solução bastava adicionar pequenas quantidades. Os sujeitos da sétima série não compreenderam o enunciado e muitos perguntaram se os números em cada pequeno retângulo também deveriam ser os mesmos, sendo que outros alunos foram colocando aleatoriamente os números.

Problema 2:

Quatro amigos gastaram 13,45 reais em sanduíches e 7, 35 reais em sucos. A essas despesas foram acrescentados 10% de gorjeta para o garçom. Dividiram o total em partes iguais, quanto coube a cada amigo?

Os sujeitos da sétima série afirmaram ter dificuldade em relação à porcentagem, conteúdo que normalmente é aprendido na sexta série, e perguntaram se essa porcentagem era paga depois de saldar a conta ou já estava incluída nas despesas com os sanduíches e os sucos. Muitos sujeitos consideraram 10% igual a R$ 10,00, evidenciando desconhecer o conceito de porcentagem.

Problema 3:

Observe a tabela e encontre os valores de a, b e c.

x	-1	-3	c
y	-5	b	-2
x-y	a	2	3

No problema três foi explicado aos sujeitos da sétima série que eles deveriam observar a primeira coluna e repetir o procedimento para as outras colunas. Este foi o problema no qual esses sujeitos obtiveram o pior desempenho, pois ninguém conseguiu acertá-lo. Alguns somaram os valores das linhas e a grande maioria se atrapalhou com as regras de sinais da adição e da multiplicação.

Problema 4:

Com 3kg de farinha de trigo, são feitos 140 biscoitos. Com 5kg de farinha aproximadamente quantos biscoitos podem ser feitos?

O problema quatro, que trata de conceitos e procedimentos ensinados na quarta série, teve uma baixa porcentagem de acerto. Os sujeitos usaram o procedimento de multiplicar os objetos (no caso, os biscoitos) pelo valor cinco, aparentemente não percebendo que este resultado era maior que o dobro da quantidade possível de ser feita com 3 kg de farinha, o que por si só já inviabilizaria tal solução. Ficou evidenciado que a verificação da coerência entre a resposta encontrada e a pergunta do problema era uma atividade que os sujeitos desconheciam.

Problema 5:

Numa eleição com 2 candidatos, votaram 3850 eleitores. O candidato A obteve 1032 votos e o candidato B obteve 2048 votos. Qual foi a porcentagem de votos nulos ou em branco?

Aparentemente o conceito de porcentagem foi o grande dificultador da resolução do problema cinco, sendo que alguns sujeitos conseguiram encontrar a quantidade de votos em branco ou nulos, mas não a porcentagem que essa quantidade representava. Alguns sujeitos comentaram que não haviam aprendido porcentagem e que por isso era difícil solucionar o problema.

Como descrito anteriormente, para a correção dos problemas da oitava série foi utilizada a nomenclatura: certo, apenas inicia corretamente, erro de cálculo, erro na resposta, errado e não respondeu. Os problemas parcialmente corretos receberam uma nota correspondente à parcela correta enquanto a solução correta recebeu 2,5 pontos; a iniciada corretamente, 0,5 ponto; a que continha erro de cálculo, 1,25 pontos e a que continha erro na resposta, 2,0 pontos. É apresentada, a seguir, a tabela contendo a distribuição dos sujeitos por problema.

Tabela 29:

Distribuição dos sujeitos da 8ª série de acordo com o desempenho

Solução	Problema 1		Problema 2		Problema 3		Problema 4	
	f	%	f	%	f	%	f	%
Correta	25	31,6	10	12,7	03	3,8	04	5,1
Inicia correta/e	07	9,0			02	2,5	03	3,7
Erro de cálculo	02	2,5					02	2,5
Erro na resposta								
Errada	40	50,6	49	62,0	38	48,1	54	68,4
Não respondeu	05	6,3	20	25,3	36	45,6	16	20,3
Total	79	100,0	79	100,0	79	100,0	79	100,0

Problema 1:

Um camelô comprou 30 ursinhos de pelúcia por R$ 165,00. Se o camelô deseja lucrar R$ 75,00 com a venda desses ursinhos, por quanto ele deve vender cada um?

Apesar do problema um tratar de conceitos e procedimentos ensinados na quarta série do ensino fundamental, vários sujeitos da oitava série subtraíram o lucro ao invés de somá-lo, outros somaram o lucro total ao preço de cada ursinho e outros, ainda, multiplicaram o preço total pelo número de ursinhos.

Problema 2:

Digitando x páginas por dia, D. Ana completa um serviço em 10 dias. Se digitasse x + 6 páginas por dia, ela faria o serviço em 8 dias. Qual é o valor de x?

O problema dois tratava de proporcionalidade entre duas grandezas (no caso, quantidade de páginas e dias), conteúdo normalmente ensinado na sétima série. Boa parte dos sujeitos da oitava série erraram o tipo de proporcionalidade contido nesse problema.

Problema 3:

Três latas iguais de massa de tomate mais uma lata de sardinha custam, juntas, R$ 3,00. Duas latas de massa de tomate mais duas latas de sardinha (todas iguais às anteriores) custam, juntas, R$ 3,40. Qual é o preço de uma lata de massa de tomate?

Nenhum sujeito solucionou o problema três usando sistema de equações com duas incógnitas. Após o término da aplicação do teste, os sujeitos manifestaram interesse em saber como esse problema era solucionado e, após o experimentador montar as equações, eles indagaram por que não foram dadas as equações para serem resolvidas. Segundo eles, se fosse apresentado dessa maneira, eles saberiam resolver. Isso parece confirmar que esses sujeitos haviam sido treinados para solucionarem exercícios de aplicação do conceito, tendo dificuldade para reconhecer essa mesma estrutura matemática quando esta se encontra imersa em um enredo.

Problema 4:

Um aquário tem a forma de um bloco retangular, com arestas de 60 cm, 40 cm e 30 cm. Quantos litros de água cabem no aquário cheio?

Muitos sujeitos não sabiam o que significava "aresta", constante no problema quatro. Mesmo tendo sido explicado o conceito, apenas quatro sujeitos da amostra acertaram este problema, sendo que a maioria somou as arestas do paralelepípedo. Isto parece evidenciar que os sujeitos não haviam aprendido os conteúdos de geometria espacial, reforçando de certa forma as conclusões de estudos realizados no grupo de Psicologia da Educação Matemática da Faculdade de Educação da UNICAMP (Pirola, 1995; Viana, 2000).

Foi realizada uma outra análise a respeito do tipo de procedimento utilizado pelos sujeitos para solucionarem os problemas, e esses procedimentos foram classificados em: aritmético, algébrico, pictórico-visual (quando o sujeito fazia alguma representação para resolver o problema), tentativa-erro e, não explícito (quando não se conseguia identificar o tipo de procedimento, por exemplo, quando só havia a resposta correta e/ou observações que evidenciavam o uso do cálculo mental). Os protocolos dos sujeitos que erraram o problema desde o início (não percebendo os fatos e as relações dos dados do problema), e também os daqueles que deixaram o problema sem solução, não foram analisados. São apresentadas, a seguir, as tabelas mostrando para cada problema o tipo de procedimento utilizado e a porcentagem de sujeitos que adotou cada procedimento.

Tabela 30:

Distribuição dos sujeitos da sexta série de acordo com o procedimento utilizado

Procedimento	Problema 1		Problema 2		Problema 3		Problema 4		Problema 5	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Aritmético	04	100,0	33	80,5	08	50,0	70	100,0	03	18,8
Algébrico			02	4,9	01	6,3				
Viso-pictórico			01	2,4					11	68,8
Tentativa/erro			01	2,4	01	6,3				
Não explícito			04	9,8	06	37,4			02	12,4
Total	04	100,0	41	100,0	16	100,0	70	100,0	16	100,0

O procedimento aritmético foi o mais utilizado pelos sujeitos da sexta série para a solução dos problemas, mas também chamou a atenção a quantidade de procedimentos não explícitos, segundo procedimento mais utilizado. O procedimento viso-pictórico foi o mais utilizado apenas no problema cinco, onde foram feitas diferentes representações das quantidades de água.

Com a intenção de verificar se o tipo de resposta e o procedimento escolhido para solucionar o problema dependiam do gênero do sujeito, foi feita uma análise estatística utilizando o teste chi-quadrado em todas as séries e referentes a cada problema. A nomenclatura utilizada para o tipo de resposta: correta, apenas inicia corretamente, erro de cálculo, erro na resposta, errada e não respondeu foi reagrupada em: correta, incorreta e não respondeu.

Tabela 31:

Acerto, erro e não responder em relação ao gênero - 6ª Série

Problema	Estatística	*p*
Problema 1	χ^2 (2, N = 100) = 3,050	0,217
Problema 2	χ^2 (2, N = 100) = 5,864	0,053
Problema 3	χ^2 (2, N = 100) = 2, 236	0,327
Problema 4	χ^2 (2, N = 100) = 1,004	0,605
Problema 5	χ^2 (2, N = 100) = 2,122	0,346

O teste chi-quadrado evidenciou que não havia associação entre a variável gênero e acertar ou errar ou não responder o problema, isto é, responder correta, incorretamente ou não fazer o problema não estava associado ao fato de o sujeito ser do gênero feminino ou masculino.

Tabela 32:

Teste chi-quadrado para tipo de procedimento e gênero - 6ª Série

Problema	Estatística	*p*
Problema 1	NP	
Problema 2	χ^2 (4, N = 41) = 3,837	0,428
Problema 3	χ^2 (3, N = 16) = 1,555	0,669
Problema 4	NP	
Problema 5	χ^2 (2, N = 16) = 1,825	0,401

NP = não foi possível aplicar o teste chi - quadrado

Da mesma forma, o tipo de procedimento escolhido: aritmético, algébrico, viso-pictórico, tentativa/erro e não explícito, não estava associado à variável gênero. Não foi possível utilizar o teste chi-quadrado nos procedimentos do problema um, porque só havia um tipo de procedimento, aritmético, e representantes de um dos gêneros, masculino. O mesmo quanto ao problema quatro, porque este só fora solucionado através do procedimento aritmético.

Tabela 33:

Distribuição dos sujeitos da sétima série de acordo com o procedimento utilizado

Procedimento	Problema 1		Problema 2		Problema 3		Problema 4		Problema 5	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Aritmético	15	68,2	23	100,0	02	20,0	22	91,6	42	100,0
Algébrico										
Viso-pictórico										
Tentativa/erro	01	4,5								
Não explícito	06	27,3			08	80,0	02	8,4		
Total	22	100,0	23	100,0	10	100,0	24	100,0	42	100,0

Para a realização do teste chi-quadrado no problema um, o procedimento de tentativa e erro foi agrupado com o procedimento aritmético. Os procedimentos aritméticos e os não explícitos foram os mais utilizados pelos sujeitos da sétima série, sendo que nenhum desses sujeitos acertou completamente o problema três.

Tabela 34:

Acerto, erro e não responder em relação ao gênero - 7ª Série

Problema	Estatística	*p*
Problema 1	χ^2 (2, N = 77) = 1,663	0,435
Problema 2	χ^2 (2, N = 77) = 0,160	0,923
Problema 3	χ^2 (1, N = 77) = 1,901	0,168
Problema 4	χ^2 (2, N = 77) = 1,502	0,472
Problema 5	χ^2 (2, N = 77) = 4,408	0,110

O teste chi-quadrado evidenciou que não havia associação entre a variável gênero e o tipo de resposta em cada problema.

Tabela 35:

Teste chi-quadrado para tipo de procedimento e gênero - 7ª Série

Problema	Estatística	*p*
Problema 1	χ^2 (2, N = 22) = 0,902	0,637
Problema 2	NP	
Problema 3	χ^2 (1, N = 10) = 2,500	0,114
Problema 4	χ^2 (2, N = 24) = 0,958	0,327
Problema 5	NP	

NP = não foi possível aplicar o teste chi - quadrado

Como no caso do tipo de resposta, o tipo de procedimento escolhido: aritmético, algébrico, viso-pictórico, tentativa/erro e não explícito não estava associado à variável gênero. Não foi possível utilizar o teste chi-quadrado nos procedimentos dos problemas dois e cinco, porque todos os sujeitos considerados usaram o procedimento aritmético.

Tabela 36:

Distribuição dos sujeitos da oitava série de acordo com o procedimento utilizado

Procedimento	Problema 1		Problema 2		Problema 3		Problema 4	
	f	%	f	%	f	%	f	%
Aritmético	33	97,1					06	66,7
Algébrico			09	90,0	01	20,0		
Viso-pictórico								
Tentativa/erro			01	10,0	04	80,0	02	22,2
Não explícito	01	2,9					01	11,1
Total	34	100,0	10	100,0	05	100,0	09	100,0

Como nas sexta e sétima séries, o procedimento mais utilizado na oitava série também foi o aritmético e isso pode ser resultado da maneira como os alunos são ensinados a solucionar problemas, utilizando apenas um procedimento.

Tabela 37:

Acerto, erro e não responder em relação ao gênero - 8ª Série

Problema	Estatística	p
Problema 1	χ^2 (2, N = 79) = 7,105	0,028
Problema 2	χ^2 (2, N = 79) = 1,108	0,575
Problema 3	χ^2 (2, N = 79) = 3,792	0,150
Problema 4	χ^2 (2, N = 79) = 1,312	0,519

O teste chi-quadrado evidenciou que havia associação entre a variável gênero e o fato de acertar, errar ou não responder o problema um. Porém, como havia 33,3% de células com freqüência menor que cinco, a confiabilidade do teste ficou comprometida. Dessa forma, para este problema, os sujeitos que não responderam ou responderam incorretamente foram reagrupados numa única categoria "errado", tendo sido aplicado o teste exato de Fisher, obtendo-se p = 0, 0543. O resultado apontou que o desempenho nos problemas (acertar ou errar) não estava associado ao gênero do sujeito.

Tabela 38:

Teste chi-quadrado para tipo de procedimento e gênero - 8ª Série

Problema	Estatística	p
Problema 1	χ^2 (1, N = 34) = 0,638	0,424
Problema 2	χ^2 (1, N = 10) = 1,666	0,196
Problema 3	NP	
Problema 4	χ^2 (2, N = 9) = 3,600	0,165

NP = não foi possível aplicar o teste chi - quadrado

Os resultados do teste chi-quadrado evidenciaram que o tipo de procedimento escolhido: aritmético, algébrico, viso-pictórico, tentativa/erro e não explícito não estava associado à variável gênero. Não foi possível utilizar o teste chi-quadrado nos procedimentos do problema três, porque este problema foi solucionado apenas por sujeitos do gênero masculino e todas as células possuíam frequência esperada menor que 5. Um estudo mais elaborado deveria ser feito para tentar identificar a causa do insucesso de um dos gêneros em solucionar alguns tipos de problema e responder o porque de, num grupo onde há 41 sujeitos do gênero feminino e 38 sujeitos do masculino, apenas sujeitos do gênero masculino conseguirem solucionar o problema três.

Análise das Soluções dos Problemas utilizando o Método de "Pensar em Voz Alta"

Foi selecionado um aluno de cada série, para solucionar os problemas das séries algébricas de Krutetskii (1976), utilizando-se como critério o melhor desempenho no teste matemático. Nesta seção descrevemos algumas características destes sujeitos e os procedimentos de solução dos problemas, procurando identificar os componentes das habilidades que foram evidenciados durante o processo.

Algumas características dos sujeitos

O sujeito 1 (S1) tinha 12 anos na época da aplicação dos testes, frequentava a sexta série, tinha uma irmã mais nova e tanto o pai quanto a mãe trabalhavam fora. Informou que gostava muito de resolver problemas matemáticos e ficava mal humorado quando seus esforços não resultavam em sucesso. Obteve 77 pontos na escala de atitudes, nota 8,0 no teste matemático e terminou o ano letivo com 6,14 de média escolar. No início da primeira sessão, foi oferecida ajuda para as tarefas de Matemática. Durante o período em que as séries foram aplicadas (agosto/1998 a novembro/1998) esse sujeito nunca pediu ajuda ao experimentador para suas tarefas escolares, apesar dessa ajuda ter sido oferecida inúmeras vezes, ao que S1 sempre respondia "raramente tenho dúvidas em Matemática e quando tenho, meu pai me ajuda; se fosse Geografia ou História ...".

O sujeito 2 (S2) tinha 13 anos, frequentava a sétima série, tinha uma irmã recém-nascida e sua mãe não trabalhava fora. Obteve 73 pontos na escala de atitudes, 7,16 no teste matemático e 5,9 de média escolar. Gostava de participar de atividades extraclasse como as oferecida durante a Semana da Poesia, a Semana da Primavera, nas festas e nas feiras. No período, teve baixa frequência às aulas e aos encontros. Aparentemente, tinha dificuldades de se ajustar aos padrões da escola. Em um dos encontros trouxe um trabalho solicitado pelo professor de Matemática. Nesse trabalho, parte dos exercícios vinha resolvida e a parte que faltava tinha espaços para serem preenchidos. Ao solicitar que S2 fizesse esses exercícios (que eram sobre equações) em uma folha, foi verificado que o sujeito não usava passos desnecessários e resolvia as equações usando processos resumidos de pensamento. Por isso, não sabia o que colocar nos espaços em branco, pois esses eram reservados à solução usando todos os passos.

O sujeito 3 (S3) tinha 15 anos, frequentava a oitava série, tinha um irmão um pouco mais novo, morava em uma casa popular e os pais trabalhavam fora. S3 havia sido preso por roubo de carro no dia anterior ao início da aplicação dos testes, mas não faltou ao encontro. Obteve 73 pontos na escala de atitudes,7,5 no teste matemático e 8,85 de média escolar. Gostava de solucionar os problemas e, normalmente, pedia para ver outras soluções. Apresentou algumas soluções bastante interessantes. Também fazia cálculos mentais com rapidez, fato que ele atribuía ao período em que trabalhou em um mercadinho fazendo trocos. Quando da aplicação dos testes que envolvia equações do 2° grau, S3 também estava aprendendo na escola esse conteúdo e solicitou ao examinador que formulasse algumas equações como exercícios para casa.

Análise dos protocolos

A análise dos protocolos foi feita levando em consideração as etapas da solução de problemas através das quais se evidenciam os componentes da habilidade. Para essa análise foi utilizado o modelo proposto por Krutetskii (1976), já traduzido, adaptado e utilizado pelo grupo de pesquisa em Psicologia da Educação Matemática da Faculdade de Educação da UNICAMP (Alves, 1999; Araújo, 1999). Foi feita a transcrição literal das fitas, sem correção, e a experimentadora buscou moldar a sua linguagem ao mesmo padrão da linguagem dos alunos.

Começando pelo primeiro estágio da solução de problemas, o da Obtenção da Informação Matemática, foram aplicados os cinco problemas da Série I (anexo B), cujos problemas não enunciavam a pergunta. Logo o sujeito deveria formulá-la a partir da percepção das relações entre os fatos concretos do problema.

Após a apresentação do problema, foi marcado o tempo gasto até a formulação da questão e os resultados podem ser visualizados na Tabela 39. De acordo com Krutetskii (1976) e Garcia (1995) os sujeitos habilidosos em Matemática são capazes de, rapidamente, compreender uma proposição e formular uma questão.

Tabela 39:

Tempo gasto para a obtenção da informação (problemas com questão não formulada - Série I)

	S1	S2	S3
Problema 1	1': 02''	1': 00''	0': 10''
Problema 2	1': 40''	0': 05''	0': 10''
Problema 3	1': 20''	0': 35''	0': 04''
Problema 4	não conseguiu	não conseguiu	não conseguiu
Problema 5	1': 05''	0': 45''	0': 20''
Tempo total	5': 07''	2': 25''	0': 44''

Considerando o tempo total gasto para obtenção da informação matemática, pode-se perceber que o sujeito 3 foi quem despendeu o menor tempo para formular a questão do problema, tendo elaborado a pergunta para os problemas num tempo quase sete vezes menor que o sujeito 1 e três vezes menor que o sujeito 2.

Como a formulação da pergunta parece estar vinculada à habilidade verbal (Brito, Fini e Garcia, 1994) é possível que a demora desses sujeitos para elaborar a questão, seja uma dificuldade de outra natureza, que não a matemática.

S1 leu por duas vezes cada problema, aparentemente com atenção, e em seguida elaborou a pergunta que faltava. Sua interpretação, em quatro dos cinco problemas, foi considerada adequada e ele não apresentou nenhuma dificuldade. No problema 4, mesmo após o experimentador explicar o que significava o termo "revolução", ele não conseguiu formular uma pergunta adequada. Após muitas explicações, a pergunta formulada foi *quantas vezes ela rodou?*, demonstrando que ele não havia compreendido os dados e as relações entre eles.

S2 apresentou algumas dificuldades em perceber os dados dos problemas. No problema 3, por exemplo, confundiu medida de tempo com medida de distância:

S2: Um carro anda 760 km numa velocidade média de x km/h.

S2: Quantos km ele gastou?

E: Quantos km ele gastou?

S2: Bom, quantos ... Peraí. Que velocidade é?

No quarto problema, esse sujeito teve o mesmo problema que S1, pois mesmo tendo sido explicado o que era revolução, S2 não conseguiu formular uma questão adequada para o problema:

S2: Quantos metros ele [a roda] correria em tantas revoluções?

Em quase todos os problemas S2 necessitou de uma pequena ajuda do experimentador, não tendo conseguido formular uma questão para o problema 4.

S3 apresentou dificuldade em formular a questão dos problemas e, normalmente, fazia suposições sobre o que o problema deveria querer saber. Nessas ocasiões ocorria a intervenção do experimentador, solicitando a ele que formulasse as perguntas. Esse sujeito formulou uma pergunta inadequada no problema 4, onde, da mesma maneira que os outros dois sujeitos, também demonstrou não ter compreendido o que era "revolução". A seguir, alguns trechos que parecem evidenciar que S3 havia compreendido a relação entre os dados dos problemas, formulando a questão correspondente em menos tempo que os outros dois sujeitos.

[problema 1]

*S3: Duas pessoas juntas tem R$ 28,00 e uma delas tem **a** reais...*

E: O que você acha que ele [o problema] *deveria estar perguntando?*

S3: Metade! É ... quantas pessoas ... é ... quanto cada uma delas tem?

[problema 3]

*S3: Um carro viajou 760 km numa velocidade média de **x** km/h. Ham , quer saber em quanto tempo ele fez 760 km!*

E: Hum, hum. A pergunta então, ...

S3: Em quanto tempo ele completou ... 760 km?

[problema 4]

*S3: Uma roda faz **12a** revoluções numa distância de 1800m, 12a? 12a é um número qualquer?*

E: Isso!

S3: Quer saber quantas revoluções ele faz em 1800m.

E: Já falou! Faz 12a.

S3: Ah, é! 12a. Em quanto tempo?

[problema 5]

S3: Um homem vive y meses ... quer saber ... tá falando que o homem vive ... quer saber o tempo.

E: Ham?

S3: Ele quer saber quanto tempo ele vive.

Dessa forma, no primeiro estágio da solução de problemas, no qual os sujeitos deveriam interpretar o problema, percebendo as relações e os fatos concretos nele contidos, os sujeitos ficaram assim classificados:

Tabela 40:

Classificação dos sujeitos no estágio da obtenção da informação matemática

componente da habilidade	Nível	Descrição	Sujeito
	1	não formula a questão, mesmo com ajuda considerável do experimentador.	
	2	formula a questão e reconhece as relações dadas no problema, mas somente com ajuda considerável do experimentador.	
percepção	3	formula a questão independentemente, mas não imediatamente, cometendo erros e gradualmente captando as relações do problema dado.	S1, S2, S3
	4	formula a questão imediatamente, captando as relações dadas no problema subitamente.	

Como pode ser observado pela Tabela 40, seguindo os critérios estabelecidos por Krutetskii (1976), S1 e S3 encontravam-se no nível 3 para a percepção da estrutura de problemas com questões não formuladas: ... *formula a questão independentemente, mas não imediatamente, cometendo erros e captando gradualmente as relações no problema dado* (p. 232). S2 também poderia ser classificado no nível 3, apesar de quase sempre ter necessitado de uma pequena ajuda do experimentador.

Segundo Krutetskii (1976), conseguir elaborar a pergunta que faltava no problema seria uma característica dos alunos capazes, e indicaria que eles percebiam o conjunto completo dos dados e a estrutura global do problema.

Com a finalidade de evidenciar os componentes da habilidade presentes durante o segundo estágio da solução de problemas, ou seja, o processamento da informação matemática, foram aplicados os problemas relativos às séries que buscam evidenciar a generalização, a flexibilidade de pensamento, a reversibilidade dos processos mentais e a compreensão, o raciocínio e a lógica.

Para estudar a capacidade de generalização, foram aplicadas as séries V (anexo C), VIII (anexo D) e X (anexo E).

A série V era dividida em duas partes, sendo que a primeira (teste a), considerada mais difícil, é composta por dezesseis problemas de um único tipo, relativos ao quadrado da soma[8], ao passo que a segunda parte (teste b), mais fácil que a primeira, trata de variantes nos coeficientes e/ou nos expoentes dos termos.

Foram dados os problemas a fim de verificar se os sujeitos generalizariam os procedimentos, se perceberiam as semelhanças e diferenças entre eles. O sujeito não precisava resolver todos, o objetivo era resolver o Problema 8.

Com a ajuda do examinador, o sujeito ficou familiarizado com o procedimento de multiplicação de literais, depois começava a resolver o problema 8 (P8). Quando não conseguia, era-lhe apresentado o problema 1 (P1). Se conseguisse resolvê-lo, passava-se ao problema 1a (P1a), após o que lhe era apresentado o problema 8 de novo, e assim sucessivamente, até que o sujeito conseguisse solucioná-lo. Anotava-se então a quantidade de tentativas que o sujeito necessitou para solucionar o problema 8. Dessa forma, a ordem de apresentação dos problemas foi: P8, P1, P1a, P8, P2a, P2, P8, P3, P3a, P8, P4a, P4, P8, P5, P5a, P8, P6a, P6, P8, P7, P7a, P8, P8a, P8.

S1 e S2 não haviam aprendido, ainda, a fórmula do quadrado da soma, portanto o experimentador familiarizou-os com a tarefa, inicialmente explicando-lhes a propriedade distributiva da multiplicação e em seguida formulando questões sobre os resultados obtidos, buscando levá-los a lembrar-se dos princípios necessários para a recuperação, na estrutura cognitiva, dos componentes da fórmula.

Após disponibilizar essa informação para o sujeito, foi apresentado o problema 8. S1 mostrou-se inseguro quanto a sua capacidade para resolvê-lo, então o experimentador apresentou-lhe o problema seguinte e assim sucessivamente. S1 solucionou o problema 8 após quatro tentativas com outros problemas (P1→P1A→P2A→P2→P8), gastando 12 minutos para chegar à solução. Esses quatro problemas foram solucionados com dificuldade, S1 parecia não lembrar os princípios aditivo e multiplicativo de literais. O experimentador propunha questões, tentando levá-lo a perceber o procedimento para a resposta correta, porém não ficou evidenciado o pensamento resumido de solução e nem a generalização da fórmula da soma dos quadrados, sendo que em todos os problemas, o sujeito 1 utilizou a propriedade distributiva. Isto pode ser explicado pelo fato de a propriedade haver-lhe sido apresentada no início da solução da série

[8] $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

sendo que, a partir daí, ele tentou solucionar os problemas usando sempre a mesma propriedade, que já se havia mostrado adequada àqueles tipos de problemas propostos anteriormente.

S2 afirmou que conseguiria resolver o problema 8, mas não conseguiu. O problema 1 foi então apresentado, S2 abriu a expressão em dois parênteses e aplicou a propriedade distributiva. Falou todos os passos, mas escreveu na forma reduzida. Necessitou de duas tentativas com outros problemas (P1→ P1A→P8) ou, ainda, seis minutos, para solucionar o problema 8. Era observável uma inclinação para a clareza e organização durante a solução dos problemas 1A e 8, tendo em vista que o sujeito colocou bolinhas e linhas-guia para marcar os números que já haviam sido distribuídos, elaborando uma representação que permitiu visualizar os passos seguidos.

S3 também afirmou que conseguiria resolver o problema 8, mas fez apenas três distribuições. Ao ser apresentado ao problema 1, resolveu-o corretamente e solicitou o problema 8 novamente, conseguindo realizar a tarefa em quatro minutos, após uma única tentativa (P1→P8).

Os problemas da parte B foram utilizados por Krutetskii (1976) com alunos menos capazes em Matemática, que não conseguiram desempenho fluente com os problemas da parte A. Os problemas iniciais da parte B são mais simples, tornando-se aos poucos mais complexos, devido à introdução de números fracionários no coeficiente dos monômios. Foram apresentados em ordem crescente de dificuldade do 1b ao 8b.

S1 solucionou todos os problemas da parte B com a ajuda do experimentador, sem utilizar estruturas reduzidas e nem fazer generalizações. Gastou, para isso 24 minutos e apresentou dúvidas quando foram introduzidos os coeficientes fracionários:

[o enunciado era $(\frac{1}{4} a + \frac{1}{3} b)^2$]

S1: (um quarto a + um terço b)^2 daria (um quarto a + um terço b) vezes (um quarto a + um terço b). Na multiplicação aqui é só fazer 1 vez 1 e 4 vez 4?

E: Isso.

Nesse momento, o sujeito começa a aplicar o procedimento corretamente, mas ao dar continuidade à solução, surgem novas dúvidas:

S1: $\frac{1}{16}$ a dois [$\frac{1}{16}$ a^2] *mais um nove avos ... não, um nono b dois ... era para mim fazer invertido?*

E: Como assim?

S1: Que nem aqui: ¼ a vezes $^1/_3$ b, ficaria ¼ a, [mais] *$^1/_3$ b só?*

S1 não percebeu a semelhança entre o procedimento de multiplicar ¼ por ¼ e o de multiplicar ¼ por $^1/_3$. Na verdade, cada vez que um elemento novo era introduzido, S1 apresentava dificuldade para solucionar o problema do quadrado da soma e somente com a ajuda das questões formuladas pelo experimentador conseguia chegar à solução do problema.

S2 levou 11 minutos para solucionar todos os problemas da parte B. Foi observado que o sujeito passava um tempo calado observando o enunciado, de onde se pode inferir que estava buscando os procedimentos de solução pois, em seguida, apresentava apenas a forma resumida, como pode ser observado na solução correta que se segue:

S2: [Não leu o enunciado em voz alta, já foi aplicando a propriedade distributiva da multiplicação] *(um quarto a + um terço b) vezes (um quarto a + um terço b). ¼ vezes ¼ . Você não tem um negocinho?* [pedindo um pedaço de papel para rascunho]

E: Pode escrever aqui do lado.

S2: 1 vezes 1, 1; 16 [fazendo 4 vezes 4]. *$^1/_{16}\,a^2$* [escreve]

S2: ¼ vezes $^1/_3$ vai dar $^1/_{12}$ b ... ab, [pára um pouco], *aqui* [no $^1/_3$ b vezes ¼ a] *vai dar a mesma coisa + 12ab, $^1/_{12}$ ab. Vai dar dois doze* [Escreve $^2/_{12}$ab] *não é? E $^1/_3$ vezes $^1/_3$ vai dar $^1/_9\,b^2$.*

S3 gastou sete minutos para solucionar todos os problemas da Parte B, resolveu o problema 1b usando a propriedade distributiva e executando todos os procedimentos. Do problema 2b em diante perguntou se poderia fazer direto, tendo feito corretamente, exceto o problema 8b, que continha coeficientes fracionários.

Segundo Krutetskii (1976), os alunos mais habilidosos do grupo estudado por ele facilmente encontravam as semelhanças, muitas vezes escondidas atrás de particularidades, sendo capazes de perceber a essência do fenômeno, captando o aspecto principal, a base. Já os sujeitos matematicamente incapazes precisavam ser treinados por um longo tempo, com diversos materiais, cobrindo todas as possíveis combinações e características irrelevantes, *antes de alcançarem um grau elementar de generalização* (p. 242), o que pode explicar a dificuldade de S1 em resolver os problemas cada vez que a natureza dos coeficientes mudava.

Tabela 41:

Tempo gasto para a solução dos problemas relativos à generalização (Série V)

Tempo	S1	S2	S3
Parte A	12': 00''	06': 00''	04': 00''
Parte B	24': 00''	11': 00''	07': 00''
Total	36': 00''	17': 00''	11': 00''

Conforme pode ser observado na Tabela 41, S3 resolveu os problemas das série V quase em um terço do tempo total gasto por S1.

A série VIII (anexo D), proposta por Krutetskii (1976), é composta por problemas abstratos para o nível de compreensão de S1. Mesmo tendo sido introduzidos alguns problemas iniciais que não faziam parte da série, com o objetivo de familiarizar o sujeito com a tarefa, S1 teve muita dificuldade para realizar as tarefas propostas. Aparentemente não tinha o conhecimento sobre monômios, polinômios e nem como operar com eles; apresentando também dificuldade para operar com os números negativos e fracionários.

Foram preparados dois problemas introdutórios que eram variantes para o primeiro problema da série (problema 3). S1 precisou de quatro variantes para conseguir solucioná-lo. O segundo problema da série foi desmembrado em três (problemas 5, 6 e 7) e havia sido preparado como variante o problema 4, tendo sido necessárias mais de uma variante para cada problema. O terceiro problema (problema 10) tinha duas variantes (problemas 8 e 9) e o último problema (problema 13) também possuía duas variantes (problemas 11 e 12).

S1 resolveu a série em 40 minutos, tendo apresentado muita dificuldade, mesmo tendo solucionado mais problemas variantes e tido questões dirigidas, como pode ser observado a seguir:

O trecho abaixo, retirado do protocolo de S1, evidencia pouca compreensão sobre a essência do conceito de números negativos.

S1: Quem é menor -3 ou -9?

S1: - 4.

Ao invés de responder à questão através de um procedimento de comparação dos números envolvidos, S1 respondeu aparentemente por tentativa e erro.

E: Não está perguntando isso. Está perguntando quem é menor, ou -3 ou -9.

S1: O -3.

E: O -3 é menor que o -9. Como que você fez para ver quem é menor?

S1: Porque ele tem menas quantidade.

E: Como a gente mede quantidades? Se fosse temperatura...

S1: Ahn...

E: -3 e -9 graus, quem é mais frio?

S1: O -9.

E: Então -9 é a temperatura mais baixa, é a menor temperatura, tá?

Apenas após o experimentador ter elaborado uma questão que disponibilizou a informação necessária à solução do problema, S1 conseguiu responder corretamente, o que pareceu evidenciar que o sujeito não possuía estratégias para recuperar informações já aprendidas em sua estrutura cognitiva.

O trecho a seguir evidenciou pouca compreensão sobre números fracionários e o desconhecimento sobre o princípio de simplificação de frações, pois o sujeito afirmou que se o numerador e o denominador da fração ¼ fossem divididos por 2, obter-se-ia ½.

S1: Quem é menor ¼ ou ½ ?

[pensa um pouco]

S1: Se simplificar, os dois fica igual.

E: Como?

S1: Simplificar por 2, o ¼ .

No trecho a seguir o experimentador formula questões para verificar se a solução apresentada por S1 foi obtida por tentativa e erro, o que induziu S1 a acreditar que respondera errado e imediatamente mudar a solução, evidenciando pouca compreensão a respeito de números fracionários e insegurança.

E: Quem é o menor?

S1: ¼?

E: ¼ é menor? Como você pensou?

S1: Não, ½ é menor.

E: Ah, e por quê?

S1: Porque ele é menor. É metade de ¼ . Pode ser a metade de ¼.

E: ½ é metade de ¼ ?

S1: Não, eu tô falando, pode ser, ½ é metade de ¼.

Esse artifício de dizer "não estou dizendo que é algo, pode ser que seja", foi bastante usado por S1 quando ele não sabia responder com certeza alguma questão do experimentador. Em várias oportunidades, S1 mostrou-se inseguro nas respostas e, indagado sobre a razão de uma resposta, ele a mudava, mesmo quando estava correta, revelando uma certa insegurança em relação ao resultado.

S2 também teve muita dificuldade em resolver os problemas da série VIII e, mesmo naqueles corretos, podia-se perceber uma lacuna na compreensão. No problema 2 (que era um variante), S2 respondeu que x^4 poderia ser fatorado por x^2 (o que estava correto), entretanto ...

E: E x^3 pode ser fatorado por x^2 ?

S2: Não.

E: Por quê?

S2: Porque 3 não dá para dividir por 2.

A justificativa sobre a impossibilidade de x^3 não poder ser fatorado por x^2 evidencia que S2 não percebia x^3 e x^2 como números com três fatores x e dois fatores x, respectivamente, impedindo-o de perceber que x^3 poderia ser dividido por x^2 e sobraria um fator x, pois x^3 poderia ser composto por um fator x^2 e um fator x ($x^3 = x^2 \cdot x$). Aparentemente, a percepção de S2 sobre o número a ser fatorado e o fator dizia respeito apenas aos expoentes 3 e 2.

Antes de apresentar o problema 3, era explicado aos sujeitos o conceito de monômio, binômio, trinômio e polinômio. Porém, mesmo com essa explicação, S2 não conseguiu resolver corretamente o problema.

Aparentemente, a compreensão sobre números fracionários também não era clara. Quando S2 foi indagado sobre o que era menor, ¼ ou ½ , respondeu corretamente ¼ e explicou:

S2: ... se você reparte uma pizza em quatro, só pega um pedacinho, e [se você reparte] *em dois , você pega um pedaço maior.*

Em seguida, quando se indagou o que era menor, $^1/_{16}$ ou ½ , o experimentador esperava ouvir $^1/_{16}$, mas S2 respondeu, com a maior naturalidade, ½ . Apenas quando foi explicar, de novo usando o exemplo da pizza, percebeu seu erro.

O caso desse sujeito parece confirmar a idéia de que o excessivo uso do concreto muitas vezes acaba incapacitando o estudante a pensar abstratamente sobre as frações, isto é, isoladamente o aluno não consegue abstrair o conceito de número fracionário.

Quando o problema 4 foi formulado, o objetivo era fazer com que os sujeitos tivessem subsídios para responder os problemas 5, 6 e 7 (originais da série), pois esse problema fornecia exemplos que colaborariam na solução dos problemas 5, 6 e 7. Entretanto isso não ocorreu, como pode ser percebido no trecho a seguir.

S2: Pode-se dizer que a^2 é maior que a? É, porque 2 vezes 2 é 4, 4 é maior. E $(-2)^2 = -4$ [errou duplamente, porque $(-2)^2 = + 4$ e -4 é menor que -2].

E: Olhe na folha [aquela onde o sujeito estava solucionando os problemas] *e veja se tem algum exemplo que possa te ajudar.*

S2: Não.

E: E ½ e ¼ , qual é maior?

S2: ½ .

E: Então?

S2: Tem alguma coisa a ver?

Foi observado que o sujeito S2 forneceu respostas que aparentemente evidenciam que ele não era capaz de discriminar as regras básicas de sinais na adição e multiplicação. No problema que perguntava se "– x" era sempre um número negativo, S2 respondeu:

S2: ...Acho que não.

E: Por quê?

S2: Eu sei, $-x-x=+x^2$

Aparentemente, os procedimentos ativados referem-se mais ao princípio multiplicativo dos sinais. O sujeito deveria ter automatizado que "sinais iguais, soma e repete o sinal", mas ele parece sofrer uma certa interferência da regra relativa à multiplicação dos sinais e dos literais pois para ele $-x-x=+x^2$, ou seja, usou a regra "sinais iguais, sinal de mais" e multiplicou x por x, obtendo x^2.

Isso evidencia que a resposta (ao princípio multiplicativo dos sinais), não tendo sido aprendida de maneira eficaz e, posteriormente, fixada através de exercícios, não foi automatizada (no sentido dado por Krutetskii, 1976; Garcia, 1996). Quando isto ocorre, e o sujeito se encontra frente a um problema semelhante, existe uma interferência daquela resposta.

E: Se x é igual a 5, 100 e ½ , quanto vale – x?

S2: -5, -100 e - ½ .

E: Então para quais [números] *não vale isso?*

Após repetidas tentativas, é perguntado ao sujeito:

E: E se x vale -100?

S2: – x é igual a 99.

A resposta evidenciou que o sujeito não conseguiria solucionar o problema por não dispor dos pré-requisitos necessários e pela interferência que exibia nas respostas.

S2 apresentou alguns conceitos de Geometria que também não pareciam muito claros. Por exemplo, no problema 8 (uma variante) que indagava sobre o perímetro e a área de um quadrado de lado 5:

E: O que é perímetro?

S2: É o tamanho do quadrado [mostrou com o lápis que se referia a soma dos lados do quadrado].

E: Então, é a soma dos lados?

S2: É, é 20.

E: E a área?

S2: É o que tem dentro [do quadrado]. *Como é que eu faço? 2.5* [dois e meio], *2.5, 2.5 e 2.5 é 10!*

Isto, aparentemente, indica que o conceito de área foi ensinado através de um desenho, possivelmente quadriculado, e foi explicado que a área era a quantidade de quadradinhos dentro do desenho. O sujeito, agora, tentava repetir essa mesma explicação, pois ele dividiu o quadrado em quatro quadrados de lado 2,5, considerando, erroneamente, que eles tinham área igual a 2,5. Desta forma, a área do quadrado maior seria a soma da área dos quadrados menores, perfazendo 10.

No problema 9, uma extensão do anterior, S2 também apresentou dificuldades. Primeiro confundiu o retângulo com quadrado; afirmou que 4c + 3 era igual a 7. Após muitos direcionamentos conseguiu encontrar o perímetro e a área do retângulo. Mesmo com as duas variantes (problemas 8 e 9), esse sujeito apresentou grande dificuldade para resolver o problema 10.

S3 solucionou os problemas da série VIII em 26 minutos. No geral apresentou uma boa compreensão dos problemas, apesar de não ter demonstrado conhecer o conceito de trinômio e ter operado incorretamente com literais. Em alguns problemas, esse sujeito necessitou de auxílio, conforme mostra este trecho de seu protocolo:

S3: É sempre verdade que o a^2 *é maior que o a? Se for um número negativo não.*

E: Diga um número negativo e faz o a^2*.*

S3: -3.

E: -3 é o a. O a^2 *dá quanto?*

S3: 9.

E: Qual é maior, o a^2 *ou o a?*

S3: O 9. Então tem que ser ... é ... 4. Pode ser?

E: Veja quanto dá a^2*?*

S3: 16.

E: Qual é maior?

S3: ... o a é qualquer número?

E: O a é qualquer número... Com negativo dá certo, com positivo também da certo... Com que poderia falhar?

S3: Numa fração.

E: Experimenta.

S3: ½ vezes ½ é igual a ¼ .

E: Isso, então a^2 *é ¼ e a é ½ . Qual é menor?*

S3: É ¼.

E: Então está provado que a^2 *é sempre maior que a?*

S3: Não.

E: Não, por que?

S3: Por causa que ... ah, por causa das frações.

Esse trecho mostra um exemplo da compreensão do sujeito sobre o conceito de variável e dos números fracionários, pois ficou evidenciada a percepção da idéia de que uma letra pode assumir diferentes valores e a compreensão do conceito de maior e menor relativo a números fracionários.

No problema 8, referente aos conceitos de perímetro e área, S3 solucionou corretamente o problema, mostrando, também, conhecer a relação $5 \times 4 = 5 + 5 + 5 + 5$.

S3: Qual é o perímetro de um quadrado de lado 5 e a área? ... de lado 5, perímetro ...

E: O que é perímetro?

S3: A soma dos lados. ... então perímetro vai ser 20.

E: Por que você pensou [assim]*?*

S3: Porque o quadrado tem uma medida só, os quatro lados são iguais, então são 5 vezes 4.

E: Hum, hum.

S3: E a área vai ser 5 vezes 5, que é igual a 25.

Neste caso, o protocolo evidenciou o conhecimento do conceito e dos procedimentos relativos ao cálculo da área e do perímetro do quadrado. Todavia, quando ele solucionou os problemas 9 e 10, não conseguiu discriminar, não quis fazer nenhum esboço, não se preocupou com a clareza da solução e, devido a isso, errou os cálculos. Por exemplo, escreveu que $3 + 4c = c$, ou ainda, que a área seria $4c + 3$ vezes $4c$ (o que estava correto), mas não colocou os parênteses, o que resultou em $16c + 3$, depois $16c + 12$. Apenas quando informado de que havia dois erros, ele refez a solução.

O trecho extraído do protocolo de S3 mostrou que os problemas 8 e 9 não funcionaram como ajuda para encontrar a solução do problema 10, talvez porque o sujeito tivesse dificuldade em operar com literais.

S3: Tá estranho. Então, um lado de um retângulo é igual a 3m + 2n. E o outro lado é m - n e é maior que esse lado.

E: Esse aí é um lado do retângulo? m - n?

S3:[lendo] *O outro lado é m - n maior.*

E: Ah, então o que você tem que fazer?

S3: Subtrair.

Krutetskii (1976) relatou que os alunos menos capazes em Matemática eram incapazes de fazer, por si mesmos, a transição de um problema para outro. Acrescentou que nenhuma das questões diretivas, ou a ajuda do experimentador, eram eficazes para que tais sujeitos passassem de um nível de generalização para outro, sendo que, em casos mais difíceis, não houve generalização alguma, o que foi corroborado no presente estudo quando, mesmo conseguindo solucionar o problema 8, os sujeitos não conseguiam avançar nos problemas 9 e 10, ainda que com ajuda do experimentador.

Finalmente a série X (anexo E) continha dez problemas que exigiam a montagem de equações para solucioná-los. Essa série mostrou-se extremamente difícil para S1, desde a interpretação dos enunciados. Depois de montadas as equações, se não houvesse denominadores, ele as resolvia com relativa facilidade, porém não mostrou ter incorporado o hábito de verificar as respostas encontradas ou a adequação das mesmas à questão do problema.

Primeiramente foram apresentados os problemas 1 e 2 e foi explicado o princípio geral da composição das equações desses problemas. A seguir, foi solicitado que o sujeito solucionasse o problema 10, depois os problema 9, 8 e 7. O sujeito 1 não conseguiu montar as equações do problema 7 nem com a ajuda do experimentador. Passou-se então ao problema 3, que foi solucionado com muita dificuldade. Retornou-se ao problema 7 e posteriormente foram solucionados os problemas 6, 5 e 4. O sujeito 1 não conseguiu solucionar o décimo problema.

Todos os problemas necessitaram de questões dirigidas para serem solucionados. A dificuldade de interpretação dos mesmos foi grande, como pode ser observado pelos trechos transcritos a seguir:

[durante a solução do problema 1: "Um professor manda os alunos adicionarem 12 a um dado número e dividirem o resultado por 13; mas, um aluno desatento subtraiu 13 do número dado e dividiu o resultado por 12. Ele estava com sorte e obteve o resultado certo. Qual foi o número dado?"]

S1: Adicionou 12 ...

E: Vai falando o que você está pensando...

S1: Alá, o professor manda adicionarem, então seria x + 12?

E: Hum, hum.

S1: x+ 12 dado número e dividirem o resultado por 13. Agora 13. [escreve x + 12=13]

A dificuldade da transposição da linguagem natural para a linguagem algébrica é evidenciada no trecho anterior, quando S1 lê "dividirem o resultado por 13" e escreve "é igual a 13" e no trecho seguinte quando escreve que a quantidade de notas de R$ 3,00 mais R$ 3,00 era igual ao preço total.

[durante a solução do problema 7: "Uma escola adquiriu livros para a biblioteca. Se tivesse pago com notas de R$ 3,00, teria usado 8 notas a mais do que se tivesse pago com notas de R$ 5,00. Qual foi o preço dos livros?"

(depois de chamar as notas de R$ 3,00 de **y**, as notas de R$ 5,00 de **x** e o preço total dos livros de **p**, na montagem da equação que expressava que a quantidade de notas de R$ 3,00 era a quantidade de notas de R$ 5,00 mais oito notas...)

S1: Hum, $y + 3 = p$.

E: Veja bem, se y vezes 3 é igual a p; y mais 3 não pode ser p também.

S1: E como eu tenho que colocar aqui? [referindo-se à segunda equação]

E: Se eu falo para você assim: eu tenho duas canetas e tenho 8 lápis a mais que isso. Quantos lápis eu tenho?

S1: Tem 10.

E: E como você fez isso?

S1: Somei pelo tanto de caneta que eu tinha. Eu tinha duas canetas e oito lápis a mais que duas canetas.

...

E: E se eu falasse para você: eu comprei canetas de R$ 3,00. E meus lápis custaram R$ 5,00. Eu tenho duas canetas e tenho 8 lápis a mais do que a quantidade de canetas. Quantos lápis eu tenho?

S1: Eu comprei?

E: Duas canetas, e cada uma custou R$ 3,00. E eu comprei 8 lápis a mais do que as canetas e cada um custou R$ 5,00. Quantos lápis eu tenho, eu comprei?

S1: Cada caneta custou sozinha R$ 3,00?

Essa indagação parece mostrar que S1 não percebe o que é essencial no enunciado do problema.

E: Hum, hum.

S1: E cada lápis sozinho custou R$ 5,00?

E: Sim, mas a essência é que eu comprei duas canetas e comprei 8 lápis a mais do que a quantidade de canetas. Quantos lápis eu comprei?

S1: 10.

E: Serviu para alguma coisa os preços?

S1: Não.

E: Então como você escreve que se tivesse pago com notas de R$ 3,00 teria usado oito notas a mais do que se tivesse pago com notas de R$ 5,00?

S1: Colocar y + 8?

E: É igual a?

S1: p

E: Não!

Depois de inúmeras questões diretivas S1 percebeu que y + 8 era igual a **x**.

E: Tá, então vamos substituir no enunciado onde está escrito notas de R$ 3,00 por y e notas de R$ 5,00 por x. "Se tivesse pago com y, teria usado 8 notas a mais do que se tivesse pago com x." A gente usa mais notas de x ou mais notas de y?

S1: Mais notas de y.

E: E do jeito que está escrito [y + 8 = x], *a gente está usando mais notas de y ou mais notas de x?*

S1: Mais notas de y.

Aparentemente S1 percebeu seu erro, pois em seguida ele consertou que eram notas de x.

E: Ótimo, então onde tinha que estar esse + 8?

S1: No x. [e a seguir, demonstrando que não havia entendido...]

S1: Do lado de dentro ou do lado de fora?

A partir dos resultados da aplicação dessas três séries, em que o sujeito solucionou os problemas com grande dificuldade e ajuda do experimentador, porém nunca generalizando o processo de solução ou utilizando estruturas abreviadas de pensamento, acredita-se que S1 estivesse no primeiro nível (nível 1) de generalização do material matemático, conforme estabelecido por Krutetskii (1976):

> *O sujeito não consegue generalizar o material matemático de acordo com as características essenciais do problema, mesmo com ajuda do experimentador e depois de alguns modelos intermediários de problemas.* (p. 254)

Assim como S1, S2 apresentou bastante dificuldade para solucionar os problemas dessa série. Foi familiarizado sobre a montagem de equações com os problemas 1 e 2, sendo, a seguir, solicitado a solucionar o problema 10. Não conseguindo resolvê-lo, foi solicitado a solucionar os problemas 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 e, finalmente, novamente o problema 10, o qual S2 não conseguiu solucionar. S2 começou montando as equações com pouca dificuldade:

S2: Adicionei 36 a um certo número e obtive o mesmo que se multiplicasse esse número desconhecido por 4. Então é x mais 36 [escreve x + 36] ... *então ... obtive o mesmo que multiplicasse ...*

E: Obtive o mesmo o que? O que significa isso?

S2: O mesmo número.

E: Tá. Como representa isso matematicamente?

S2: Multiplicar?

E: O mesmo, o que é isso?

S2: Igual.

S2: Que multiplicasse... vezes, não, que multiplicasse ... ah, espera. Mesmo que multiplicasse esse número desconhecido, x vezes 4. Qual é esse número?

mas quando começou a resolver as equações essas dificuldades aumentaram consideravelmente:

S2: Tem que dividir?

E: Hum?

S2: Ah, eu não sei ... não é pra dividir?

E: Por que dividir?

queria inclusive achar denominador, onde não tinha denominador,

S2: Porque era pra achar os denominadores.

E: Olhe bem, você tem x mais 36 é igual a x vezes 4. Quanto é x vezes 4?

S2: 4x, x^4 *?*

S2: 4x, pode colocar?

Após encontrar a equação, a dificuldade continuou,

E: Como resolve essa equação?

S2: ...Tem que tirar o 36?

E: Hum.

S2: - 36 mais 4x ... é 32x.

E: Ah é? Pode fazer isso?

S2: Pode , não pode? ... Ah!

E: Pode ou não pode?

S2: Não.

E Por quê?

S2: Porque não tem x [no -36].

S2 era impulsivo e não demorava para responder, como pode ser observado no problema 9:

S2: Divida o número 100 em 4 partes diferentes, de maneira que se você subtrair por 4 da primeira parte, somar 4 na segunda parte e multiplicar por 4 na terceira, pode dividir por 4 a quarta e você obterá o mesmo número. 25?

E: 25 dá quatro partes diferentes? Você sabe quais são as quatro partes?

S2: Do que?

No problema 7, mesmo com bastante ajuda e direcionamentos do experimentador, S2 não conseguia iniciar os procedimentos de solução:

[Problema 7: Uma escola adquiriu livros para a biblioteca. Se tivesse pago esses livros com notas de 3 reais, teria usado 8 notas a mais que se tivesse pago com notas de 5 reais. Qual foi o preço dos livros?]

E: Esse problema é meio estranho porque ele foi traduzido do russo. E daí, lá tem notas de 3 e aqui no Brasil não tem. Então você faz de conta que existe uma nota de R$ 3,00, tá?

O trecho a seguir mostra a dificuldade de S2 na interpretação do problema.

S2: Quer saber quantas notas ... ó, se eu tivesse pagado o livro com notas de 3 reais, teria usado 8 notas a mais do que se tivesse pagado com 5.

E: Então, o que você tem que saber?

S2: 8 vezes 3?

Durante a montagem das equações, S2 também mostrou dificuldade em passar da linguagem natural para a linguagem algébrica, quando afirma que pode representar as notas de R$3,00 por y e também pode usar y para representar o preço total dos livros, como pode ser observado pelo trecho do protocolo, a seguir:

E: Como que você vai chamar, por exemplo, as notas de R$ 3,00?

S2: y?

E: y.

S2: + y?

E: Não. O preço do livro é o que?

S2: y?

[depois de muito tempo, a primeira equação é finalmente montada: 3y = 5x. E quanto a segunda equação...]

E: Que mais tá faltando?

S2: Que eu teria usado 8 notas a mais do que se teria pagado com notas de cinco.

E: Então, o que você sabe das notas de cinco e das notas de três reais?

S2: Que esse daqui eu vou pagar 8 a mais do que essa.

E: 8 notas. Então como fica a equação para y e x?

S2: Dividir por 8?

S2 aparentava não compreender o enunciado do problema, conforme evidenciou a sua pergunta sobre a necessidade de dividir uma das incógnitas por 8, após ter dito diversas vezes que usaria oito notas de R$ 3,00 a mais. No problema 6, que era mais parecido com os problemas que costumam aparecer nos livros didáticos, o sujeito exibiu uma boa compreensão dos fatos, tendo montado corretamente as equações,

S2: A soma de dois números é 20. Se um desses números é aumentado 5 vezes, e o outro 4 vezes, a soma obtida será 92. Encontre os números... Então x ... mais y é igual a 20.

E: Isso.

S2: Se um desses números é aumentado 5 vezes, então x vezes 5 ... mais y vezes 4 ... é igual a 92.

E: Isso.

S2: Aí ... eu tenho que fazer o negócio aqui de novo [se referindo a multiplicação], *né? x vezes 5, eu posso colocar 5x?*

E: Hum, hum.

S2: Mais 4y vai dar 92.

E: Exatamente.

S2: Aí, hum ... eu tenho que tirar alguma letra daqui.

Embora não se tenha mostrado capaz de solucionar as equações, provavelmente porque ainda não havia aprendido sistema de equações, e tenha necessitado de bastante ajuda do experimentador, esse sujeito evidenciou que era capaz de, sendo dirigido, montar as equações.

A análise dos protocolos, com relação à capacidade de generalização de problemas matemáticos, mostrou que S2 poderia ser classificado no nível 1, isto é, não conseguiu generalizar o material a partir das características essenciais do mesmo, ainda que recebendo considerável ajuda do experimentador.

Da mesma maneira que os outros dois sujeitos, S3 também apresentou problemas na passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica, como pode ser observado no problema 3, quando ele expressa a metade de um número como ½ e um terço de um número como $^1/_3$, ou ainda no problema 7, quando ele diz que, juntando as quatro partes se obtém 100 e quer escrever 100 dividido por alguma coisa. Também no problema 8, quando afirma que quantidades de água diferentes em dois barris podem ser expressas por x = y. A seguir, alguns trechos extraídos dos protocolos de S3, durante a solução dos problemas da série X:

[problema 3]

S3: Pensei em um número. A soma da metade com um terço desse número é 7 unidades maior que um quarto desse número. Qual é o número? Então o x, né? É, esse número, o x, a soma da metade com um terço ... então é mais meio, né? [Escreve ½ + $^1/_3$]

E: Espera um pouquinho. A soma da metade desse número. Quem é a metade desse número?

S3: A metade do x? $^x/_2$.

[problema 9]

E: Tá, então o que é que você pode fazer? O que é que você sabe?

S3: Que 100 dividido por 4 ... 100 ... Eu sei que 100 é dividido em 4 partes.

E: São 4 partes diferentes, né?

S3: É.

E: Você já disse que as partes são x, y, a e b. O que é que você sabe sobre esse x, y, a, b e o 100?

S3: Que eles são partes diferentes do 100.

E: Que eles são partes diferentes do 100. E quando você junta eles todos tem que dar o que?

S3: 100.

E: 100. Então, como é que você escreve essa equação?

S3: 100 dividido por ...

E: Não, quando eu junto todas as partes dá 100.

S3: Ah, então 4 vezes ...

[problema 8]

S3: Imagina dois barris que contenham quantidades diferentes de água. Então vai ser x=y.

E: Não. Tem quantidades diferentes.

...

E: A próxima equação qual é?

S3: Se retirarmos 20 litros de água do segundo barril ... Então vai ficar y - 20. Que é igual, e colocarmos no primeiro barril, x + 20.

E: Isso.

S3: O primeiro barril ficará com o triplo de água ...

E: Como escreve então?

S3: Vai ficar isso aqui [x + 20] *vezes 3.*

E: Peraí. Quem é que fica com o triplo?

S3: O primeiro barril, então é o x que fica vezes 3.

Como os sujeitos 1 e 2, o sujeito 3 também não percebeu que se o primeiro barril tinha maior quantidade, então o número 3, referente ao triplo de água, deveria estar multiplicando a expressão do segundo barril.

O sujeito 3 encontrou o mesmo tipo de dificuldade no problema 4:

S3: Um bloco de anotações é quatro vezes mais caro que uma caneta. Então é x vezes 4? Ou então é 4 vezes y?

Em todos os problemas esse sujeito necessitou da ajuda do experimentador. Os problemas lhe foram apresentados na seguinte ordem: problemas 1, 2, 3, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4 e 10. O sujeito 3 apresentou dificuldades para resolver equações do 1° grau, não conferiu o resultado encontrado e nem se preocupava em dar uma resposta ao problema. Nos problemas dessa série, pode ser observado ainda que S3 fazia cálculos de multiplicações e divisões mentalmente e com relativa rapidez.

Dessa forma, após a análise dos protocolos do sujeito 3 nas séries V, VIII e X, nos aspectos relativos à capacidade de generalizar problemas, foi possível classificá-lo no nível 2: *generaliza depois de muitos problemas de um determinado tipo e ajuda considerável do experimentador, mas com erros isolados.*

Tabela 42:

Tempo gasto para a solução dos problemas da Série X

Problema	S1	S2	S3
P1	14’: 00’	10’: 00”	07’: 00”
P2	04’: 00’	04’: 00”	01’: 00”
P3	14’: 00’	04’: 00”	04’: 00”
P4	10’: 00’	05’: 00”	03’: 00”
P5	11’: 00’	03’: 00”	04’: 00”
P6	11’: 00’	11’: 00”	05’: 00”
P7	16’: 00’	21’: 00”	07’: 00”
P8	19’: 00’	18’: 00”	11’: 00”
P9	34’: 00’	15’: 00”	16’: 00”
P10	não conseguiu	não conseguiu	não conseguiu
Tempo Total	02h:13’	01h:31’	58’: 00”

A Tabela 42 mostra que o sujeito 3, novamente solucionou os problemas dessa série num tempo consideravelmente menor que os outros sujeitos. Contudo, deve-se ressaltar que esse sujeito, classificado em um nível acima dos sujeitos 1 e 2, encontrava-se na oitava série e portanto era esperado que já dominasse o processo de montagem de equações e as fórmulas dos produtos notáveis presentes na série V. Dessa forma é provável que seu desempenho estivesse mais afetado pela, escolaridade que pela habilidade.

Com a finalidade de estudar a flexibilidade de pensamento dos sujeitos, foram aplicadas as séries XIII (anexo F), XIV (anexo G) e XV (anexo H).

A série XIII é composta por cinco problemas que possuíam mais de uma solução, sendo mais facilmente solucionados se aplicadas as fórmulas do quadrado da soma ou da diferença ou produto da soma pela diferença de dois números. Após o sujeito resolver cada um deles o experimentador questionava-o sobre a possibilidade de outra forma de solução e quando o sujeito não conseguia perceber outra maneira o experimentador apresentava uma delas e o sujeito era indagado sobre qual o melhor procedimento, qual ele preferia e por quê. Isso era feito com o objetivo de tentar identificar se o sujeito tinha inclinação por soluções mais claras, econômicas e elegantes.

Durante a aplicação dessa série e, posteriormente, através da análise dos protocolos, foi percebido que o primeiro problema era difícil para o sujeito 1, que começou aplicando a propriedade distributiva e, após 23 minutos, quando havia encontrado uma série de potências de dois, sendo somadas e subtraídas, desistiu. Quando foi sugerida outra forma de solução, não demonstrou interesse, aparentando irritação por não ter conseguido solucionar o problema.

O sujeito 2 também começou distribuindo os termos e finalizou deixando a resposta em potências de dois, o que pode ser considerado correto. Com relação a outra forma de solucionar, o sujeito respondeu que não conhecia.

Da mesma forma que o sujeito 2, o sujeito 3 substituiu os números e foi distribuindo até deixar em potências de dois, tendo gasto 22 minutos para solucionar o problema. Fazia os cálculos mentalmente, ainda que cometesse alguns erros que denotavam falta de conhecimento de propriedades básicas de potências, como pode ser observado no trecho a seguir:

E: ... $2^2 \times 2^8$ *dá quanto?*

S3: Dá 4^{10} *!*

Esse trecho mostra que S3 multiplica a base dois e soma os expoentes dois e oito, aplicando de maneira incorreta a propriedade de multiplicação de potências de mesma base. Entretanto, quando lhe é perguntada a mesma propriedade, numa forma mais genérica, como usualmente é ensinada a propriedade, ele consegue responder corretamente. Isso pode evidenciar que, apesar de conhecer a propriedade, ele não consegue percebê-la num contexto numérico e portanto não a utiliza corretamente.

E: Se fosse $a^2 \times a^8$ dava quanto?

S3: a^{10}

Quando indagado sobre outra maneira de solucionar o problema, S3 apresentou sua alternativa:

S3: Deixa eu ver, ..., só podia substituir os 4.

E: Pelo que?

S3: Pelo 2^2.

E: E o que mais, você poderia fazer?

S3: Já ia somando né? $2^2 \times 2$.

E: Somando que você diz, é aqui?

S3: Multiplicando, é, podia ir resolvendo [ao invés de ir distribuindo].

O experimentador apresentou, então, um outro procedimento de solução, em que os valores numéricos são substituídos em cada expressão. Em seguida, solucionou as operações dentro dos parênteses, obtendo um produto de três números, para, finalmente, multiplicar esses números.

Com relação à preferência, S1 preferiu o procedimento do experimentador porque era, segundo ele *mais rápido e mais fácil, porque não complica tanto*, tendo considerado também que na forma que usou, 'ele se perdeu muito'. S2 também preferiu o procedimento proposto pelo experimentador porque era *mais rápido*, enquanto S3 preferiu o procedimento do experimentador por ser mais simples.

O segundo problema dessa série, era, externamente, parecido com o primeiro. Mas, na verdade, tratava-se de um problema no qual a fórmula do quadrado da soma, se aprendida pelos sujeitos nas séries anteriores, facilitaria a solução. Porém os sujeitos não perceberam essa possibilidade e usaram o procedimento de substituir os valores numéricos na expressão, como havia sido feito no problema anterior e encontraram a resposta correta, resolvendo passo a passo. Todos os sujeitos, de forma semelhante, disseram que não viam outra maneira de solucionar o problema. O experimentador apresentava, então, um procedimento que transformava o trinômio no quadrado da soma, depois substituía os valores numéricos, e realizava as operações de soma e potência, encontrando a resposta em três etapas.

Nesse caso, os três protocolos indicaram que os sujeitos prendiam-se aos aspectos externos do segundo problema, pois, após a leitura desse problema, lembravam-se da solução proposta para o problema 1 e aplicavam os mesmos procedimentos nesse problema.

O sujeito 1 preferiu o procedimento que ele mesmo havia proposto, pois já estava acostumado com aquele tipo de expressão, ou seja, quando tinha uma expressão algébrica e os valores numéricos de cada letra, para ele parecia mais fácil ir substituindo pelos valores. Às vezes, isso complicava o procedimento, como no problema 1, onde esse sujeito não conseguiu encontrar uma solução. Já o sujeito 2 optou pelo procedimento proposto pelo experimentador, alegando que era o mais rápido. O sujeito 3 solucionou o problema em dois minutos, tendo questionado o procedimento apresentado pelo experimentador, pois não conseguiu ver, na expressão apresentada, a expressão que vinha trabalhando em outras séries.

S3: Mas o a é [está] *no final.*

E: Aqui é soma, né? A ordem tanto faz.

Para S3, como a expressão no enunciado do problema era $2ab + b^2 + a^2$, não podia ser aplicada a fórmula do quadrado da soma, pois nos problemas das séries anteriores usualmente o termo a^2 vinha primeiro ($a^2 + b^2 + 2ab$). Após o experimentador explicar e efetuar as operações com alguns exemplos, mostrando que numa soma a ordem dos fatores não altera o resultado, S3 preferiu o procedimento do experimentador, alegando ser mais fácil.

No problema 3, S1 percebeu os denominadores diferentes e quis encontrar um denominador comum, porém atrapalhou-se com uma letra no denominador. Com a ajuda do experimentador, após 8 minutos chegou à equação do segundo grau, entretanto não conseguiu solucioná-la, provavelmente porque o conteúdo de equações do segundo grau estava no programa da oitava série e esse sujeito estava cursando a sexta série. Após uma grande insistência do experimentador em solicitar-lhe outra forma de solucionar o problema, apenas olhando para o enunciado, S1 percebeu que um dos valores de x era 3 e o experimentador mostrou-lhe que o outro valor era $^1/_3$. Quando indagado sobre qual procedimento ele preferia e a razão dessa escolha, esse sujeito respondeu que preferia o procedimento sugerido pelo experimentador porque *só de olhar dá para ver* [os valores de x], *ele é mais rápido e fácil.*

O sujeito 2 aparentou um alto grau de dificuldade para solucionar o problema 3. Ao deparar-se com o denominador correto e as frações equivalentes, alegou que 3 – 10x era igual a -7. Depois de alguns questionamentos, chegou à equação do segundo grau correta, mas, da mesma maneira que o sujeito 1, não havia aprendido como resolvê-la. Não conseguiu achar uma outra forma para solucionar o problema, mesmo com o experimentador insistindo para ele olhar cuidadosamente o enunciado. Após o experimentador mostrar outro procedimento, esse sujeito disse que preferia o procedimento proposto pelo experimentador porque era mais rápido e mais fácil.

O sujeito 3 gastou 11 minutos para solucionar o problema 3, tendo apresentado problemas conceituais de fração, onde quis substituir 3 inteiros e $^1/_3$ por $^4/_3$. No dia da aplicação havia aprendido equações do segundo grau, mas precisou de ajuda para lembrar-se da fórmula de Báskara. Esse sujeito preferiu o procedimento do experimentador porque *para quem tem base,* [essa solução] *é mais rápida.*

O problema 4 apresentava a diferença de dois números elevados ao quadrado, que os sujeitos também vinham trabalhando em seções anteriores. Entretanto, eles não utilizaram esse conceito e preferiram calcular os dois números elevados ao quadrado (113^2 e 112^2) para, em seguida, subtrair um do outro. Do mesmo modo, disseram que não viam outra maneira de solucionar o problema. O experimentador transformou a diferença de dois quadrados no produto da soma pela diferença dos fatores (113 + 112). (113 - 112), encontrando rapidamente a solução.

O sujeito 1 achou o procedimento do experimentador mais prático e mais fácil, entretanto preferiu seu próprio procedimento por ser 'mais compreensível':

... a gente fez várias vezes isso [transformar $a^2 - b^2$ em $(a + b)(a - b)$], *mas eu não ia pensar sozinho nunca em fazer isso nesse problema.* O sujeito 2 afirmou preferir o procedimento usado por ele, por ser mais fácil, enquanto o sujeito 3 afirmou optar pelo procedimento do experimentador, por ser mais simples.

O problema 5 não foi facilmente interpretado pelo sujeito 1, pois ele afirmou desconhecer o conceito de números consecutivos e, mesmo após algumas explicações e exemplos do experimentador, não conseguiu, sozinho, traduzir algebricamente o enunciado. De maneira semelhante o sujeito 2 também teve muita dificuldade para fazer a transposição para a linguagem algébrica, como pode ser observado no trecho a seguir, *S2: A diferença do quadrado de dois números consecutivos de um número é igual a 28. Encontre esses números ...*

[o experimentador indagou o consecutivo de alguns números]

E: Isso. Então como é que fica aqui?

S2: Aqui vai ficar ... é, tem que fazer a conta.

E: Não, você não sabe ainda qual é o número.

S2: Então eu tenho que fazer x ... ... mais x+1 mais x+2.

E: Por que mais? Tá falando a soma dos números consecutivos?

S2: x ... não, 28, né?

E: Não, o número é x.

S2: Então x+1, e x+2. Mas eu tenho que colocar o mais, não tenho?

Após montar a equação com a ajuda do experimentador, o sujeito 2 apresentou grande dificuldade para chegar à solução e necessitou de considerável ajuda, tendo solucionado o problema através da aplicação da propriedade distributiva e efetuando as operações até encontrar uma equação do primeiro grau, cujo procedimento de solução era conhecido por ele.

O sujeito 3 solucionou o problema em nove minutos, não sendo capaz de definir, formalmente, o conceito de números consecutivos. O trecho a seguir mostra que esse sujeito encontrava-se numa fase classificatória do conceito, pois conseguia reconhecer e dar exemplos do mesmo:

E: O que são números consecutivos?

S3: 1,2,3.

E: Tá, e aí, qual é o consecutivo de x?

S3: x, y. É x, y, z.

E: Não. Qual é o consecutivo de 7?

S3: 8.

E: Como você sabe?

S3: Porque é o número que vem depois.

E: E o número que vem depois do x?

S3: y.

Após o sujeito 3 terminar de solucionar o problema 5 e afirmar não conhecer outro procedimento de solução, o experimentador solucionou o problema de duas formas: a primeira mais longa, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação e a seguir juntando os termos semelhantes, encontrando uma equação do primeiro grau e a solução (procedimento semelhante ao usado pelo sujeito 2) e depois de uma outra maneira, mais elegante, porém mais difícil, utilizando o mesmo argumento que aparecia no problema 4.

O sujeito 1 preferiu a primeira forma, pois, segundo ele, era mais fácil aplicar a propriedade distributiva que perceber a diferença de quadrados. Além disso, ele manifestou verbalmente sua preocupação com a possibilidade de se confundir com os sinais das expressões. O sujeito 2 preferiu o procedimento usado por ele, alegando que era mais fácil. O sujeito 3 preferiu a forma mais elegante apresentada pelo experimentador, afirmando que aquela era mais curta.

Após o intervalo de uma semana foi feita a reaplicação da série XIII. A análise dos protocolos mostrou que o sujeito 1 lembrava-se dos problemas, mas algumas vezes demonstrava confusão durante o processo de solução. Porém soube dizer o resultado de cada problema. Esse sujeito utilizou os mesmos procedimentos de solução adotados na semana anterior, para cada problema. Apresentou dificuldade maior apenas no problema 5, relativo aos números consecutivos. Lembrou-se desse conceito, mas não conseguiu montar a equação corretamente. Após conseguir montar a equação com a ajuda do experimentador, chegou à igualdade $25 = 2x$, e escreveu incorretamente o valor de x, $x = 2/25$.

Quando da reaplicação da Série XIII, o sujeito 2 estava com problemas de saúde, uma forte crise alérgica e não parava de espirrar, necessitando, diversas vezes, parar os procedimentos para ir ao banheiro. O experimentador optou por não marcar o tempo gasto na solução dos problemas, porque esse tempo não serviria como indicador de comparação com o tempo dos outros dois sujeitos, visto que cada vez que S2 retornava, necessitava recuperar o que havia feito anteriormente. Esse sujeito não demonstrou lembrar de já ter resolvido os problemas anteriormente, inclusive cometendo os mesmos erros da semana anterior. Resolveu todos os problemas da maneira como havia solucionado na semana anterior.

Na reaplicação da Série XIII, o sujeito 3 somente no problema 1 usou o procedimento de solução apresentado pelo experimentador (que foi o preferido por ele na semana anterior) . Entretanto, cometeu um erro na substituição. Resolveu os problemas e afirmou lembrar de já haver solucionado os mesmos anteriormente, porém, novamente, não conseguiu definir sozinho os números consecutivos.

Tabela 43:

Tempo gasto para solução dos problemas da Série XIII, durante a aplicação (A) e reaplicação (R)

Problema	S1 - A	S1 - R	S3 - A	S3 - R
P1	não conseguiu	08': 00''	22': 00''	05': 00''
P2	18': 00''	04': 00''	02': 00''	01': 00''
P3	08': 00''	00': 30''	11': 00''	03': 00''
P4	08': 00''	04': 00''	02': 00''	02': 00''
P5	13': 00''	13': 00''	09': 00''	07': 00''
Tempo total	47': 00''	29': 30''	46': 00''	18': 00''

A tabela 43 mostra que o tempo gasto pelos sujeitos 1 e 3 para solucionar os problemas dessa série diminuiu sensivelmente, sendo que no problema 3 o sujeito 1 encontrou a solução mais rapidamente, por haver-se lembrado do procedimento usado pelo experimentador na semana anterior nesse problema. O tempo gasto pelo sujeito 2 não foi computado devido às condições em que realizou a tarefa.

Como pode ser observado pela descrição dos procedimentos de solução dos problemas, nem S1, nem S2 ou S3 tiveram inclinação por procedimentos mais claros ou elegantes. A justificativa para preferirem um determinado procedimento era a rapidez ou facilidade de compreensão, mas quando tiveram a oportunidade de solucionar novamente os problemas, o sujeito 1 se arriscou usando alguns dos procedimentos que escolhera na semana anterior como melhores, mas os sujeitos 2 e 3 mantiveram-se fiéis aos seus procedimentos, mesmo sendo esses mais longos, não evidenciando o pensamento resumido. Além disso, contendo passagens desnecessárias, não primavam pela elegância.

Krutetskii (1976) relatou que alunos matematicamente capazes cumpriram as tarefas da série XIII sem nenhuma dificuldade. A necessidade de encontrar outras soluções só surgia, dentre os sujeitos de Krutetskii, quando a primeira solução encontrada por esses sujeitos não era a mais simples, econômica e elegante. Os alunos medianamente capazes, do grupo estudado por esse autor, afirmaram que encontrar um novo método de solução era consideravelmente mais difícil, enquanto, para os alunos matematicamente incapazes, Kruteskii registrou, ... *se eles conseguiam encontrar alguma solução, um outro método era impossível* (p. 278). Os resultados dos protocolos da série XIII, do presente estudo, não evidenciaram que esses sujeitos fossem altamente habilidosos. Se for considerada a diferença no tempo gasto na primeira e na segunda aplicação dessa série, conforme Tabela 43, pode-se dizer que houve um incremento na aprendizagem que é, mais provavelmente, um resultado da aprendizagem e da memória, que de uma alta capacidade matemática.

Um outro aspecto relatado por Krutetskii (1976) é que o primeiro método de solução encontrado por alunos incapazes parecia impedir a descoberta de outros métodos de solução para o mesmo problema. Esse autor exemplificou isso com o caso de uma aluna de sexta série, considerada matematicamente incapaz, que estava solucionando um problema por um método habitual, porém mais difícil. Com a ajuda do experimentador e com dificuldade ela resolveu o problema por outro método mais fácil. Porém, posteriormente, ela não conseguiu reproduzir corretamente o método mais difícil. Quando, meia hora depois, ela se lembrou do método mais difícil, esqueceu-se do método mais fácil. Esse fenômeno também pôde ser observado nos sujeitos do presente estudo. Embora tenham, na maioria dos problemas, preferido o procedimento do experimentador por achá-lo mais fácil, simples ou rápido, após uma semana os sujeitos praticamente não se lembravam desses procedimentos, voltando a usar os seus próprios procedimentos.

A série XIV (anexo G) é composta de seis problemas, sendo três deles variantes dos outros três problemas. Neste estudo, o problema e sua variante eram apresentados seguidos um do outro, visto que Krutetskii (1976) observou que, quando a variante era apresentada separada do problema original, o sujeito experenciava muito mais dificuldades que quando eram apresentados juntos: o problema e sua respectiva variante.

Nessa série a transição de um problema para a sua variante requeria uma reconstrução bem definida das operações necessárias à solução, que estava mascarada em razão do problema e sua variante serem, externamente, muito parecidos. Relatos de Krutetskii (1976, p.280) mostraram que, mesmo quando a variante era apresentada imediatamente após o seu problema, ela era solucionada de modo mais pobre.

No caso do sujeito 1 do presente estudo, ele apresentou dúvidas em relação aos expoentes contidos no problema 1, mas conseguiu perceber onde havia errado quando o experimentador solicitou que conferisse as operações realizadas. Esse sujeito gastou dez minutos para solucionar o problema. Com relação à variante, gastou nove minutos para resolvê-la, tendo evidenciado a percepção de que o problema era, basicamente, o mesmo; porém, errou a parcela que sofria modificação, conforme é mostrado a seguir:

S1: ... ($0,1\ mn^2$ - $0,01m^2n$) vezes ($0,1\ mn^2$ - $0,01m^2n$). Será que vai dar igual? Só muda o sinal!

E: Então, sem calcular nada, você sabe quanto vai dar?

S1: Eu acho que sim. É só trocar o sinal pro negativo, porque o único sinal que tem aqui é negativo. [aparenta não saber que a ausência de sinal indica que o número é positivo, mas quando efetuou a operação mostrou que sabia, pois utilizou corretamente esse fato]

E: E aonde troca o sinal?

S1: Aqui ó, quer ver, aqui não tem o primeiro sinal, o negativo [escreve $0,002m^3n^3$]. *O segundo tamb... o segundo é positivo, eu acho, é só trocar pra negativo* [escreve - $0,01m^2n^4$ + $0,0001m^4n^2$].

A dificuldade do sujeito 2 começou quando o problema solicitou que multiplicasse os decimais. O procedimento escolhido por ele era tão complicado e ia em direção tão errada, que levou o experimentador a interromper a solução e explicar como se multiplicavam decimais. Só posteriormente o sujeito retornou aos problemas da série XIV. Esse sujeito necessitou de três minutos para solucionar o problema 1 e dois minutos para solucionar o problema 2. Não pareceu perceber que o problema 2 era uma variante do problema 1, mesmo após resolvê-los e não obstante a insistência do experimentador, como mostra o extrato do protocolo:

E: Tem alguma coisa desse [problema2], *semelhante com o outro* [problema 1]*?*

S2: Hum, Hum.

E: O que?

S2: O resultado.

E: Sim, mas o que o resultado tem de diferente?

S2: É a mesma coisa, a mesma coisa.

E: A mesma coisa, mas está mudando o que?

S2: Deixa eu ver. Não está mudando nada.

E: [a resposta] *Tá igualzinho ao anterior?*

S2: Tá.

E: Esse enunciado [problema2] *é igualzinho a esse* [problema 1]*?*

S2: Ai, deixa eu ver. É.

E: Então tinha que dar a mesma coisa. Os dois deram a mesma coisa?

S2: 0,01 n^2m^4 *menos não, é o coisa ... os sinais são diferentes.*

O experimentador esperava que o sujeito 2, da mesma forma que o sujeito 1, tivesse percebido que o problema 2 diferia do problema 1 apenas por um sinal e, assim, percebesse que o procedimento para solução seria o mesmo do problema anterior, embora a solução fosse outra em função do sinal, que era diferente. Entretanto, o sujeito 2 afirmou que os enunciados eram iguais e a resposta obtida foi diferente, parecendo acreditar que um mesmo problema pudesse ter resultados diferentes.

O sujeito 3 usou quatro minutos para solucionar o problema 1, tendo percebido que o problema 2 era uma variante do anterior, devido ao sinal trocado. Porém, cometeu o mesmo erro do sujeito 1, tendo trocado o sinal da parcela errada.

No problema 3, sobre o quadrado da diferença, o sujeito 1 estava, outra vez, aparentemente confuso quanto aos expoentes e, só depois de perceber seu erro, solucionou o problema, tendo necessitado de nove minutos. Quando a variante foi apresentada, esse sujeito não percebeu que bastava multiplicar o resultado obtido no problema 3 por $(2a^2b^2c^2 - 2x^2y^2z^2)$ e o resolveu novamente passo a passo, gastando 18 minutos. Somente quando já havia solucionado a variante e sido ajudado pelas questões do experimentador, chegou àquela conclusão.

O sujeito 2 gastou três minutos para solucionar o problema 3 e oito minutos para solucionar a variante. Não percebeu que o problema 4 era uma variante do problema anterior e quando viu os três parêntesis disse que não saberia resolver. Além disso, passou a usar uma denominação inexistente para os números inteiros ("número normal"):

S2: $(2a^2b^2c^2 - 2x^2y^2z^2)$ *vezes* $(2a^2b^2c^2 - 2x^2y^2z^2)$*. Ah esse daqui é normal, não é?*

E: O que é normal?

S2: Esse. Eu tô falando assim, não é de vírgula.

E: Ah, sim, não. Então, é um número inteiro, não é um número decimal.

[quando vê enunciados grandes, diz que é difícil, sem tentar antes solucionar]

S2: Ah, mas esse aqui é difícil.

E: Por quê?

S2: Oh, esses números está junto com 2, não tá? Ah, bom, então peraí, deixa eu ver se eu consigo fazer, 4 $a^4b^4c^4$ [multiplicando corretamente $2a^2b^2c^2$, por ele mesmo]

E: O que é que tem de difícil nisso?

S2: Ah, eu pensei, sei lá.

Já o sujeito 3 se assustou com o tamanho da parte literal no problema 3, mas resolveu-o com facilidade, gastando 2 minutos para chegar à solução:

S3: Nossa! Eu vou enrolar tudo, hein!

E: Então faz com cuidado.

S3: Fica 2, ... não 4 $a^4b^4c^4$.

E: Ótimo.

S3: Menos, ... mais 8... vai ser isso mesmo? Aí coloca ... não, tá errado... menos ... é mais ... 2 vezes 2 ... $4x^4y^4z^4$ + aí vai ser esse [$2a^2b^2c^2$] *vezes esse* [$2x^2y^2z^2$], *vezes 2 vai ficar 8 ... 8... mas aqui não tem termos semelhantes.*

E: Isso.

S3: Aí copia tudo?

E: Hum, hum.

S3: 8 $a^2b^2c^2x^2y^2z^2$.

E: Certo. Tem um erro aí. Onde é que ele está?

S3: Ah, aqui! No sinal.

Ao solucionar o problema 4, o sujeito 3 aparentou não perceber que já havia feito uma parte da solução no problema 3 e gastou 14 minutos para solucioná-lo. Ao terminar, indagou ao experimentador se não havia uma maneira mais simples de solucionar esse problema.

O problema 5 e sua variante não foram solucionados pelo sujeito 1, mesmo com explicações e o auxílio através das questões do experimentador. Esse sujeito aparentou grande dificuldade, tanto na interpretação do problema quanto nos passos posteriores, conforme pode ser observado nos trechos a seguir:

S1: [Lendo o problema] *Duas torneiras são conectadas numa piscina. A primeira enche a piscina em duas horas e a segunda enche a piscina em 3 horas. Em quanto tempo a piscina estará cheia se as duas torneiras estiverem abertas?*

S1: Em duas horas e meia.

S1 faz uma simples média aritmética do tempo gasto por cada torneira, não atentando para o fato de que duas horas e meia é superior ao tempo gasto pela primeira torneira sozinha encher a piscina.

S1: [Lendo a variante] *Duas torneiras são conectadas numa piscina. A primeira enche a piscina em duas horas e a segunda esvazia a piscina em 3 horas. Em quanto tempo a piscina estará cheia se as duas torneiras estiverem abertas, uma enchendo e a outra esvaziando?*

E: Entendeu o que está acontecendo? Fale para mim o que está acontecendo?

S1: Ah, uma ... uma enche em duas e a outra tira em três horas.

E: Então, você suspeita o que, sobre o número de horas necessárias para encher a piscina?

S1: Vai ser negativo.

E: Já viu tempo negativo?

.... [após algumas explicações...]

S1: Acho que vai ser 1,2, só que negativo.

E: Como é que a gente acha um tempo negativo?

S1: [risos] *Não, negativo não.*

O sujeito 1, aparentemente, mostrava uma rigidez de pensamento nesse problema. Como uma das torneiras enchia a piscina em duas horas e a outra esvaziava em três, ele associou que esvaziar era retirar, portanto precisava subtrair os tempos, obtendo dessa forma $2 - 3 = -1$, um tempo negativo e, mesmo depois de discutir e concluir que não existia tempo negativo, permanecia com essa primeira idéia fixa, que o impedia de solucionar o problema.

A interpretação do sujeito 2 sobre o problema 5 foi, aparentemente, feita ao acaso, tendo usado uma interpretação mais precipitada que a do sujeito 1, como ilustrado no trecho a seguir:

S2: Duas torneiras são conectadas numa piscina. A primeira enche a piscina em duas horas e a segunda enche a piscina em 3 horas. Em quanto tempo as duas juntas encherão a piscina vazia? 5 ?

E: Tem lógica isso que você falou? Uma torneira enche em quanto tempo?

S2: Duas horas.

E: A outra sozinha?

S2: 3.

E: E as duas juntas vão gastar mais tempo para encher?

S2: Ah ... é verdade.

O sujeito 3 também teve muita dificuldade na interpretação do problema 5, sendo que o experimentador praticamente solucionou o problema para ele, tantas foram as questões feitas para levá-lo à solução. Quando leu o problema 6, imediatamente reconheceu-o como um problema reverso do anterior e solucionou-o em três minutos, mais rápido do que o experimentador conseguiu entender, como se pode observar nos trechos a seguir:

[problema 5]

S3: Aí vai ficar 2-3 ... 3 -2?

E: Como é que você chegou a essa conclusão?

S3: Ah, não sei, tem que ver certo.

E: Então, como é que você vai resolver?

S3: Vai ficar 2/3?

E: 2/3? Por que 2/3?

S3: Não, 2/3 não. Vai ficar 2, ... não... tá complicado esse problema. Tem um x no meio, isso eu sei.... ah, eu não sei resolver esse problema.

Aparentemente S3 tenta solucionar usando um procedimento de tentativa e erro, primeiro tenta o procedimento idêntico ao do sujeito 1, cujo tempo dava negativo e, depois, experimenta dividir o tempo gasto pelas torneiras.

[problema 6]

S3: Duas torneiras são conectadas a uma piscina. A primeira enche a piscina em 2 horas e a segunda esvazia a piscina em 3 horas. Em quanto tempo a piscina estará cheia se as torneiras estiverem abertas, uma enchendo e a outra esvaziando? Então vai ficar y/2 + y/ ... [apaga] *- y/3, que é igual a y/t. Vai ficar 3y - 2y sobre 6, que é igual a y/t, que vai ser y/6 = y/t. 1y que vai ser 6y* [porque 6 vezes 1y] *igual a 1y vezes t, t é igual a 6y dividido por y, então t é igual a 6.*

E: Deixe eu ver de novo aí, por favor. (...) O que é que você fez?

S3: Eu peguei ... eu fiz igual esse [o problema anterior]

E: Ah tá, então.

A série XIV foi aplicada novamente após um mês, mas o sujeito 1 não percebeu que o segundo problema era uma variante do primeiro. Despendeu praticamente o mesmo tempo da vez anterior, isto é, nove minutos. De maneira semelhante à do mês anterior, o sujeito 2 não lembrou como multiplicava números decimais e nem percebeu que o problema 2 era uma variante do problema 1. Esse sujeito gastou um minuto para solucionar o primeiro problema e dois minutos para solucionar o segundo. O sujeito 3 mostrou um pouco de confusão no problema 1, percebeu que o problema 2 era uma variante do problema 1, solucionou-o de maneira rápida e corretamente, gastando dois minutos com o primeiro e 50 segundos para solucionar o problema 2.

Em cinco minutos o sujeito 1 solucionou o problema 3, sem usar processo resumido; cometeu erros ao lidar com os expoentes. Na variante, ele percebeu que poderia começar pelo resultado do problema anterior, entretanto teve algumas dúvidas. Gastou 11 minutos com a variante. O sujeito 2 despendeu um minuto com o problema 3 e seis minutos com a variante. Apenas percebeu que poderia aproveitar o resultado do problema anterior após efetuar a multiplicação do primeiro termo do primeiro parêntesis com o primeiro termo do segundo parêntesis, mas se esqueceu de uma parte da terceira parcela. No terceiro problema, o sujeito 3 errou um sinal e percebeu isto sozinho, tendo gasto um minuto para solucioná-lo. Para solucionar o quarto problema, esse sujeito não utilizou os resultados do problema anterior, tentou fazer direto, mas só encontrou duas parcelas corretamente, gastando 13 minutos para chegar à solução correta.

O sujeito 1 lembrou-se de que o tempo não poderia ser negativo no problema 5, fez uma estimativa bastante razoável de que o tempo seria de uma hora e meia (porém usando um raciocínio errado: dividiu o tempo que cada torneira gastava para encher a piscina, 3 : 2). Entretanto, só conseguiu resolver o problema após 11 minutos de "dicas" e direcionamentos do experimentador. Na variante, o problema 6, a sua interpretação foi visivelmente melhor, sendo que as maiores dificuldades foram relativas aos cálculos. Após oito minutos ele chegou à resposta correta. O trecho a seguir ilustra os procedimentos do sujeito 1 para solucionar a variante:

S1: ...... uma enche em duas horas e a outra esvazia em três?

E: Isso.

[decidiu pensar que na piscina cabiam cinco mil litros e calculou quanto cada torneira sozinha tirava/ colocava por hora]

S1: Uma enchendo [pensa um pouco] *eu posso pegar 2500 menos 1666 e o que sobra, é o que sobra um pouco na piscina, aí vai aos pouquinhos, até dar 2500.*

E: Até dar cinco mil.

S1: Ah é, até dar cinco mil, 2500 é a metade.

E: Perfeito. Esse é o raciocínio. Agora, vamos ver se você faz.

[quando colocou em prática seu plano de execução, os cálculos o atrapalharam. Ao invés de fazer 5000 divido pelo resto obtido que sobrava na piscina, ele foi fazendo pequenas multiplicações até chegar em 4170 litros e depois não conseguia prosseguir, necessitando de auxílio do experimentador. Quando terminou...]

E: Além de fazer desse jeito que você fez aqui, de ir multiplicando para chegar aos pouquinhos, que jeito que a gente podia ter feito direto, para não ter que ficar multiplicando aos pouquinhos? Você sabe que quer chegar nos cinco mil.

S1: É, é só dividir.

Já o sujeito 2 lembrou que havia visto o problema 5 e decidiu supor que a piscina tinha 2000 litros. Estimou bem, que 2000 dividido por 3 daria *uns 600,* tendo encontrado o resultado após 12 minutos. No sexto problema afirmou que o resultado iria dar alguns minutos. Decidiu fazer de maneira semelhante ao anterior, mas tinha noções muito ruins de proporcionalidade: *se em 3 horas tem 1032 litros, então em 4 horas vai ter 2000!* Após alguma dificuldade, encontrou o resultado, tendo despendido quatro minutos.

O sujeito 3 apenas se lembrou que já havia resolvido a Série XIV ao ler o problema 5, porém não sabia como resolvê-lo. Também não soube solucionar o problema 6.

Tabela 44:

Tempo gasto na solução dos problemas da Série XIV, durante a aplicação (A) e reaplicação (R)

Problema	S1 - A	S1 - R	S2 - A	S2 - R	S3 - A	S3 - R
P1	10': 00''	09': 00''	03': 00''	01': 00''	04': 00''	02': 00''
P2	09': 00''	09': 00''	02': 00''	02': 00''	05': 00''	00': 50''
P3	09': 00''	05': 00''	03': 00''	01': 00''	02': 00''	01': 00''
P4	18': 00''	11': 00''	08': 00''	06': 00''	14': 00''	13': 00''
P5	não conseguiu	11': 00''	não conseguiu	12': 00''	não conseguiu	não conseguiu
P6	não conseguiu	08': 00''	não conseguiu	04': 00''	03': 00''	não conseguiu
Tempo Total	46': 00''	53': 00''	16': 00''	26': 00''	28': 00''	16': 50''

A Tabela 44 mostra que houve uma diminuição no tempo de solução dos problemas da série XIV, durante a reaplicação. Além disso, os sujeitos 1 e 2, oriundos da sexta e sétima séries, respectivamente, que não haviam conseguido solucionar os problemas 5 e 6 na primeira aplicação, conseguiram fazê-lo na segunda aplicação, diferentemente do sujeito 3, oriundo da oitava série. Isto pode estar indicando, com certa probabilidade, uma influência mais da aprendizagem e da memória que de uma alta capacidade matemática dos sujeitos 1 e 2.

A série XV (anexo H) é composta por problemas algébricos, divididos em três partes, cada parte contendo um conjunto de problemas do mesmo tipo e um último problema, que apesar de pertencer ao mesmo tipo possui uma forma diferente. Isto é feito com o objetivo de investigar a facilidade com que o sujeito muda de um método de operação para outro e a facilidade com que ele reconstrói um sistema de operações, de acordo com as condições que foram alteradas no problema. O último problema de cada uma das partes era considerado por Krutetskii (1976) como sendo mais fácil que os resolvidos anteriormente pelos sujeitos. Entretanto os sujeitos de seu estudo gastaram mais tempo para resolvê-lo.

Tabela 45:

Tempo gasto na solução dos problemas da série XV (primeira parte)

Problema	S1	S2	S3
P1	01': 00''	00': 15''	00': 10''
P2	00': 35''	00': 04''	00': 05''
P3	00': 15''	00': 09''	00': 04''
P4	00': 15''	00': 08''	00': 05''
P5	00': 30''	00': 07''	00': 03''
P6	00':10''	00': 07''	00': 02''
P7	01': 10''	00': 40''	00': 06''
P8	00': 15''	00': 09''	00': 05''
P9	00': 15''	00': 06''	00': 03''
P10	00': 16''	00': 09''	00': 05''
P11	00': 10''	00': 10''	00': 03''
P12	00': 25''	00': 25''	00': 03''
Tempo total	05': 16''	02': 29''	00': 54''

O sujeito 1, aparentemente, gostava de ser desafiado, pois quando o experimentador solicitou-lhe que resolvesse os problemas o mais rápido que pudesse, pois estaria cronometrando o tempo, ele vibrou, queria verbalizar rapidamente a solução. Entretanto, nunca conferia o resultado que encontrava.

Como pode ser observado na Tabela 45, comparando o tempo gasto pelo sujeito 1 nos doze problemas da primeira parte, diferentemente do ocorrido com os sujeitos do experimento de Krutetskii (1976), os problemas onde o sujeito 1 encontrou maior dificuldade foram o primeiro e o sétimo. Ele se atrapalhou com os sinais e a forma de operá-los.

S2 também se entusiasmou com o fato de estar sendo cronometrado o tempo para solução de cada problema. Encontrou maior dificuldade no sétimo e no décimo segundo problemas, onde errou os sinais.

Da mesma forma que os outros dois sujeitos, S3 também gostou de ter seu tempo cronometrado, foi extremamente rápido e preciso na solução dos problemas da primeira parte. De acordo com ele, isso ocorreu porque já havia trabalhado em um mercadinho, fazendo trocos.

O tempo gasto pelo sujeito 3 é consideravelmente menor que o dos outros dois sujeitos e as suas respostas também eram precisas, evidenciando facilidade e rapidez em realizar cálculos mentais.

Nos dez problemas da segunda parte, o sujeito 1 teve maior dificuldade. De maneira errada, somava os expoentes quando juntava os termos semelhantes, além de não conferir o que fazia. Perguntava constantemente se estava solucionando os problemas de modo correto. Neste caso, observou-se concordância com os resultados obtidos por Krutetskii (1976), o último problema mostrou-se mais difícil para S1.

O sujeito 2 considerou o primeiro problema o mais difícil dessa série (segunda parte), sendo que a passagem para a linguagem algébrica só ocorreu após muitos questionamentos,

*S2: Dado **a** adicione 2 ...*

E: Como é que fica?

S2: 2a.

E: Não, aí você multiplicou por 2.

S2: Ah, a^2.

E: O que é adicionar?

S2: Mais?

A seguir o sujeito conseguiu montar a expressão, mas a solução do problema não fluía. O trecho a seguir ilustra um erro na multiplicação de dois monômios, quando o sujeito não multiplica os coeficientes, apenas a parte literal:

S2: 2a vezes 2a é igual a $2a^2$.

A partir daí, o sujeito não encontrou dificuldades para terminar o procedimento. A compreensão do que era para ser feito nos outros problemas apresentou uma melhora, quando se considera o decréscimo do tempo gasto para solucionar cada problema, como pode ser observado na Tabela 46. O sujeito 2 escrevia os passos do problema na forma resumida, como mostrado a seguir:

[problema 10]

S2: (...) $2y^2 + 4$ elevado a 2 [$(2y^2 + 4)^2$], *aí vai dar $4y^4$* [escreve] *mais 8y* [não escreve, pensa um pouco], *16 y mais 16* [escreve].

Na segunda parte o sujeito 3 encontrou mais dificuldade para solucionar os problemas 3, 1 e 10. O trecho a seguir evidenciou uma certa dificuldade em passar da linguagem natural para a linguagem algébrica no problema 1:

S3: Dado a, adicione o 2, multiplique por 2 e eleve o resultado ao quadrado.

E: Então você tem a.

S3: É. Vai ser a + a + a, não vai ser?

E: Adicione 2, quanto fica?

S3: 2a.

E: Não.

S3: a + 2.

A partir do problema 4, S3 passou a responder mais facilmente, como pode ser observado a seguir:

S3: Vai ficar $(y^2 + 2)$ *vezes 2. Vai ser* $2y^2 + 4$.

E: Isso.

S3: Elevado ao quadrado, vai ser $4y^4 + 16y^2 + 16$.

E: Perfeito.

As duas falas desse sujeito mostram a rapidez da resposta, evidenciando o automatismo, no qual a resposta é comandada pela abstração dos procedimentos de solução.

Tabela 46:

Tempo gasto na solução dos problemas da série XV (segunda parte)

Problema	S1	S2	S3
P1	03': 00''	03': 00''	01': 30''
P2	03': 40''	01': 00''	01': 25''
P3	03': 40''	01': 00''	02': 00''
P4	03': 20''	00': 45''	00': 40''
P5	01': 40''	00': 45''	00': 40''
P6	02': 20''	01': 00''	00': 25''
P7	03': 40''	01': 40''	00': 45''
P8	01': 10''	01': 00''	00': 25''
P9	02': 23''	01': 00''	00': 50''
P10	06': 00''	01': 00''	01': 30''
Tempo total	30': 43''	12': 10''	10': 10''

Nos problemas da segunda parte, o tempo de solução do sujeito 3 foi consideravelmente menor que o do sujeito 1, mas próximo do sujeito 2. Essa diferença, provavelmente, está associada à escolaridade dos sujeitos, visto que o sujeito 1 encontrava-se na sexta série e não parecia possuir o domínio do conceito e das operações com polinômios.

A terceira parte da série XV proposta por Krutetskii (1976) é composta de seis problemas. As dificuldades de S1 foram semelhantes às das duas partes anteriores, tendo errado em alguns expoentes e sinais. S1 ainda não havia trabalhado com monômios e polinômios na escola e a cada encontro esquecia o que tinha aprendido no anterior, confundindo os princípios que regem os procedimentos de multiplicação e adição de literais. A dificuldade de S1 para operar com literais pode ser observada no trecho a seguir:

[leu o problema: $(2mn + 2m)^2$...]

S1: 2mn mais 2m vezes 2mn mais 2m [escreveu $(2mn + 2m)(2mn+2m)$, pensa um pouco] *daria 2 ... eu colocaria o 2 em cima de cada ou um só?* [referindo-se aos expoentes: m^2n^2 ou m^2n, mn^2]

E: O que você acha que é mais razoável?

S1: É que nem esse daqui [referindo-se ao problema anterior], *em cima de cada.*

E: Isso.

S1: $2m^2n^2$ [não percebe que deveria ter multiplicado os coeficientes] *mais ... agora 2m com 2m dá* $4m^2$, *mais, 2mn vezes 2m ... 4m dois n* [escreve $4m^2n$], *assim?*

Já o sujeito 2 apresentou dificuldade maior nos três últimos problemas da terceira parte, equivocando-se nos sinais ou nos expoentes, demorando para perceber o erro.

O sujeito 3 encontrou maior dificuldade em solucionar o segundo e o quarto problemas da terceira parte, tendo inclusive gasto maior tempo nos mesmos, como pode ser observado na Tabela 47. O último problema foi considerado por esse sujeito como um dos mais fáceis. Após ler o enunciado, já produziu a resposta, como mostrado no trecho a seguir:

[problema 6]

S3: $(2a^3 - 3b)^2$, *vai ser* $4a^6 + 9b^4 - 12a^3b^2$.

Tabela 47:

Tempo gasto na solução dos problemas da série XV (terceira parte)

Problema	S1	S2	S3
P1	04': 30''	00': 40''	00': 35''
P2	01': 40''	00': 20''	01': 25''
P3	02': 00''	00': 30''	00': 20''
P4	02': 35''	03': 38''	00': 50''
P5	05': 20''	01': 40''	00': 35''
P6	06': 10''	01': 10''	00': 28''
Tempo total	22': 15''	07': 58''	04': 13''

Krutetskii (1976) relatou que, com os sujeitos de seu estudo, o tempo de solução do último problema em cada uma das três partes da série XV aumentou em média de 1/10 para os alunos matematicamente capazes, quase dobrou para os alunos medianamente capazes e quase quadruplicou para os alunos matematicamente incapazes. Segundo ele, a condição de solução sucessiva de problemas de um único tipo, criava um padrão de operação mental que era quebrado quando se apresentava o último problema de cada parte. (...) *Naturalmente o estereótipo estabelecido da operação inibiu a solução do último problema, embora ele não seja mais difícil que os seus antecessores.* (p. 281)

Dubrovina (1992) estabeleceu quatro níveis de flexibilidade de pensamento para problemas com diversos métodos de solução, entretanto nos relatos de Krutetskii (1976) não havia o estabelecimento de níveis de flexibilidade de pensamento. O pesquisador apenas citou que os alunos matematicamente capazes procuravam as soluções mais simples, econômicas e elegantes, mesmo quando não lhes era solicitado, que percebiam o que era essencial nos problemas e reconstruíam com relativa facilidade as operações mentais para solucionar problemas diferentes dos problemas de um determinado tipo apresentados.

Com base nos trabalhos de Krutetskii (1976) e Dubrovina (1992), e a partir da tradução desses níveis por pesquisadores do grupo de Psicologia da Educação Matemática da Faculdade de Educação da UNICAMP (Alves, 1999; Araújo, 1999), foram estabelecidos níveis de flexibilidade de pensamento. Todos os três sujeitos do presente estudo foram enquadrados no nível 1: *não vê mais do que um método de solução do problema, mesmo depois de considerável ajuda do experimentador*. O sujeito 3 apesar de ter apresentado tempos de solução menores nas séries X, XIII, XIV e XV, não foi enquadrado em um nível superior, pois provavelmente o fato estava mais relacionado ao seu conhecimento prévio, devido a sua escolaridade, que à sua capacidade matemática.

Para investigar a reversibilidade dos processos mentais, Krutetskii (1976) utilizou a série XVII (anexo I), composta de três partes, uma com problemas que necessitavam ser traduzidos para linguagem algébrica, outra com problemas de operações com literais e outra com um único problema de operações com literais para ser solucionado oralmente. Os problemas reversos dessa série foram aplicados um mês antes da aplicação da série completa.

Um encadeamento reverso de idéias não pode ser reduzido a associações inversas. Se a direção do pensamento inicialmente é de A a F, o inverso será de F a A. No entanto, isto ocorre sem que haja necessidade de todas as associações ocorrerem na forma inversa, isto é, ao reverter o pensamento, o sujeito pode percorrer um caminho diferente.

Segundo Krutetskii (1976), existiam bases para considerar que a transição de um encadeamento de idéias para o seu reverso fosse uma das manifestações do pensamento flexível. (p.287)

Os problemas 2, 4 e 6 eram os problemas reversos originais da primeira parte da série XVII, porém como o próprio experimentador teve muitas dificuldades em resolver o problema 4, foram preparados os problemas 1, 3 e 5, com as mesmas características dos problemas 2, 4 e 6, trocando-se apenas os dados literais por números.

O sujeito 1 não conseguiu resolver os problemas 3, 4 e 6, ou seja, da primeira parte da série original ele resolveu apenas o problema 2, gastando um minuto, porém com questões dirigidas e ao final questionou : *mas o que é, a vezes d?* Pergunta esta que pode estar indicando falta de compreensão do uso das letras como variáveis.

O trecho a seguir busca ilustrar o direcionamento do pensamento desse sujeito na solução do problema 3. Ele não conseguiu solucionar o problema.

[nesse trecho do protocolo, o experimentador havia sugerido que S1 representasse, com o auxílio de um desenho, a distância entre as duas cidades e os ônibus partindo, com os respectivos dados, conforme é mostrado a seguir, a partir da fala do experimentador buscando dirigir o sujeito para a solução]

E: Tá, então vejamos. Tinha 100 km de São Paulo a Campinas. Esse [ônibus] *andou 45 e o outro teve que andar quanto?*

S1: Tem que andar x, não, x não ... 55!

E: Então, o outro teve que andar 55. Esse andou 45 [km] *e veio a 90 km/h e esse que andou 55* [km], *teve de vir, então, a que velocidade ?*

S1: A 100!

E: A ...

S1: 100 por hora.

E: Como você achou o 100?

S1: [Mostrando o desenho] *Porque se um tá vindo a 90 e ele parou aqui, o outro tem que vir a 100 pra parar um pouco mais perto.*

E: [Parecia que tinha lógica, o outro andou mais, logo a velocidade deveria ser maior, e ele só não sabia quanto maior deveria ser, mas para confirmar o pensamento ...] *Tá, mas como você achou o 100? Por que você falou 100?*

S1: Porque é a distância de Campinas a São Paulo. Eu peguei daqui ó [apontou o enunciado, deixando clara sua confusão entre velocidade e distância].

O sujeito 2 conseguiu solucionar, com alguma ajuda do experimentador, os problemas 1, 2, 3 e 5, gastando para isso 30'', 3', 4' e 4' respectivamente. Os problemas 4 e 6 (originais da série) não foram solucionados. O trecho a seguir ilustra a dificuldade que S2 teve para generalizar o problema 2, mesmo tendo solucionado o problema 1 com muita facilidade,

S2: Quanto uma empregada doméstica recebe em 10 dias, se ela ganha 50 em um dia de trabalho? 500?

E: Como você fez?

S2: 10 vezes 50.

E: Ótimo. O próximo.

S2: Quanto que um trabalhador ganha em [d] *dias se ele ganha **a** reais em um dia de trabalho? **a** reais? **a** é 1 real?*

*E: **a** é uma quantidade, quantidade qualquer.*

*S2: Ah. O que é **d** dias? Dois?*

*E: **d** é uma quantidade qualquer de dias.*

O trecho anterior ilustrou que o sujeito 2 não demonstrou familiaridade com tarefas que envolviam o uso de letras como variáveis, apesar de já ter sido ensinado em classe a solucionar equações do 1° grau, o que parece indicar prevalência do uso de letras como incógnitas. O trecho a seguir reafirma esse fato:

S2: Hum. Aí eu faço o que eu quero? Quantos eu quero?

E: Não, você vai fazer com a e com d mesmo.

S2: Eu vou ter que colocar ... feito aquele negócio, x e y?

E: Tá, então, quem é o que no problema?

S2: O d é o dia.

E: Hum, hum.

S2: E o a é o reais.

E: Isso. E o que é que você faz com os dias e a quantidade de dinheiro?

S2: Vou ter que achar os dois.

E: Não vai ter que achar.

S2: Vou ter que inventar?

No problema 5, apesar de várias tentativas, o sujeito 2 não conseguia chegar, sem ajuda, à solução do problema, e aparentemente não havia entendido a pergunta do problema. [Problema 5: Uma fábrica de autopeças, para atender um pedido, planejou fazer 120 peças em um certo período e planejou para isso, fazer 12 peças por dia. Mas os funcionários excederam esta quota e fizeram 3 peças a mais por dia. Quantos dias antes do prazo final eles vão terminar o pedido?]

Primeiro S2 perguntou o que significava quota. O experimentador explicou que, no problema, quota era uma quantidade determinada de peças.

...

S2: Calma aí, são 10 dias [fez 120 dividido por 12], *mas os funcionários excederam essa quota e fizeram 3 peças a mais por dia ...*

E: Então, quantas peças eles fizeram por dia?

S2: 15?

E: Hum.

S2: Quantos dias, antes do prazo final, eles vão terminar?

E: Se eles fizeram 15 peças por dia, quanto tempo eles gastaram?

S2: 15 [peças]*? 10* [dias].

E: Ah, é? Se eles fazem 12 [peças] *por dia, eles gastam 10 dias. Se eles fazem 15 por dia, eles também gastam 10 dias?*

S2: Calma aí. 120, o que você acha de fazer assim? 15 ... 5 [dias]*?*

E: 15 vezes 5 dá quanto?

S2: Não. Calma aí. [vai multiplicando mentalmente 15 por 2, 3 ... e elaborando a estimativa] *30, 45, 60, ... 8.*

E: Hum, hum.

S2: Então em 8 dias eles fizeram.

E: Hum, hum.

S2: Quantos dias antes do prazo? 2 dias.

O sujeito 3 também encontrou dificuldades para solucionar os problemas, precisando de questões dirigidas, não tendo solucionado os problemas 4 e 6.

Não foi criado nenhum problema adicional para a segunda parte da série XVII. Para solucionar os dez problemas reversos, o sujeito 1 gastou respectivamente 6', 4', 4', 1', 3', 2', 1', 1', 4'e 2'. Apesar da grande dificuldade encontrada para solucionar esses problemas, S1 não se mostrou cansado ou aborrecido, fez confusão com os sinais e não tinha claro o conceito de raiz quadrada.

No problema $16x^2 - 4xy^2 + \frac{1}{4} y^4 =$ quando vai encontrar as raízes de $16x^2$ e $\frac{1}{4} y^4$, depois do experimentador explicar como extrair a raiz quadrada de literais, o sujeito não consegue calcular a raiz quadrada do monômio:

S1: $16x^2$ daria 8x?

E: 8x, faça o contrário distribua o 8x e veja quanto dá.

S1: Ah, é. Então daria 4x, porque é vezes.

....

S1: $\frac{1}{4} y^4$. Seria aqui $\frac{1}{2} y^2$?

E: Por quê?

S1: Porque metade de ¼ não é ½ ?

Aqui, aparentemente o sujeito utilizou o termo "metade" querendo dizer "raiz quadrada", pois essa denominação inadequada aparece em outros trechos do protocolo, como nos problemas 7a e 8a:

S1: $9x^4$, a metade ... $3x^2$

E: Não é metade, em todos, o que estamos procurando? Não é a metade ...

S1: Ah, eu sei, eu peguei, multiplicando que dá 9.

Essa denominação imprópria parecia ser um vício de linguagem, pois por mais que o experimentador insistisse em discutir, ela aparecia novamente:

S1: $^1/_{25}\, m^4$ menos $4n^2m^6$ [pensou um pouco] *metade de $^1/_{25}$ avos?*

O último problema da série (terceira parte), que deveria ser resolvido oralmente, não foi solucionado por S1, mesmo escrevendo, com todas as dicas e encaminhamentos dados pelo experimentador.

Os três primeiros problemas reversos da segunda parte da série foram solucionados por S2 com bastante dificuldade. O quinto problema ele não conseguiu solucionar, apesar da ajuda do experimentador. Para solucionar os dez problemas foram gastos 4', 3', 2', 1', não fez, 1', 1', 2', 2' e 1'. O trecho a seguir ilustra o momento em que o sujeito 2 solucionou o problema 3a:

S2: (...) $16\,x^2 - 4xy^2 + \frac{1}{4}\,y^4$, aqui é 4x ...

E: Fale mais, então o $16x^2$ veio de ...

S2: 4x. E + ¼ , [veio] *de ½ + ½ .*

E: ½ vezes ½ .

S2: ½ vezes ½ , *aqui é sinal de menos, não é ?*

E: Hum, hum.

S2: Pode colocar direto [queria colocar (4x - ½), sem pôr os dois parêntesis com os mesmos termos, como vinha fazendo até então], *não pode?*

E: Pode, só que você não esqueceu de ninguém?

S2: Ichi... ai, qual?... Do y^2?

E: Isso, então a resposta ficou ...

S2: $(4x - \frac{1}{2}\,y^2)$, elevado a dois [$(4x- \frac{1}{2}\,y^2)^2$].

E: Certo!

O sujeito 2 confundiu a soma com a multiplicação de frações em todos os problemas em que apareciam frações. Esse erro pode ser verificado no trecho do protocolo referente ao problema 8a, que se segue:

S2: $^{1}/_{25}\, m^4 - 4n^2m^6$, vai ficar ... eu não sei como vai ficar esse negócio aqui não. Tem que ver o que vezes o que vai dar isso aqui né? ... 75?

E: 75 vezes 75 dá $^{1}/_{25}$?

S2: Não ... não tem? 7 ... Onze e meio?

E: 11, 5?! Por que 11,5?

S2: 11, 5 deu 25

E: 11, 5 vezes 11, 5 dá 121 ... 125 ... por aí.

S2: É vezes, eu tô pensando que é mais com mais. Ah, aqui não dá [para fazer dar] $^{1}/_{25}$ *não!*

Com relação ao último problema (terceira parte), o sujeito 2 não conseguiu solucionar oralmente, tendo necessitado de questões dirigidas do experimentador. Escrevendo e comparando, conseguiu chegar à solução em seis minutos.

Com os problemas da segunda parte, o sujeito 3 gastou 10'', 25'', 70'', 35'', 100'', 120'' (com muita ajuda), 35'', 35'', 30'' e 70''. Ele não conseguiu verbalizar os procedimentos de solução do último problema da série (terceira parte), mas com questões feitas pelo experimentador, solucionou-o em dois minutos.

Os problemas reversos da série XVII (anexo I) foram reaplicados seguidos dos problemas diretos, após o período de um mês da primeira aplicação. O experimentador preparou apenas um problema de familiarização (variante do problema direto) para o último problema direto. Todos os três sujeitos apresentaram dificuldades para solucionar os problemas da primeira parte. Nenhum dos problemas diretos (originais da série) foi solucionado e a variante do problema foi solucionada com bastante dificuldade. S2 reconheceu o reverso da variante do problema direto como sendo *o contrário* do problema anterior. Eles se lembravam de já terem solucionado os problemas reversos, como pode ser observado pelo trecho do protocolo do sujeito 3:

S3: A distância entre Campinas e São Paulo é 100 km, Dois ônibus partiram. Um da rodoviária de Campinas e o outro da rodoviária do Tietê, um [em] *direção ao outro. Se a velocidade de um é 90 km/h e eles se encontram depois de 30 minutos, qual a velocidade do ônibus? Eu já fiz tudo esses problemas, né?*

Em alguns problemas, S3 encaminhava a solução praticamente apenas oralmente, como nos trechos que se seguem,

S3: Uma fábrica de autopeças, para atender um pedido, planejou fazer 120 peças em um certo período. E planejou para isso fazer 12 peças por dia. Mas os funcionários excederam essa quota e fizeram 3 peças a mais por dia. Quantos dias [antes] *do prazo final eles vão terminar o pedido? Eu sei a resposta, mas esqueci como é que faz. Vamos ver. Se em 120 dias, 120 peças, não tá falando os dias, né?. Cadê? Aí tem que falar os dias que ele faz, né, 12 peças/dia pra chegar em 120, tem que ser 10 dias.*

E: Então planejou fazer em 10 dias.

S3: Aí ele fez 12 peças por dia, 3 a mais. Então vai ter que ser 15 peças por dia, 15 ... 120 dividido por 15, vai dar 8, eu lembro da resposta. Ele planejou fazer em 10 dias. (...) Deixa eu colocar no papel. E conseguiu fazer, conseguiu fazer em 8 dias. Em quantos dias antes do prazo final eles vão terminar o pedido? Em 8, em 2 dias.

[problema 9].

S3: Uma fábrica de autopeças para atender um pedido planejou fazer 1600 peças em 10 dias. Porém eles fizeram k peças a mais, terminando o serviço dois dias antes do prazo final. Quantas peças a mais por dia os funcionários fizeram? Eles fizeram em 10 dias, é 1600 dividido por 10 para saber quantos dias.

E: Quantas peças.

S3: Pra saber quantas peças por dia! Então vai ser 160.

E: Eles estavam planejando fazer 160 por dia?

S3: É, porém eles fizeram k peças a mais, terminando o serviço dois dias antes. Então vai ter que ser 1600 dividido por 8? Aí vai dar ... dividido por 8, 200.

E: E o que está perguntando?

S3: Quantas peças a mais por dia os funcionários fizeram? 40 peças a mais.

E: Ótimo!

Tanto nos dez problemas diretos como em seus dez reversos da segunda parte da série XVII, os sujeitos confundiram sinais e erraram na multiplicação. S2 nos problemas 7 e 8 não percebeu que duas das parcelas se cancelavam e não conseguiu resolver os problemas 1a e 3. S3 também mostrou dificuldade com as frações no problema 3, precisou de bastante ajuda com o problema 5 e 10a, tendo confundido os sinais no problema 9a, além de não ter feito nenhum dos problemas usando a fórmula. A seguir, alguns trechos que evidenciam a tentativa de auxiliar o procedimento do sujeito 3 nos problemas:

S3: $(a - x + y)^2$ dá $a^2 - 3x$, isso? Não, 3x ... não, não é.

E: Tem 3 juntos, não é? Como é que você vai separar para conseguir fazer?

S3: É, aqui dentro, como é que eu vou separar?

E: Você pode pôr mais um parentesinho para você considerar como se fosse ...

S3: Então eu posso colocar aqui assim no a?[escreve $((a) - x+y)^2$]

O procedimento esperado era separar de maneira a ficar com dois termos, **a** e **(y - x)**, ou **(a - x)** e **y** , entretanto o sujeito 3 não conseguiu perceber essa possibilidade sozinho:

E: Vai ficar como?

S3: Vai ficar $-x^2$ + ...

E: Ah não, né, a^2 ...

S3: a^2, isso $-x^2$ ...

E: Não, x e y você vai considerar como se eles estivessem juntos.

S3: Ah, os dois juntos?

Nos problemas reversos, que haviam sido apresentados há um mês atrás, e que não possuíam coeficientes fracionários, o sujeito não apresentou problemas para dar a solução:

[problema 3a]

S3: Vai ser $16x^2 - 4xy + \frac{1}{4}y^4$. Então vai ser $(4x - \frac{1}{2}y^2)^2$?

E: Isso.

[problema 7a]

S3: $9x^4 - 4y^2$, aí vai dar $(3x^2 - 2y)(3x^2 + 2y)$?

[quando a fração aparece no problema 9a, o sujeito 3 mostra dificuldade]

S3: $(-0{,}25y^2 + {}^1/_9x^2)$ vai dar, vai ser zero, não, $- 0{,}5y + {}^1/_9$? não, ${}^1/_3$?

E: Isso.

S3: Vezes $0{,}5y - {}^1/_3x$? Isso?

E: Não.

S3: Tem um sinalzinho errado?

E: Exatamente.

O sujeito 3 não conseguiu solucionar o problema da terceira parte oralmente. Lembrava mais ou menos a resposta (achava que era a + b) e após alguns questionamentos do experimentador, lembrou que era a – b, mas não apresentou uma justificativa adequada para a solução do problema.

O trabalho de Krutetskii (1976) comparou o nível de habilidade, dos alunos matematicamente capazes, dos medianamente capazes e dos incapazes para reconstruir com precisão a direção dos processos mentais, ao transferir o pensamento de um encadeamento de idéias diretas para o seu reverso, estabelecer ligações reversas e uma rede de ligações.

Enquanto no estudo de Krutetskii (1976) os sujeitos matematicamente capazes solucionaram os problemas reversos sem nenhuma dificuldade ou instrução especial, reconhecendo sempre os problemas reversos como opostos daqueles recentemente solucionados, 60% dos alunos medianamente capazes reconheceram os problemas reversos, mas sem apresentar muita confiança, enquanto os alunos matematicamente incapazes só reconheceram o segundo problema como reverso do primeiro nos casos mais simples.

Outra diferença observada por Krutetskii (1976) foi que, para os estudantes capazes, o primeiro problema não causou nenhuma interferência ou influência inibidora sobre a solução dos problemas reversos, sendo que, em metade dos casos, quando o problema reverso foi apresentado seguido de seu problema direto, ele foi mais fácil e rapidamente resolvido. Entretanto, para os alunos medianamente capazes e os incapazes o primeiro problema teve uma influência inibidora na solução dos problemas reversos. Esses alunos solucionaram os problemas reversos melhor e com mais confiança quando eles não foram apresentados de forma consecutiva a seus problemas diretos.

Krutetskii (1976) observou ainda que, para os alunos medianamente capazes estabelecerem ligações reversas, foram necessários exercícios específicos e um tempo separado para a formação das conexões e dos procedimentos nos problemas diretos e, depois, para a formação de ligações reversas.

A descrição das soluções dadas pelos três sujeitos parece evidenciar que todos se encontravam no nível 2, quanto à habilidade de reverter os processos mentais, pois esses sujeitos *resolviam os problemas reversos somente com questões dirigidas do experimentador*.

A compreensão, o raciocínio e a lógica foram os objetos de estudo das séries XVIII (anexo J) e XXI (anexo K).

A série XVIII (anexo J) é composta de seis problemas sobre o produto da soma pela diferença de dois termos, seis problemas sobre o quadrado da soma de dois termos e seis problemas sobre o cubo da soma de dois termos. Após cada grupo de seis problemas esperava-se que os examinados deduzissem a fórmula para esses casos. Se esse fato não ocorria, o experimentador dava sugestões, pistas e encaminhamentos e solicitava, em seguida, que o sujeito resolvesse novamente o grupo de problemas, anotando quantos exemplos foram necessários para que o sujeito deduzisse a fórmula.

Como o sujeito 1 não estava familiarizado com as regras de multiplicação e adição de literais, o experimentador tentou apresentar alguns conceitos e princípios necessários para solucionar os problemas dessa série. Com alguma dificuldade, principalmente na adição e multiplicação de frações, e sempre necessitando de confirmação sobre se estava procedendo corretamente, S1 solucionou o primeiro grupo de problemas, sem perceber semelhanças nas respostas e nos problemas. O experimentador começou a questioná-lo e pediu que resolvesse novamente o grupo (primeira parte da série). Após S1 resolver o primeiro problema novamente, com extrema falta de vontade e irritação, o experimentador decidiu não insistir. O trecho a seguir mostra como S1 se comportava.

[quando o experimentador estava explicando os conceitos básicos de como operar com literais, após ter explicado o que era coeficiente e expoente]

E: Então quanto dá $4b^2$ vezes $3a$?

S1: Quatro b dois, três a [$4b^2 3a$].

E: Não, né? Quais são os coeficientes? Qual é o coeficiente de $4b^2$?

S1: 4.

E: E do 3a?

S1: 3.

E: E o que a gente faz com os coeficientes?

S1: Vai na frente.

E: Tá. Só que os dois coeficientes estão fazendo que conta?

S1: De ... vezes.

E: Ótimo, então vai ficar quanto?

S1: Quatro três a b [4 3 ab]*?*

E: Você quer dizer 4 vezes 3?

S1: Hã ?

E: Você não disse que a conta é de vezes, então os coeficientes estão se multiplicando: 4 vezes 3. E daí daria quanto?

S1: 12 ... 12, eu colocaria ab^2*?*

Já o sujeito 2, para a primeira parte da série, aparentemente começou a perceber que havia dois termos iguais, com sinais trocados a partir do problema 4, mas continuou fazendo os problemas 5 e 6 usando todas as passagens e apenas posteriormente apagando os dois termos, demonstrando insegurança

E: Então, você não conseguiria fazer direto sem fazer todos os passos, para esse outro [problema 5], *por exemplo?*

S2: Esse?

E: Hum, hum

S2: Ai, acho que não. Por causa, sei lá ... direto, você acha?

S2 necessitou de mais dois problemas semelhantes[9] para conseguir solucionar o problema usando a fórmula, tendo, após esses dois problemas, conseguido generalizar o método de solução para problemas do tipo (a + b)(a – b):

E: Coloque $x^2 + 3a$ *num parêntesis e* $x^2 - 3a$ *em outro parêntesis? Quanto que daria direto, vamos ver se você percebeu, quem com quem você pega?*

S2: O primeiro [termo] *com o primeiro, o segundo com o segundo.*

E: Isso. E quanto dá fazendo assim?

S2: Então vai dar ... x^4

E: Isto.

S2: E menos 3... não! - $9a^2$ [escreve $x^4 - 9a^2$].

O sujeito 3 começou a solucionar os problemas escrevendo que **a** vezes **a** era igual a **2a**. Quando questionado se esta era a resposta correta, afirmou que fora ensinado assim.

[9] Problema 7: (2a + b)(2a -b) e Problema 8: $(x^2 - 3a)(x^2 + 3a)$

Perguntado quanto era **a** mais **a**, o sujeito respondeu, corretamente, **2a**, e disse que **a** vezes **a** era $\mathbf{a}^2$.

S3 resolveu os problemas corretamente, utilizando a propriedade distributiva, usando porém todos os passos do problema. No problema 4 confundiu as regras de adição e multiplicação de literais. Quando indagado sobre a existência de semelhanças entre o problema que ele estava solucionando e aqueles que já havia solucionado, ele respondia *todos têm letras*. Isso evidenciou que S3 estava respondendo sob a influência do imediatamente perceptível no problema (as letras presentes no enunciado). Não ultrapassando essa fase, não conseguia perceber que os problemas possuíam estruturas matemáticas de um mesmo tipo. Esse sujeito necessitou de sete problemas para conseguir solucionar problemas do tipo (a + b)(a – b) usando a fórmula.

S1 começou a solucionar o segundo grupo de problemas utilizando a propriedade distributiva. Quando não estava obtendo sucesso, aparentava irritação. Nesse grupo de problemas também foram usadas questões dirigidas. O sujeito deveria observar os seis problemas do grupo e analisar se havia alguma regra ou fórmula que pudesse ser extraída a partir dos resultados. S1 necessitou de nove exemplos (seis da primeira etapa e três da segunda) e descobriu que, após aplicar a propriedade distributiva, dois termos eram iguais, em todos os problemas, mas em nenhuma vez, depois que descobriu isso, fez diretamente a soma desses termos.

No grupo de problemas da segunda parte, S2 discriminou rapidamente que poderia colocar dois parêntesis e aplicar a propriedade distributiva; porém manifestava a intenção de cancelar os termos, como vinha procedendo com os problemas constantes na primeira parte dessa série. Aparentou certa dificuldade nas operações com frações, atribuindo a dificuldade à falta de aprendizagem anterior do conceito:

S2: Nossa ½ vezes ½ ? Eu não aprendi isso não.

S2 conseguiu generalizar a solução de problemas do tipo $(a + b)^2$, após ter solucionado nove problemas. Nesse caso, foram introduzidos outros três problemas[10].

[após o experimentador explicar e fazer alguns exemplos de soma, subtração e multiplicação de frações, S2 continuava falando uma coisa e escrevendo outra, no problema 5a: $(^1/_2\,x + {}^1/_3 y)^2$]

S2: ½ mais ½ é igual a ¼ [deveria ter dito vezes, ao invés de mais], *né? ½ mais $^1/_3$ ...*

E: ¼ só?

[10] Problema 7a: $(a + 1)^2$ e Problema 8a: $(2a + b)^2$ e Problema 9a: $(2x + y)^2$

S2: É x^2, mais com mais, +1, ½ com $^1/_3$, aonde é que está? $^1/_3$ vezes ½ vai dar 6 ... é, $^1/_6xy$.

E: Hum.

S2: Agora 1 ... ai, de novo, calma aí. $^1/_6$ mais $^1/_6$ [deveria ter dito vezes]*? Aqui vai dar 1/12,* [não somou, nem multiplicou corretamente] *né?*

Aparentemente percebendo que ocorria sempre a soma de dois termos iguais, o sujeito 2 não abreviava os procedimentos de solução, apenas calculava mentalmente e escrevia o resultado, como pode ser observado a seguir,

E: (...) e se fosse $(2a + b)^2$?

S2: Deixa eu fazer aqui. Fazer esse [2a vezes 2a], *ia dar $4a^2$* [escreve].

E: Hum.

S2: Esse [b vezes b], *ia dar $1b^2$* [escreve]

E: Hum.

S2: Depois esse com esse [2a vezes b], *vai dar 2b, não. 2ab* [não escreve nada]

E: Hum.

S2: Certo? Vai dar 4ab [escreve apenas a soma final].

No segundo grupo de problemas, da mesma forma que o sujeito 2, o sujeito 3 também reconheceu que o expoente dois indicava que o parêntesis se repetia duas vezes e quis aplicar a fórmula anterior, sem se ater à diferença desse grupo de problemas, o que indica que estava havendo uma transferência negativa dos procedimentos de solução dos problemas do primeiro grupo para os procedimentos de solução dos problemas desse segundo grupo. Quando o experimentador solicitou ao sujeito 3 que verificasse se os termos se cancelavam, o sujeito observou que não se cancelavam e escreveu $ab + ab = a^2b^2$, evidenciando sua confusão em operar com literais. No problema 5a, o sujeito escreveu que $^1/_6 + {}^1/_6 = {}^2/_{12}$, o que evidenciou que desconhecia os procedimentos para operar com frações, tendo necessitado de dez problemas para conseguir solucionar os problemas desse grupo usando a fórmula do quadrado da soma.

No terceiro grupo de problemas, o sujeito 1 aparentava não conseguir usar processos resumidos de solução e, após o terceiro problema, conseguiu discriminar o uso dos expoentes e dos coeficientes nas adições e nas multiplicações. Terminou os problemas demonstrando grande fadiga e não discriminou elementos comuns a eles, o que indicou a ausência de transferência.

S2 não conseguiu generalizar a solução para problemas do tipo $(a + b)^3$, mesmo após questões dirigidas do experimentador:

E: Se você olhar essa resposta aqui e essa outra resposta aqui, você percebe alguma coisa semelhante?

S2: 1, 2 ... só ficam 4 números ... é ...

E: Sempre ficam 4 parcelas.

S2: Ahn.

E: O que mais?

S2: Quando chega nesse [apontando uma das parcelas], *não...*

E: Aqui é a resposta final de um. Aqui é a resposta final do outro. Elas tem alguma coisa de semelhante? A resposta de 1b e 2b, além de ter 4 parcelas cada uma? Não vê?

S2: Que todos são positivos?

E: É, todos são positivos, mas por que não tem nenhum negativo aí?

S2: Porque no começo [no enunciado] *não tinha nenhum negativo.*

E: Exatamente. Com relação aos expoentes, você percebe alguma coisa de igual?

S2: Ah, não sei. Nada de interessante.

Para solucionar esse grupo de problemas o sujeito 3 escrevia os três parêntesis e, em geral, utilizou corretamente a fórmula do quadrado da soma para solucionar os dois primeiros parêntesis, mas cometeu alguns erros isolados quando multiplicava os termos dessa solução com os termos do último parêntesis. S3 apresentou dificuldade para aplicar a fórmula do quadrado da soma. No problema 5b, que continha coeficientes fracionários, ao invés de fazer 2 vezes ½ vezes $^1/_3$, fez ½ mais $^1/_3$ e multiplicou o resultado por 2. Foi solicitado a ele que observasse como havia solucionado os problemas anteriores e, após algumas questões do experimentador, S3 concluiu que deveria multiplicar e não somar como fizera. Conseguiu solucionar problemas relativos ao cubo da soma, usando a fórmula, apenas quando os expoentes dos monômios eram iguais a 1.

Dessa forma, observou-se que os sujeitos tiveram dificuldades para transferir os procedimentos de solução, mesmo com ajuda do experimentador. S2 demonstrou uma leve inclinação pela clareza, quando apagava a parcela ou falava as parcelas e registrava no papel apenas a resposta final.

Segundo Krutetskii (1976) é importante que os matemáticos possuam habilidade para avaliar criticamente cada elo do procedimento, de acordo com princípios, já aprendidos, da lógica e da Matemática. Devem ser capazes, também, de encontrar um erro em procedimentos que, à primeira vista, parecem irretocáveis.

A série XXI (anexo K) foi elaborada para evidenciar esse componente da habilidade matemática. O examinador apresenta a solução de dois problemas contendo um procedimento incorreto, mas bem disfarçado, em uma das passagens. Era solicitado ao sujeito que encontrasse o erro contido no procedimento e explicasse por que estava errado.

S1 leu atentamente o primeiro problema, achou que o erro estava em um cancelamento de literais $(7 - x = 13 - x)$. Para ele o **x** não podia ser cancelado, porque estava acompanhando os outros números. Quando o experimentador lhe explicou que o cancelamento era possível, disse que, então, para ele, não havia erro nenhum, tudo estava certo.

No segundo problema S1 localizou acidentalmente o sofisma, tendo manifestado estranheza ao constatar que o expoente 2 tivesse desaparecido. Quando informado de que, na verdade, fora extraída a raiz quadrada dos dois lados, aceitou, sem observar que o erro era exatamente esse - não considerar a raiz positiva e a raiz negativa.

Da mesma forma, S2 foi informado de que havia um erro no procedimento dos dois problemas e ele deveria apontá-lo. S2 afirmava que, em cada uma das passagens havia erros; porém, quando indagado sobre qual era o erro da passagem, não conseguia explicar.

S3 localizou o primeiro sofisma em um minuto, entretanto não conseguiu localizar o segundo. Da mesma forma que S1, achou estranha a passagem da raiz quadrada, mas as respostas ao interrogatório que o experimentador lhe fez evidenciaram que ele não tinha conhecimento das propriedades de radiciação, conforme pode ser observado no trecho a seguir:

E: Qual é a raiz quadrada de 4?

S3: 2.

E: Qual é a raiz quadrada de $(x - 2a)^2$*?*

S3: $x - 2a$*?*

E: Isso. Então ele tirou a raiz quadrada dos dois lados. Quando tira a raiz quadrada dos dois lados é só isso mesmo?

S3: Dos dois lados?

E: Quanto é a raiz quadrada de 16?

S3: 4.

E: Só o 4? Tem algum outro número que elevado ao quadrado dá 16, além do +4?

S3: Que eu saiba não.

E: E o $(-4)^2$, dá quanto?

S3: Ah, dá + 16.

Os problemas dessa série revelaram-se difíceis para os três sujeitos. Como o próprio Krutetskii (1976) relatou, o sujeito identifica os sofismas a partir dos princípios lógicos e matemáticos que ele já conhece, o que não era o caso de S1, que mal havia aprendido a operar com literais e a extrair raiz quadrada, e nem de S2 e S3, que já deveriam ter tido contato com esses conteúdos, na escola, mas não conseguiram completar a tarefa.

Desse modo, com relação aos componentes relativos à compreensão, ao raciocínio e à lógica, os três sujeitos foram categorizados no nível 1, porque *não utilizaram processos resumidos de pensamento, mesmo depois de uma série de problemas de um determinado tipo..*

Assim, a partir da análise dos protocolos, por seu desempenho durante a solução dos problemas das séries relativas aos seguintes componentes da habilidade matemática: generalização, flexibilidade de pensamento, reversibilidade dos processos mentais, compreensão, raciocínio e lógica, presentes no estágio do processamento da informação matemática, os sujeitos ficaram assim classificados:

Tabela 48:

Classificação dos sujeitos no estágio do processamento da informação matemática

componente da habilidade	Nível	Descrição	Sujeito
	1	não generaliza o material por si próprio a partir das características essenciais, mesmo depois de muitos problemas de um determinado tipo e ajuda considerável do experimentador.	S1, S2
generalização	2	generaliza depois de muitos problemas de um determinado tipo e ajuda considerável do experimentador, mas com erros isolados.	S3
	3	generaliza independentemente, mas cometendo erros insignificantes.	
	4	generaliza independentemente.	
	1	não vê mais do que um método de solução do problema, mesmo depois de considerável ajuda do experimentador.	S1,S2,S3
flexibilidade de pensamento	2	não vê mais do que um método de solução do problema mas, com muita ajuda do experimentador, consegue solucionar o problema usando outro método.	
	3	com alguma ajuda do experimentador, consegue solucionar o problema usando um outro método.	
	4	consegue solucionar o problema usando um outro método, independentemente.	
	1	não resolve os problemas reversos, mesmo com ajuda do experimentador.	
Reversibilidade de pensamento	2	resolve os problemas reversos, somente com questões dirigidas do experimentador.	S1,S2, S3
	3	resolve os problemas reversos como se fossem um problema completamente novo, sem conexão com o problema direto anterior.	
	4	percebe que o problema é reverso do problema direto anterior e o resolve independentemente.	
	1	não utiliza processos resumidos de pensamento, mesmo depois de uma série de problemas de um determinado tipo.	S1,S2, S3
compreensão, raciocínio e lógica	2	utiliza processos resumidos de pensamento, depois de fazer uma série de problemas de um determinado tipo e cometendo alguns erros.	
	3	utiliza processos resumidos de pensamento, depois de fazer uma série de problemas de um determinado tipo e cometendo erros insignificantes.	
	4	utiliza processos resumidos de pensamento.	

Com a finalidade de verificar a habilidade para reter a informação matemática foi aplicada a série XXII (anexo L), que busca evidenciar a memória matemática dos sujeitos.

Nessa série, o experimentador apresentava um problema de cada vez e, após sua leitura pelo sujeito, perguntava do que tratava o problema, registrando o que o sujeito lembrava: estrutura, relação ou um dado específico.

S1 demonstrou mais facilidade para recordar os dados numéricos. No primeiro problema, por exemplo, demonstrou reconhecê-lo na íntegra. No quarto problema, lembrou de alguns dados mas a relação que propunha entre eles era confusa. Do último problema, S1 teve dificuldade de recordar até qual era a pergunta do problema, como mostrado a seguir:

[problema 1]

S1: Calcule de cabeça: $64 \times 27 + 27 \times 27 + 9 \times 27$.

E: [retira o problema] *Certo. O que o problema está pedindo para você fazer?*

S1: Para mim fazer a conta de cabeça.

E: Você lembra qual era a conta?

S1: A conta não. $67 \times 27 + 27 \times 27$, *aí eu não lembro o resto.* $67 \times 27 + 27 \times 27 + 9 \times 27$.

Observou-se apenas a troca do número 64 pelo número 67, mas os outros dados numéricos e as relações entre eles, foram fielmente recordadas.

[O segundo problema era $({}^1/_3 x^2 y^n + 4xyz^2)^2$, o sujeito 1 partiu de como teria que resolver o problema ...]

S1: Tinha que fazer uma distributiva.

E: Por quê?

S1: Porque aqui está elevando, aqui em cima. [se referindo ao expoente]

E: Elevando a quanto?

S1: Ao quadrado.

E: Lembra de mais alguma coisa, algum dado do problema?

S1: Você fala a conta?

E: Isso, os dados, os números,...

S1: Ah, eu não lembro muito bem não. Eu lembro só do ${}^1/_3$.

[Lendo o terceiro problema]

S1: Que tipo de número a fração n(n-1)/2 terá quando for um número ... será quando um número for qualquer ...

E: Quando n for.

S1: Quando n for qualquer número natural maior que 1? Um inteiro, uma fração ou zero?

...

S1: Tá falando que se o n dá para representar um número natural ou uma fração. Que pode ser ou 1 ou zero.

E: Você lembra da expressão que tinha ou alguma outra coisa?

S1: n (n-1)/2

[após ler o quarto problema: Agora eu sou duas vezes tão velho quanto você era quando eu tinha a idade que você tem agora. Quando você for tão velho quanto eu sou agora, junto teremos 63 anos de idade. Qual a nossa idade agora?]

S1: Quer saber que quantos anos nós temos juntos quando eu tiver a idade dele.

E: Mais alguma coisa, você lembra?

S1: Que juntos dão 63, 63 anos juntos.

S2 só recordou bem os dados do primeiro problema. No segundo e no terceiro problema lembrou-se de alguns dados numéricos, após ler o enunciado e ser indagado sobre o que tratava o problema:

[problema 2]

S2: $({}^{1}/_{3}\,xn^{n} + xz)^{2}$.

[problema 3]

S2: Ai, tinha um n(n-1)/2.

As lembranças do quarto problema não foram muito diferentes. S2 tinha mais facilidade para guardar dados numéricos. As palavras e a relação estrutural dos problemas não eram recordados:

S2: Fala de duas pessoas e idade. Quando você tiver a idade que eu tenho, juntos teremos 63 anos. Quantos anos nós temos agora?

S3, um tanto diferentemente de S1 e S2, aparentava preocupação em entender o enunciado dos problemas e manifestou interesse em resolvê-los. A seguir alguns trechos que evidenciavam uma memória matemática que pode ser considerada boa:

S3: [lendo] Calcule de cabeça: 64. 27 + 27.27 + 9.27.

E: Certo. O que o problema pediu?

S3: Calcular de cabeça.

E: O que?

S3: Umas contas.

E: Quais?

S3: 27 vezes ... qual é o outro [número]? 27 vezes ... ah, o primeiro número eu esqueci.

E: Hum, e depois?

S3: 27 vezes 27, depois 9 vezes 27.

E: 27 vezes 27 e depois estava somando ou subtraindo?

S3: Mais.

E: Tá.

S3: Para resolver eu ia ter que multiplicar esse e depois esse, esse e somar todos.

E: Esse é um teste de memória, não precisa resolver. Se fosse para resolver esse jeito que você falou daria uma trabalheira, mas daria certo.

S3: Ah, pode ser mais fácil?

[a seguir, o experimentador solucionou o problema usando um procedimento mais simples que o verbalizado pelo sujeito 3, devido ao pedido]

Com relação ao problema 2, o sujeito 3 recordou-se com precisão:

E: O que pediu o problema?

S3: [Resolver] *De cabeça.*

E: Isso.

S3: $^1/_3\, x^2 y^n + 4xyz^2$ *, tudo elevado ao quadrado.*

Já no problema 3, S3 teve mais dificuldade. Tendo inicialmente lido, disse *ah, eu preciso ver* e fez uma série de testes, com o objetivo de verificar se a fração ia dar inteiro, zero ou qualquer outro valor, tendo sido induzido, portanto, a recordar o problema:

E: Bom, mas não é isso que estou pedindo. O que é que eu estava pedindo?

S3: O que está dizendo. Ah, eu li só uma vez. Deixa eu ler de novo?

E: Não, você não precisa dizer com as mesmas palavras, fala de uma maneira geral.

S3: Ah, está perguntando se a fração n vezes n-1 dividido por 2, se o n for um número qualquer maior que 1, se ela [a fração] *vai dar um número inteiro ou uma fração ou zero.*

Com relação ao problema 5, que possui uma estrutura mais complexa para ser recordada, o sujeito reproduziu com facilidade os dados numéricos e algumas relações entre eles:

E: Não precisa resolver, é só você entender o problema, o que é que ele está falando?

S3: Está falando que agora ele tem duas vezes mais que eu de idade. [Na verdade, seria duas vezes mais que eu, quando ele tinha a idade que eu tenho agora]

E: Hum.

S3: E quando eu tiver a idade dele, nós dois juntos vamos ter 63.

E: Hum, Hum. Aí, está perguntando ...?

S3: Quantos anos cada um tem?

Krutetskii (1976) relatou que a memória matemática dos sujeitos matematicamente capazes era marcadamente seletiva, o cérebro deles não retinha todas as informações matemáticas, mas informações refinadas dos dados concretos e que representavam estruturas resumidas e generalizadas. Normalmente eles não se lembravam dos dados específicos ou de números, tanto que quando se defrontavam com um problema semelhante e com o mesmo padrão de solução de um outro apresentado anteriormente, esses sujeitos acreditavam que já o haviam solucionado.

Todavia, sujeitos considerados matematicamente incapazes, porém com reconhecida boa memória em outras disciplinas escolares como Literatura, Biologia, Geografia e História, possuíam uma memória pobre para o material matemático. Mesmo quando eles compreendiam e resolviam problemas de um determinado tipo (com a ajuda do experimentador), entendiam a natureza generalizada das operações envolvidas na solução, mas não a retinham na memória, caso não permanecessem mais em contato regular com o material apropriado.

O alunos medianamente capazes tinham igual dificuldade em lembrar dados concretos e abstratos, o geral e o particular, o essencial e o desnecessário. *Pode-se dizer que a memória deles estava sobrecarregada com informações em excesso.* (p. 297)

Assim sendo, S1 e S2 foram categorizados no nível 2 do componente memória matemática: *reproduz elementos da estrutura dos problemas (algum dado numérico ou frases descoordenadas)* e S3 foi categorizado no nível 3, pois *reproduzia os dados e as relações básicas do problema, mas esquecia algum de seus elementos* (p.e, a questão do problema).

Tabela 49:

Classificação dos sujeitos no estágio da retenção da informação matemática

componente da habilidade	Nível	Descrição	Sujeito
	1	não reproduz nenhuma informação constante nos problemas.	
memória	2	reproduz elementos da estrutura dos problemas: algum dado numérico ou frases descoordenadas.	S1,S2
	3	reproduz os dados e as relações básicas do problema, mas esquece algum de seus elementos.	S3
	4	reproduz o problema integralmente.	

A série XXIV (anexo M) é composta por problemas cujo objetivo é verificar como os sujeitos percebem e correlacionam os níveis visuais e verbalmente abstratos de um problema. Dependendo dessa percepção, os sujeitos eram classificados como pertencentes aos diferentes tipos de mente matemática, propostos por Krutetskii (1976): do tipo analítica, geométrica, ou harmônica, que é uma combinação das características das duas anteriores e, portanto, mais poderosa matematicamente. Nessa série os sujeitos são solicitados, em primeiro lugar, a definir, com suas palavras, alguns conceitos. Posteriormente são solicitados a identificar os mesmos nos problemas da série, após algumas explicações do examinador.

O sujeito 1 não forneceu definição de coeficiente[11] e nem de expoente[12] , tendo apresentado características dos conceitos e conseguido identificá-los com facilidade nos problemas apresentados. Gastou 25 minutos para resolver a série completa. A seguir são apresentados alguns trechos do protocolo relativos ao problemas 1, 2 e 5:

[11] Coeficiente é a parte numérica num produto de fatores numéricos e literais.
[12] Expoente é o número que indica quantas vezes um fator se repete num termo.

coeficiente é um número que acompanha a letra do lado [quis dizer, acompanha ficando ao lado].

....

expoentes são os números que elevam as letras.

...

[Problema 5: Eleve ao quadrado a expressão 2a. Dobre seu resultado. Triplique a expressão $2x^2$. Eleve ao cubo o resultado. Adicione as duas expressões resultantes].

Quando começou a executar o comando, 'eleve ao cubo o resultado', calculando $(6x^2)^3$:

S1: (...) daria 36 x^4, agora faz com o outro, com o $6x^2$ que sobrou que daria ... 6, 12, 18, 18, 21, 216?

E: Isto!

S1: $216x^2$?

E: Por que x^2?

S1: x^6, porque ele soma. Adicione as 2 resultantes. $216x^6$ e qual seria a outra? A que eu tinha feito?

E: Qual seria?

S1: $216x^6 + 8a^2$

E: Adicionando isso, fica quanto?

S1: Hum, 216, 224?

E: Pode somar isso?

S1: Não, porque os expoentes e as letras são diferente.

E: Então?

S1: Então o resultado seria $216x^6 + 8a^2$, esse aqui, tá?

O sujeito 2 também apresentou dificuldade para definir os termos, mas solucionou com certa facilidade todos os problemas, exceto o problema 5. Quando solicitado a dar a definição de coeficiente, o sujeito afirmou ser *número acompanhado de uma letra* e quando solicitado a dizer o que era expoente, seguiu-se o dialógo:

E: Vamos supor que você tenha que explicar para o seu amigo na prova o que é expoente. O que é expoente?

S2: Ah, expoente é esse bichinho que fica encima. Esse numerozinho.

E: Isso, então o que você vai falar para ele?

S2: Ah, vou falar, deixa eu ver, o número que fica escrito em cima da letra.

E: E só pode ser número?

S2: Número ou letra. Então ... é o número ou letra que fica em cima da letra que acompanha o coeficiente.

Neste caso, pode-se perceber que o sujeito é capaz apenas de identificar algum exemplo do conceito, a letra, o número. No quinto problema, novamente o sujeito 2 encontrou dificuldade para passar da linguagem natural para a linguagem algébrica:

S2: Triplique a expressão $2x^2$*...*

E: O que é triplicar?

S2: Fazer três vezes [aparentemente S2 havia entendido, entretanto quando ele escreveu o que era fazer três vezes, ficou evidente que ele não sabia o que era triplicar].

E: Como assim?

S2: [escreveu $2x^2 . 2x^2 . 2x^2$] *Isso?*

E: Não, triplicar não é elevar a 3.

S2: Eu não sei então.

S3 gastou 16 minutos para solucionar os problemas da série. Apesar de encontrar todos os coeficientes corretamente, só tendo dúvida na fração $^3/_7\, x^3$, e de encontrar todos os expoentes corretamente, não apresentou uma definição formal, mostrando-se preso a uma característica do conceito:

S3: [coeficiente] *é um número que vem antes das letras.*

S3: [expoente] *é um número que fica em cima das letras.*

Após a aplicação das treze séries propostas por Krutetskii (1976), relacionadas aos problemas algébricos, pode-se afirmar que os problemas apresentados requeriam um nível de abstração e compreensão superiores aos dos sujeitos.

Observou-se também que os sujeitos administravam bem o primeiro estágio da solução de problemas, pois eles percebiam as relações entre os dados e os fatos concretos do problema. Mas este fato, isolado, não evidencia a habilidade matemática.

As dificuldades dos sujeitos começaram a aparecer a partir do segundo estágio, ou seja, quando submetidos às séries onde são exigidos o processamento e a retenção da informação matemática. O sujeito 1 não conseguiu fazer generalizações a partir do material matemático apresentado, não utilizou estruturas resumidas de pensamento, não demonstrou flexibilidade nem reversibilidade de pensamento e, com relação à memória matemática, lembrava-se apenas dos dados numéricos, estabelecendo relações confusas entre esses dados.

O sujeito 2, por sua vez, conseguiu fazer algumas generalizações, escreveu as soluções de maneira reduzida, mas os processamentos e soluções apresentados não evidenciaram flexibilidade e nem reversibilidade de pensamento que pudessem caracterizá-lo como altamente habilidoso. Com relação à memória matemática, esta foi limitada à lembrança de alguns dados numéricos e algumas relações entre esses dados.

O sujeito 3 apresentou desempenho melhor que os outros dois, tendo conseguido fazer algumas generalizações. Apresentou processos resumidos de pensamento, demonstrou interesse em conhecer a solução de problemas que não exigiam ser solucionados, demonstrando uma boa memória para material matemático. Do ponto de vista do tempo gasto, foi o sujeito com melhor desempenho.

Os três sujeitos não demonstraram inclinação por soluções elegantes, econômicas ou rápidas, que Krutetskii (1976) relatou como sendo uma característica de alunos habilidosos. Para eles o melhor procedimento era o mais conhecido e que levava à solução adequada do problema.

Tendo em vista que a habilidade matemática pode ser desenvolvida através das atividades escolares e que os sujeitos desta segunda etapa do presente estudo foram os melhores selecionados a partir de uma prova, pode-se afirmar que, em comparação ao grupo de alunos das sexta, sétima e oitava séries, estes são aqueles com maior probabilidade de desenvolver os componentes dessa habilidade. Se os mesmos problemas fossem aplicados aos 256 sujeitos, as tarefas poderiam não ser adequadas ao nível de compreensão deles. Deve ser considerado também que fatores de natureza diversa poderiam estar interferindo no momento de realização das tarefas e isto pode ter ocasionado um desempenho não satisfatório.

Além disso, observou-se que, quando a tarefa requerida estava mais próxima do nível de compreensão deles, os sujeitos demonstraram persistência e empenho em realizá-la. O sujeito1, por exemplo, mostrou interesse em aprender a solucionar alguns dos problemas, teve facilidade em aprender fórmulas, porém, posteriormente, parecia não se lembrar das mesmas.

Tabela 50:

Comparação da pontuação na escala de atitudes, no teste matemático e tempo gasto

Sujeito	atitude	nota no teste	tempo
S1	77	8,00	mais lento
S2	73	7,16	médio
S3	73	7,50	mais rápido

Em resumo, observando os indicadores da Tabela 50, pode ser afirmado que os três sujeitos com melhor desempenho no teste matemático possuíam atitudes muito positivas em relação à Matemática. O tempo gasto por esses sujeitos, para solucionar as séries de problemas propostas por Krutetskii (1976), foi condizente com a escolaridade de cada um, ou seja, quanto maior a escolaridade, menor foi o tempo gasto para solucionar a série. É provável que, devido ao maior nível de escolaridade, o sujeito 3 tenha apresentado melhor desempenho nos problemas. Entretanto, se pudesse ser garantida a não interferência da variável série, poder-se-ia dizer, pela análise dos protocolos e pelo comportamento dos sujeitos durante a solução dos problemas, que o sujeito 3 era o mais habilidoso, seguido do sujeito 1 e do sujeito 2, nesta ordem.

Capítulo 5

Considerações Finais

> *somente um equilíbrio entre as diferentes concepções [sobre o que é Álgebra e como ela deve ser ensinada] e a apresentação de situações significativas variadas pode capacitar os alunos a compreenderem profundamente a pertinência da Álgebra, sua estrutura, o significado dos conceitos fundamentais como o de variável e o uso do raciocínio algébrico (Ortiz, 1997, p. 48).*

Os resultados obtidos neste estudo indicaram que 65,1% dos sujeitos da amostra não recebiam ajuda para estudar e menos de um terço (26,3%) recebia ajuda de alguém que morava com o sujeito. Os resultados encontrados relativos à ajuda recebida para a execução das tarefas escolares, bem como o suporte dado pela família a todas atividades escolares, mostraram que os sujeitos que afirmaram receber ajuda não apresentaram diferenças significativas nas atitudes e no desempenho em Matemática daqueles sujeitos que afirmaram não receber ajuda da família.

Estes resultados são concordantes com o estudo realizado por Utsumi e Mendes (2000), mas diferem dos apresentados por Gage e Berliner (1992) com estudantes americano-asiáticos nos Estados Unidos, como também dos realizados na França por Cooper e outros (1998) e no Brasil por Brito(1996a). Este fato pode estar relacionado ao tipo de sujeitos envolvidos nos estudos: os sujeitos do estudo de Utsumi e Mendes (2000) estavam cursando as mesmas séries que os sujeitos do presente estudo. Estudos mais detalhados a este respeito estão sendo desenvolvidos por outros pesquisadores do grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática da Faculdade de Educação da UNICAMP.

Um outro fator que chamou a atenção neste estudo foi que 66,3% dos sujeitos afirmaram não estudar nenhum dia por semana e, mesmo assim, 89,4 % afirmaram que compreendiam os problemas matemáticos trabalhados em sala sempre ou na maioria das vezes. Isto poderia estar indicando que os problemas trabalhados em sala apresentavam um nível baixo de dificuldade para estes estudantes. Dessa forma, eles provavelmente não se sentiam desafiados ou motivados a estudarem fora do período de aula.

Apesar da aparente facilidade com que os sujeitos afirmaram compreender os problemas trabalhados em classe, não se pode deixar de ressaltar a importância de se estudar fora do horário de aula. Balli (1998) e os dados do SARESP de 1997 também asseveraram que as tarefas de casa eram importantes para ajudar a reforçar conceitos aprendidos em classe.

Berliner (1990) relatou que um dos melhores preditores das realizações acadêmicas dos alunos era o tempo que eles gastavam com as atividades escolares e enfatizou que esse tempo de comprometimento com as tarefas escolares poderia ser reduzido (nos casos em que completar ou fazer as tarefas fosse pouco valorizado, prejudicasse a auto-estima do aluno, ou fossem tarefas desagradáveis, pouco motivadoras) ou aumentado (nos casos em que se aumentasse a expectativa de recompensas ou das consequências ruins do fracasso).

As conclusões de Berliner (1990) podem melhorar o entendimento sobre a falta de interesse desses sujeitos em estudar fora do período de aula. Qual é a expectativa de recompensa que poderia ter um aluno que se dedica mais aos estudos? Que tipo de consequência ruim poderia ocorrer para um aluno que não tivesse nenhuma dedicação aos estudos? Como muitas escolas não colocam a formação de hábitos de estudo dentre seus objetivos, dificilmente os alunos, sozinhos, terão interesse em concluir as tarefas.

Covington e Omelich (1981) relataram que alunos com dificuldades de aprendizagem normalmente não acreditavam que o esforço para aprender estivesse relacionado a conquistas acadêmicas. Esses alunos acreditavam num "locus" interno de controle para o fracasso que os induzia a sentimentos intensos de vergonha e dúvida sobre a própria capacidade. Isso levava os sujeitos à certeza de que não seriam bem sucedidos na tarefa e, portanto, não deveriam nem tentar.

Foi observado que, para os sujeitos do presente estudo, o fato de ter ou não sido reprovado alguma vez estava relacionado tanto às suas atitudes quanto às suas notas: os que já haviam sido reprovados apresentaram atitudes mais negativas e notas mais baixas no teste matemático.

Este fato, de certa forma, está relacionado ao indicativo contido nos PCNs, onde é afirmado que *o estabelecimento de condições adequadas à interação* [durante o processo de ensino-aprendizagem] *não pode estar pautado somente em questões cognitivas* (Brasil, 1997a, p. 98).

Nesta amostra, a média das atitudes em relação à Matemática foi mais baixa para os sujeitos que freqüentavam a sexta série. Brito (1996a) encontrou atitudes mais negativas com relação à Matemática na sétima série e relacionou este fato ao conteúdo aprendido nesta série - a Álgebra. No presente estudo, devido a problemas pedagógicos internos da escola, as professoras da sexta e sétima séries estavam ensinando conteúdos de Álgebra e a da oitava série já havia ensinado os conteúdos de sétima série e estava cumprindo o programa da oitava série. Este estudo reforçou o caráter não estável e portanto mutável das atitudes, também observado em outros estudos (Brito, 1996a; Robayna e Medina, 1997 e Utsumi e Mendes, 2000)

Apesar dos sujeitos do gênero masculino apresentarem atitudes ligeiramente mais positivas que as do gênero feminino, o que é concordante com grande parte dos estudos realizados nessa área, essa diferença não foi estatisticamente significativa nesse grupo de sujeitos. Entretanto a diferença encontrada nas médias das notas dos sujeitos foi significativa, favorecendo a nota do gênero masculino.

A revisão de literatura pareceu mostrar que não existe um gênero que apresente um desempenho melhor que o outro em Matemática, mas sim que cada gênero se sobressai em determinados aspectos de Matemática: enquanto os sujeitos do gênero masculino apresentam melhor desempenho em problemas que envolvem Geometria, os do gênero feminino, apresentam melhor desempenho em problemas que envolvem problemas abstratos e Lógica (Pattison e Grieve, 1984), parecendo indicar que a habilidade num aspecto compensa a falta de habilidade no outro (Low e Over, 1993).

Foram encontradas relações, nesta amostra, entre a frequência com que os sujeitos indicavam compreender os problemas matemáticos em sala de aula, as atitudes em relação à

Matemática e a autopercepção de desempenho. Esses resultados são concordantes com os estudos realizados por Stipek e Gralinski (1991), Benbow (1992), Hanna (1994), Brito (1996a), Utsumi e Mendes (2000).

Foi constatada diferença significativa entre as médias das notas no teste matemático, a compreensão dos problemas matemáticos, a autopercepção de desempenho e a média da pontuação na escala de atitudes em relação à Matemática, permitindo afirmar que, nesse grupo, quanto mais os sujeitos compreendiam os conteúdos trabalhados em sala, melhor era a sua autopercepção de desempenho, mais positivas eram suas atitudes e melhores eram suas notas, não necessariamente nesta ordem.

Um resultado semelhante a este foi obtido por Mayer (1998), que identificou três fatores necessários para um bom desempenho em Matemática: conhecimento específico do conteúdo, conhecimento de estratégias para solucionar problemas e atitudes positivas com relação à disciplina e a sua capacidade de lidar com ela. O autor enfatizou que solucionar problemas bem depende tanto de fatores motivacionais quanto de cognitivos.

Com relação aos componentes da habilidade matemática evidenciados durante a solução das séries algébricas propostas por Krutetskii (1976), foi observado que os sujeitos que obtiveram melhor desempenho no teste matemático, aparentemente, não estavam preparados para solucionar os problemas algébricos contidos nas séries, porque esses problemas se mostraram abstratos, complexos e diferentes dos usualmente trabalhados em sala de aula pelos sujeitos.

Na primeira etapa da solução de problemas, referente à obtenção da informação matemática, na qual os sujeitos deveriam interpretar o problema, percebendo as relações e os fatos concretos presentes no enunciado, buscou-se verificar se os mesmos eram capazes de formular a questão do problema. Foi observado que os três sujeitos formulavam a questão independentemente, mas não imediatamente, cometendo erros e gradualmente captando as relações do problema.

Com relação à segunda etapa, referente ao estágio do processamento da informação matemática, que inclui a generalização, a flexibilidade de pensamento, a reversibilidade dos processos mentais, a compreensão, o raciocínio e a lógica, foi observado que os três sujeitos não viam mais que um método de solução de problema, mesmo depois de considerável ajuda do experimentador; solucionavam os problemas reversos somente com auxílio do experimentador; e, não utilizavam processos resumidos de pensamento, mesmo depois de terem solucionado uma série de problemas de um mesmo tipo. Os sujeitos 1 e 2 não generalizaram o material matemático por si próprios, mesmo depois de solucionarem muitos problemas de um mesmo tipo e ter recebido considerável ajuda do experimentador. O sujeito 3 generalizou o material matemático depois de solucionar muitos problemas do mesmo tipo, com auxílio do experimentador, porém com erros isolados.

Finalmente, no estágio da retenção da informação matemática, onde a memória matemática dos sujeitos estava sendo analisada, foi observado que os sujeitos 1 e 2 conseguiram reproduzir elementos da estrutura dos problemas, tais como algum dado numérico ou frases descoordenadas, enquanto o sujeito 3 reproduziu os dados e as relações básicas do problema, embora se esquecesse de algum dos elementos do problema.

Reitera-se que, apesar dos sujeitos 1 e 2 terem sido classificados nos níveis mais baixos em alguns dos componentes da habilidade matemática, não se pode afirmar que eles não possuíam esses componentes, pois outros fatores poderiam estar concorrendo para a não realização, de maneira bem sucedida, das tarefas propostas. O sujeito 3 obteve resultados um pouco melhores, mas esses resultados podiam estar sendo influenciados por outros fatores que não a sua capacidade matemática.

Os dados obtidos durante a solução das séries de problemas algébricos utilizando o método *pensar em voz alta* evidenciaram que os sujeitos percebiam as relações entre os dados do problema, ou seja, eram capazes de interpretar corretamente os problemas. Mas, no segundo estágio - no qual são processadas as informações, é feito o planejamento e é executado o plano de solução - não pareceram estar bem desenvolvidos, não obstante o sujeito 3 tenha se desempenhado melhor que os outros dois.

Das questões levantadas nesse estudo, pôde ser verificado que as atitudes em relação à Matemática, dos sujeitos dessa amostra, estavam relacionadas à serie e ao desempenho, evidenciando a necessidade de se garantir um ensino de Matemática que propicie aos estudantes desenvolverem atitudes mais positivas e habilidades matemáticas a fim de que possam ter mais confiança no seu desempenho.

O desempenho dos sujeitos dessa amostra, aferido pela nota no teste matemático, mostrou estar relacionado a variável gênero, favorecendo os sujeitos do gênero masculino, revelando a necessidade de estudos específicos que identifiquem a causa dessa diferença e subsidiem novas propostas de ensino de Matemática que contribuam para melhorar o desempenho de todos os estudantes, e, em especial, os do gênero feminino.

Os três sujeitos com melhor desempenho no teste matemático desse estudo, possuíam as atitudes mais positivas em relação à Matemática e, eram os mais prováveis de desenvolverem os componentes da habilidade matemática. A análise de seus protocolos durante a solução de problemas algébricos, evidenciou que eles encontraram dificuldades nos estágios de processamento e retenção da informação matemática, sugerindo que esses estágios da solução de problemas deveriam receber mais ênfase nas atividades escolares, a fim de favorecer o desenvolvimento da habilidade matemática de todos os estudantes. O sujeito com maior escolaridade desempenhou-se melhor que os outros dois sujeitos, inclusive despendendo menos tempo na solução dos problemas. Como as habilidades são desenvolvidas, é possível que com atividades de ensino adequadas, a progressão nas séries contribua para o desenvolvimento da habilidade matemática.

Além disso, a revisão da literatura e os resultados do presente estudo forneceram evidências empíricas sobre as dificuldades encontradas na aprendizagem de conceitos algébricos, a partir das quais foram feitas sugestões para enfrentar algumas das dificuldades mais comuns na aprendizagem de Álgebra, como a passagem da linguagem natural para a algébrica e o uso das letras como incógnita e variável.

Capítulo 6

Orientações Pedagógicas Gerais

(...) a Matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua capacidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação.

PCN's - Matemática, 1997, p. 31.

A comunidade internacional de educadores matemáticos, segundo Ortiz (1997), recomendou como estratégias de ensino mais adequadas para tornar a aprendizagem da Álgebra mais significativa, o estudo de (a):

- linguagem algébrica e sua sintaxe;
- procedimentos de solução de alguns tipos de problemas;
- regularidades que regem as relações numéricas;
- problemas específicos que expressam soluções gerais;
- generalizações[13] que podem ser aplicadas fazendo alusão aos componentes da demonstração matemática.

Para Falcão (1997), a passagem de um código (a linguagem natural) para outro (a linguagem algébrica) implica em uma atividade mediadora que abrange a identificação de variáveis, parâmetros e relações, mobilização de conceitos matemáticos, algoritmos e, só então, consideração de regras sintáticas específicas (p. e, a ordem das operações em uma expressão).

Kieran (1991) afirmou que o uso das letras como variáveis (para representar uma gama de valores) é mais negligenciado no ensino da pré-Álgebra do que o uso delas como

[13] Extensão de uma idéia a todos os casos a que se pode aplicar, a partir da observação de casos particulares ou por meio de desmonstração.

incógnita (para representar um valor desconhecido). Esse fato se traduziria em pouca experiência dos alunos em usar os símbolos algébricos como uma ferramenta com a qual eles poderiam pensar e expressar relações gerais.

Araújo (1999) enfatizou a necessidade da escola propiciar atividades que conectem os conhecimentos prévios dos alunos aos novos conhecimentos, pois se aos objetos algébricos não for associado nenhum sentido, a aprendizagem da Álgebra basear-se-á na manipulação de expressões simbólicas, a partir de objetos abstratos que irão confundir os alunos nos cálculos algébricos.

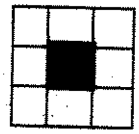
Desta forma, uma boa proposta de introdução da Álgebra, deveria apresentar problemas instigadores aos alunos, levando-os a sentir necessidade de representar simbolicamente a situação para compreendê-la em seu aspecto mais geral.

Por exemplo, solicitar que os alunos, em pequenos grupos, pensem cada um em um número, multipliquem-no por 6, somem 10 ao resultado, subtraiam o número pensado originalmente e dividam tudo por 5. Coloque numa tabela o número pensado pelos alunos e o resultado das operações realizadas sobre ele, como a seguir:

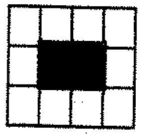
número pensado	resultado da operação
4	6
7	9
10	12
.	.
.	.
.	.

Os alunos provavelmente observarão que o número obtido é sempre duas unidades maior do que o número pensado originalmente por eles. Instigue-os a explicar o porquê.

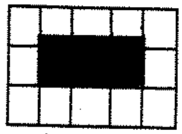
Um outro tipo interessante de problema trata da observação de padrões e regularidades, como no caso dos quadriláteros brancos e escuros a seguir:



1 quadrilátero escuro e 8 brancos



2 quadriláteros escuros e
10 brancos



3 quadriláteros escuros e
12 brancos

Depois de vários desenhos desses, os alunos provavelmente observarão que, para cada quadrilátero que aparece pintado, cria-se mais uma coluna de quadriláteros brancos e que o total de brancos é o dobro disso, ou seja: brancos = $2(p + 3)$. Assim, se você desenhar sete quadriláteros escuros, desenhará também 20 quadriláteros brancos. Solicite que os alunos verifiquem e façam observações de outras regularidades.

Pode-se ainda solicitar que os alunos solucionem e comparem os resultados de algumas multiplicações, como as que se seguem:

5 . 5 =	7 . 7 =	13 . 13 =
6 . 4 =	6 . 8 =	12 . 14 =

A seguir, pode-se sugerir algumas atividades como as que se seguem:

Atividade 1: Dado que 348 . 348 = 121.104, encontre 347 . 349

Os alunos deverão encontrar 121.103.

Atividade 2: Dado que 22 . 22 = 484, encontre o par de números cujo produto é 483.

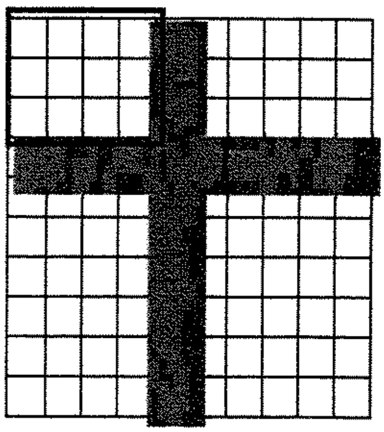
Da mesma forma, os alunos deverão encontrar que 21 . 23 é 483.

Atividade 3: Encontre a regra geral que explica esses resultados.

É esperado que os alunos encontrem a regra geral $(n - 1).(n+1) = n^2 - 1$ apenas a partir das observações, e essa poderá ser demonstrada com as atividades sugeridas adiante.

Kieran (1991) sugeriu algumas atividades que estabelecem uma ligação entre a multiplicação no campo aritmético e a multiplicação no campo algébrico. A seguir são apresentadas quatro atividades adaptadas das sugestões da pesquisadora:

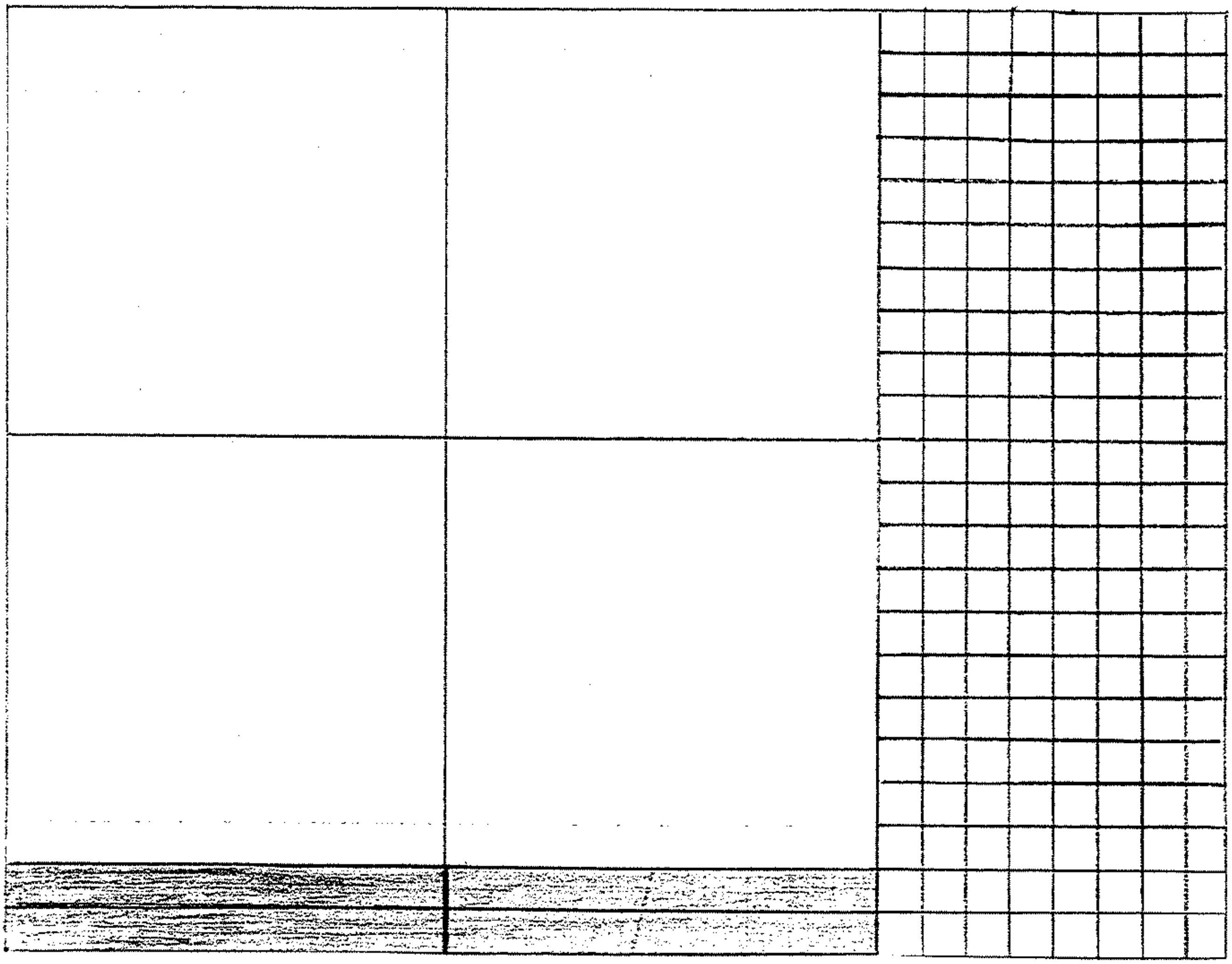
Atividade 1: Solicite que os alunos recortem um papel quadriculado no tamanho 10×10, dois retângulos de cartolina de tamanhos $1{,}5 \times 10$ e ensine-os a realizar algumas multiplicações com esse material, como a seguir:



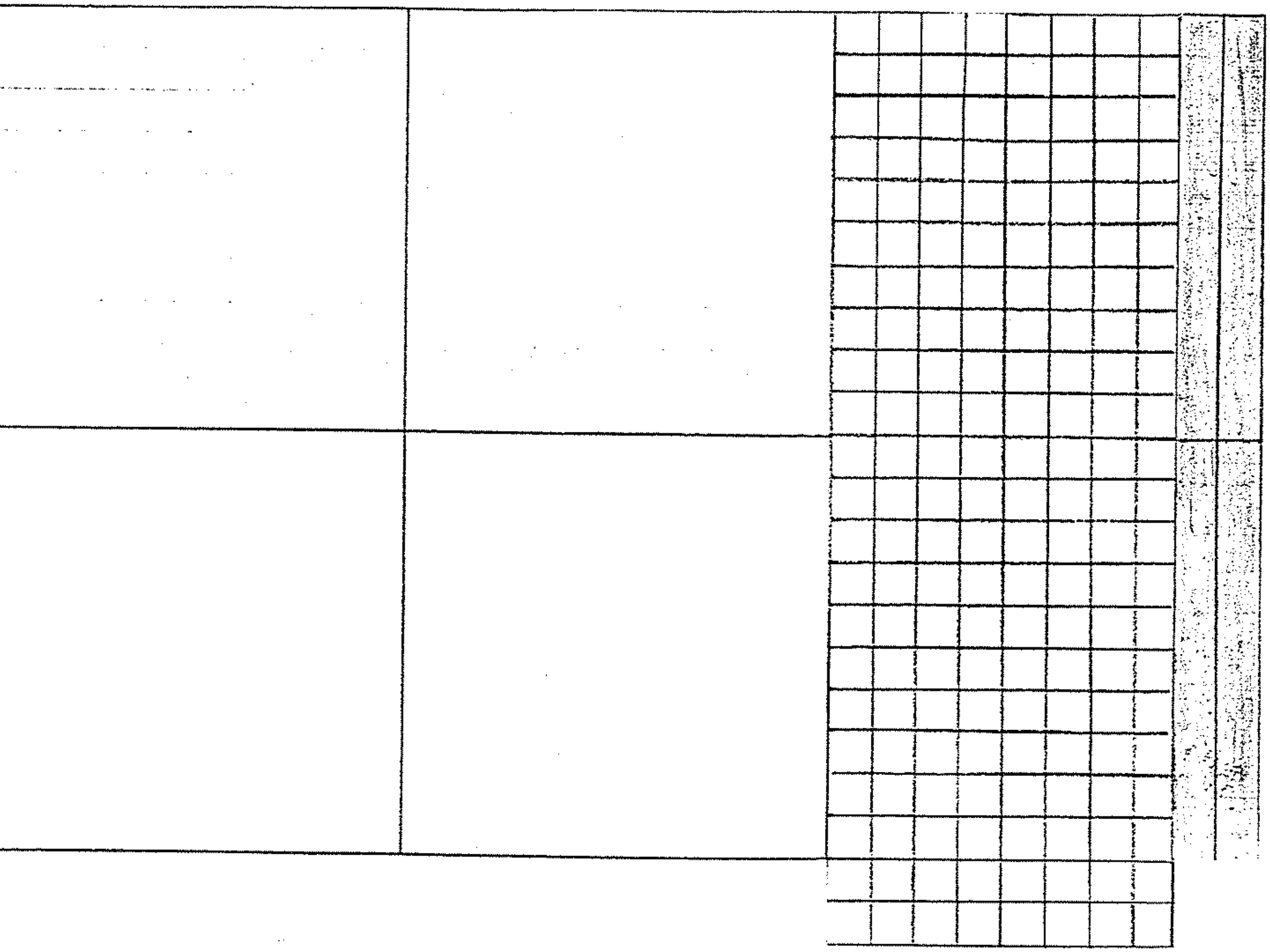
Neste caso temos 3×4
3 (linhas) $\times$ 4 (colunas) = 12 quadriláteros

Atividade 2: Pegue uma folha de papel quadriculado grande. Solicite que os alunos realizem multiplicações com números maiores cuja soma das unidades seja 10, por exemplo, 22×28. Espera-se que algum aluno venha a fazer da seguinte forma:

Temos 22 (linhas) $\times$ 28 (colunas)



As duas colunas 1×20 podem se juntar às oito colunas 1×20, formando dez colunas 1×20. (Recorte a faixa destacada e coloque-a ao lado da oitava coluna, como na próxima ilustração)



Temos então $20 \times 20 = 400$, ou ainda 20^2

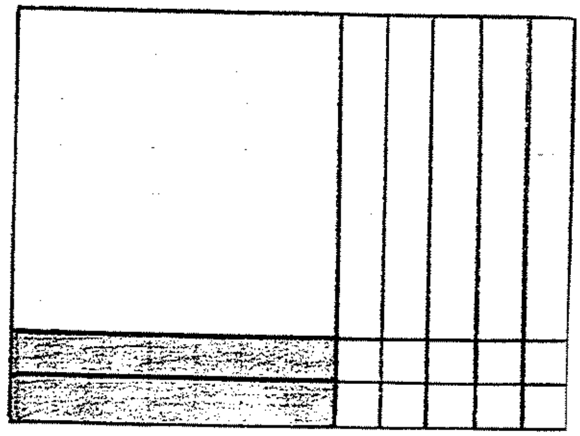
$(8 + 2) \times 20 = 10 \times 20 = 200$

$2 \times 8 = 16$

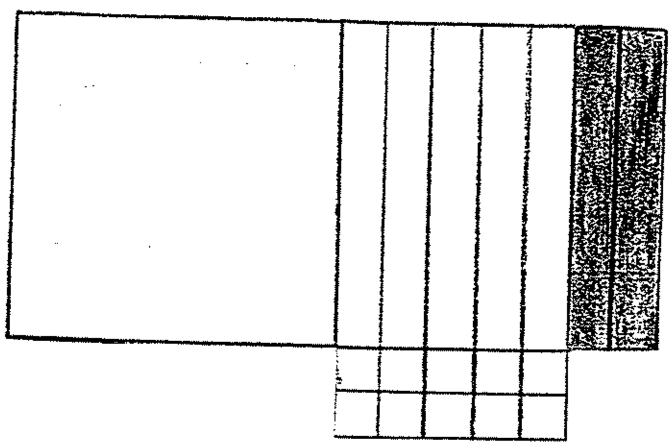
perfazendo 616 quadriláteros, logo o produto de 22 por 28 é 616.

Depois de algumas multiplicações desse tipo, solicite aos estudantes que façam algumas multiplicações, usando esse mesmo processo de recortar e transpor colunas, com números cujas unidades não somam 10.

Atividade 3: Solicite que os alunos multipliquem expressões como $(\square + 5) \times (\square + 2)$



Espera-se que os alunos recortem e transponham as duas colunas, da maneira que vinham fazendo até então, como pode ser observado na figura :



Temos dessa forma:

$\square \times \square = \square^2$

$(2 + 5) \times \square = 7\square$

$2 \times 5 = 10$

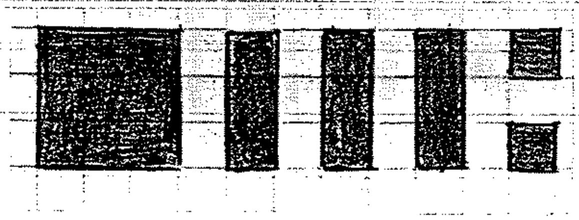
perfazendo,

$\square^2 + 7\square + 10$

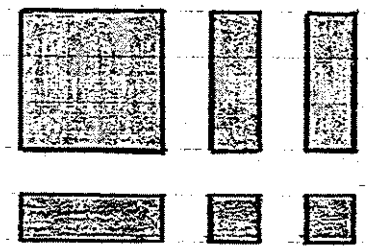
De acordo com Kieran (1991), quando essa rotina for familiar para os alunos, eles não terão dificuldades em lembrar que $(x + 5)(x + 2) = x^2 + 7x + 10$. Além disso essa atividade, que introduz produtos notáveis, também deixa claro para os alunos por que eles podem somar $5x$ com $2x$, mas não com x^2 ou 10.

Essas colunas são chamadas de tiras algébricas por Leitze e Kitt (2000) que sugeriram utilizá-las para ensinar como fatorar trinômios quadrados, como pode ser observado a seguir:

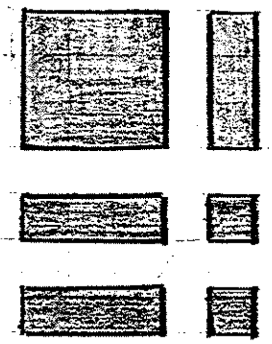
Após os alunos estarem familiarizados em representar os trinômios utilizando as tiras algébricas. Solicite que os alunos fatorem o trinômio $x^2 + 3x + 2$. Eles deverão representá-lo da seguinte forma:



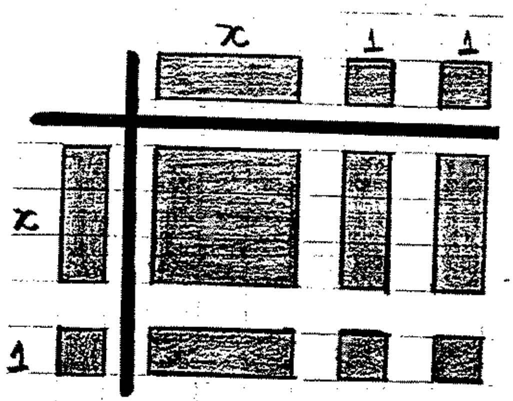
É esperado que após desenvolver atividades semelhantes às sugeridas nas atividades 1, 2 e 3, os alunos saibam que $x \, . \, x = x^2$ e $\mathbf{k} \, . \, x = \mathbf{k}x$, onde **k** é um número qualquer. Solicite que eles agrupem as peças do trinômio dado de maneira a obter um retângulo, como mostrado a seguir:

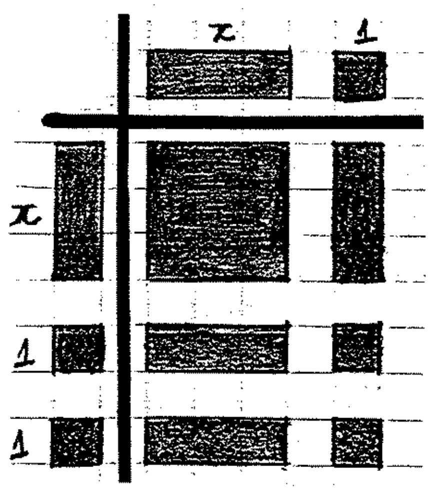


ou ainda



Os alunos, provavelmente, visualizarão que $x^2 + 3x + 2 = (x + 2) \, . \, (x + 1)$:





Atividade 4: Utilize tabelas para representar relações funcionais entre variáveis. Por exemplo,
$\square \times 2 + 3 = \lozenge$

□	◊
0	3
1	5
10	23

A atividade 5, foi adaptada de uma sugestão apresentada por Friedlander e Hershkowitz (1997).

Atividade 5: Apresente um calendário qualquer como o da ilustração a seguir:

Outubro

D	S	T	Q	Q	S	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

a) Solicite que os alunos encontrem algum padrão ou regularidade;
b) Destaque uma parte do calendário, como na figura a seguir, e peça que os alunos destaquem outras partes e descubram alguns padrões.

Outubro

D	S	T	Q	Q	S	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Os alunos deverão descobrir que a soma das diagonais é sempre igual e/ou que o produto das diagonais difere em 7 unidades.

c) Solicite que os alunos descubram a regra geral e justifiquem algebricamente.

Os alunos deverão chegar a algo aproximado ao que se segue para os dias no calendário:

x	$x + 1$
$x + 7$	$x + 8$

Com relação a soma das diagonais: $x + (x + 8) = (x + 7) + (x + 1)$

$$2x + 8 = 2x + 8$$

Com relação ao produto das diagonais: $x(x + 8) + 7 = (x + 7)(x + 1)$

$$x^2 + 8x + 7 = x^2 + x + 7x + 7$$

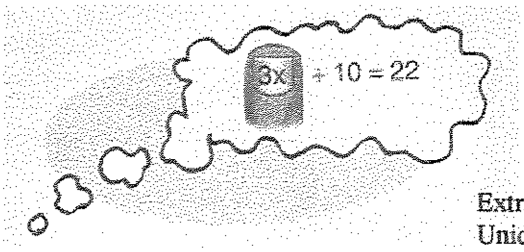
$$x^2 + 8x + 7 = x^2 + 8x + 7$$

Espera-se que as cinco atividades sugeridas para a fazer a transição para o domínio algébrico, de maneira mais significativa, levem os alunos a pensarem sobre as relações numéricas de cada situação, discutirem essas relações, explicitamente, utilizando a linguagem natural e, eventualmente, aprenderem a representar essas situações usando letras ou outros símbolos.

Brasil (1999) sugeriu alguns métodos para o estudo das letras como incógnitas, dos quais citaremos dois, a saber :

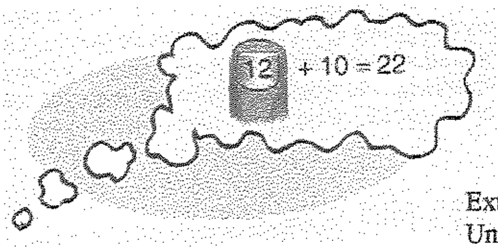
1° método: Cobrir a incógnita

Seja a equação $3x + 10 = 22$. Para encontrarmos o valor da incógnita, cubramos o 3x.



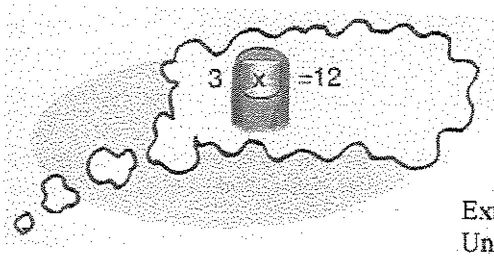
Extraído de Brasil, 1999, Unidade 4, p.50

Que número mais 10 é igual a 22?



Extraído de Brasil, 1999, Unidade 4, p.50

12 somado a 10 é igual a 22. E agora, que número vezes 3 dá 12?



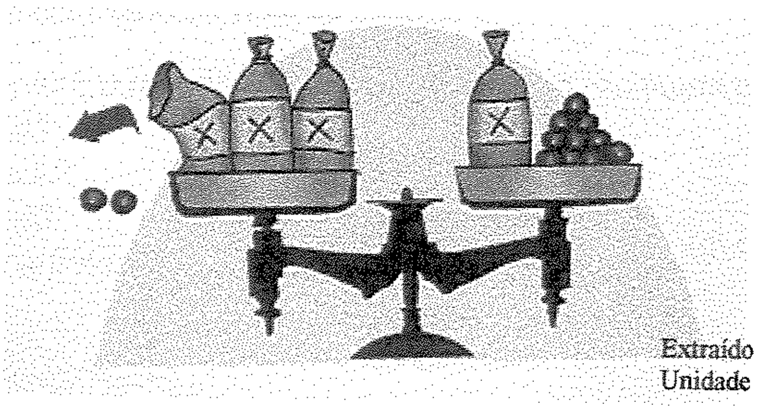
Extraído de Brasil, 1999,
Unidade 4, p.50

4 vezes 3 é igual a 12. Então, a solução deve ser 4. Para ter certeza, solicite que os alunos façam a verificação.

Whitman (1982, como citado em Kieran, 1991) em um estudo sobre o ensino de equações utilizou o método de ocultar parte da equação como sugerido no primeiro método. A pesquisadora assegurou que o método de ocultar ajudou os alunos a superarem a tendência de separar o número, da incógnita, na hora errada. Quando foi analisado o desempenho dos alunos que aprenderam por esse método e depois pelo método tradicional de executar a mesma operação dos dois lados da igualdade, foi verificado que o desempenho desses alunos era superior ao dos alunos que haviam aprendido apenas pelo método tradicional.

2° método: balança

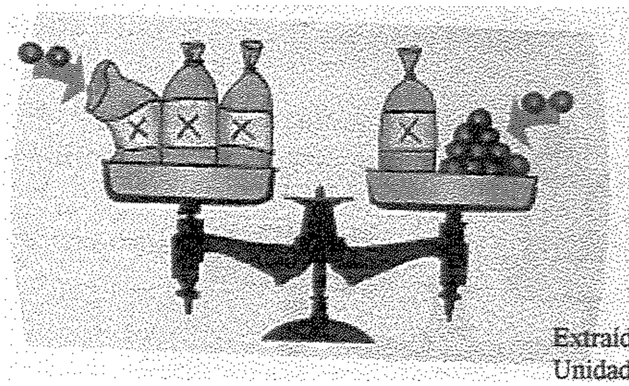
Imagine uma balança equilibrada como na figura a seguir:



Extraído de Brasil, 1999,
Unidade 4, p.52.

Observe que em um prato há três pacotinhos menos duas bolinhas e no outro prato há um pacotinho e 10 bolinhas. Solicite aos alunos que representem matematicamente essa situação. Eles deverão representá-la da seguinte forma:

$$3x - 2 = x + 10$$



Extraído de Brasil, 1999, Unidade 4, p.53

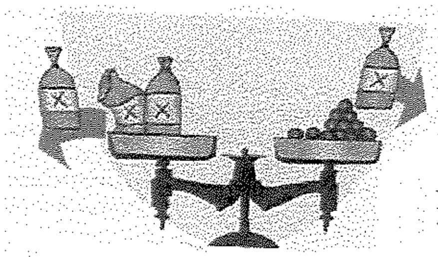
Se recolocarmos as duas bolinhas que estavam fora do prato da esquerda, a fim de manter a balança equilibrada, devemos colocar duas bolinhas no prato da direita. Matematicamente falando:

$$3x - 2 + 2 = x + 10 + 2$$

Ou seja,

$$3x = x + 12$$

Se retirarmos um pacotinho de cada prato, novamente a balança continuará em equilíbrio:



Extraído de Brasil, 1999, Unidade 4, p.50

Ficaremos com dois pacotinhos e doze bolinhas, ou ainda,

$$2x = 12$$

Agora, basta pensar "se dois pacotinhos pesam tanto quanto 12 bolinhas, um pacotinho pesa tanto quanto 6 bolinhas" , ou seja,

$$x = 6.$$

Da mesma forma que no 1º método, solicite que os alunos façam a verificação da solução.

Lins e Gimenez (1997) criticaram o uso do método da balança, chamando-o de 'abordagem facilitadora' que não contribui para o desenvolvimento da compreensão algébrica.

Entretanto, eles não mostraram empiricamente a validade dessa afirmação e nem as que se seguem. Segundo eles, uma criança que pense em termos de balança para resolver a equação 3x + 10 = 100, provavelmente não conseguirá fazer 3x + 100 = 10, pois não faz sentido tirar 100, dos dois pratos da balança. A sugestão de ambos, 'crenças-afirmações' com suas 'justificações' é, na verdade, uma balança disfarçada: sugerem que se comece com uma situação genérica sobre carros (A) e caminhões (C), onde teremos que todos são veículos (V).

Não seria jamais estranho escrever: $C + A = V$

(...) As 'obviedades' podem continuar: $V - C = A$

já que é óbvio que, se do todo 'retiramos' os carros sobram ... os caminhões! E, por motivo totalmente similar, $V - A = C$ (p. 116).

E, a seguir uma situação com dois tanques iguais, onde o tanque da esquerda contém uma quantidade X de líquido, precisa de mais nove baldes para enchê-lo e no da direita, Y, são necessários mais 5 baldes para completá-lo:

$X + 4b = Y$

Se juntarmos 4 baldes a X, ficarão faltando 5 baldes do lado esquerdo, que é o mesmo que falta do lado direito.

$Y - 4b = X$

Se retirarmos 4 baldes de Y, ficarão faltando 9 baldes do lado direito, que é o mesmo que falta do lado esquerdo (p. 127).

Os pesquisadores asseguraram que dessa forma, os alunos seriam capazes de compreender equações do tipo 3x + 100 = 10, pois foi atribuído significado às mudanças de membros da equação.

As duas manipulações na equação do exemplo dos carros e dos caminhões não parecem ser tão óbvias para as crianças, pois as mesmas podem não perceber a ligação da linguagem natural com a linguagem simbólica. Com relação ao método das 'crenças-afirmações' e suas 'justificações', ele requer um nível de abstração bem maior do que o método da balança, motivo pelo qual julga-se apropriado usá-lo numa fase posterior ao do trabalho com o método da balança, ainda que não se acredite que esse método tenha atribuído mais significado a solução de equações do tipo 3x + 100 = 10.

A utilização da linguagem natural para justificar algumas manipulações com símbolos algébricos foi analisada por Falcão (1994). Através de situações elaboradas sobre diferentes agências de viagens, onde variava-se o salário por hora, a comissão sobre a venda de bilhetes e o salário fixo, os alunos deveriam encontrar o valor de alguma incógnita, como no problema M a seguir:

A agência Le Petit Monde paga 72 F por hora, 105 F de comissão por bilhete vendido e 300 F de salário fixo. A agência Au Voyageur Satisfait paga 80 F por hora, 105 F de comissão por bilhete vendido e 300 F de salário fixo.

Problema M. Cristophe empregado na Agência Le Petit Monde ganhou 470 francos ao final de um mês de trabalho. Deseja-se saber quantas horas ele trabalhou para chegar a tal ganho, mas dessa vez ignora-se a quantidade de bilhetes aéreos que ele vendeu. A única informação adicional de que dispomos é a seguinte: se tivesse trabalhado da mesma forma na Agência Au Voyageur Satisfait (mesma quantidade de horas de trabalho e de bilhetes vendidos), ele teria ganho um salário final de 5140 francos (p. ii, Anexo I).

uma vez obtidas as equações

$72H + 105B + 300 = 4740$

$80H + 105B + 300 = 5140$

o experimentador chamava a atenção do sujeito para o fato de as duas equações serem bastante parecidas. Dessa forma, a diferença de salários só poderia ser atribuída à diferença de 72 H e 80 H, ou seja 8H = 400. Em seguida, o experimentador reforçava que essa relação quase que obtida "visualmente" era, de fato, o resultado de uma equação subtraída da outra.

Esse tipo de encaminhamento, onde se apela para a lógica na manipulação das equações, pode facilitar a compreensão das operações sobre as equações de um sistema, tornando a aprendizagem desse tópico mais significativa.

Finalizando, a abordagem sugerida nessa proposta, na qual os problemas precisam ser planejados para motivar os alunos a investigar, explorar, levantar hipóteses, tomar decisões e justificar as decisões tomadas, deve favorecer a aprendizagem de conceitos algébricos introdutórios.

O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas de determinadas informações, a analisar problemas abertos - que admitem diferentes respostas em função de certas condições -, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos (Brasil, 1998, p. 42).

Ressalte-se ainda, a importância do desenvolvimento das atividades em pequenos grupos, onde os alunos são encorajados a cooperarem uns com os outros. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) aparece uma ênfase na importância de ambientes não competitivos para a aprendizagem e Gage e Berliner (1992), Leikin e Zaslavsky (1997) e Loefler (1997), asseveraram a importância desses ambientes, não apenas para a aprendizagem, mas também para o desenvolvimento de atitudes positivas nos alunos.

Referencias Bibliográficas

Para todas as grandes coisas exigem-se lutas penosas e um preço muito alto. A única derrota da vida é a fuga diante das dificuldades. O homem que morre lutando é um vencedor.

Pe. Thiago Alberione

Abrantes, P. (1991) - Resolução de Problemas e Educação Matemática: alguns aspectos da experiência portuguesa. **Actas Primer Congresso Iberoamericano de Educação Matemática** (pp. 251-254). Espanha.

Aksu, M . (1991). A Longitudinal Study on Attitudes Toward Mathematics by Department and Sex at the University Level. **School Science and Mathematics, 91**(5), 185 -192.

Aiken, L. R. (1961). The effect of attitude on performance in mathematics. **Journal of Educational Psychology, 52** (1), 19-24.

Aiken, L. R. & Dreger, R. M. (1963). Personality correlates of attitude toward Mathematics. **Journal of Educational Research, 56** (9), 476-480.

Aiken, L. R. (1970). Attitudes toward Mathematics. **Review of Educational Research, 40** (4), 551-596.

__________ (1979). Attitudes toward Mathematics and Science in Iranian middle schools. **School Science and Mathematics, 79**, 229-234.

Alves, E. V. (1999). **Um estudo exploratório dos componentes da habilidade matemática requeridos na solução de problemas aritméticos por estudantes do ensino médio.** Dissertação de Mestrado não publicada, UNICAMP, Campinas.

American Psychological Association (1996). **Publication Manual of the American Psychological Association** (4th ed.) Washington, DC: Author.

Anderson, D. B. & Anderson , A. L. H. (1991) . Preservice Teachers Attitudes Toward Discipline. **The Teacher Educator, 26**, 17-20.

Araújo, E. A. (1999). **Influências das Habilidades e das Atitudes em relação à Matemática e a Escolha Profissional**. Tese de Doutorado não publicada, UNICAMP, Campinas.

Assouline, S. G. & Lupkowski, A. E. (1992). **Gender differences on the Differencial Aptitude Tests.** In N. Colangelo, S. G. Assouline & D. L. Ambroson (Eds.). New York: Trillium Press.

Balli, S. (1998). When mom and dad help: student reflections on parent involvement with homework. **Journal of Research and Development in Education, 31**(3), 142-146.

Bandalos, Yates & Thorndike-Christ (1995). Effects on Math Self-Concept, Perceived Self-Efficacy, and Attributions for Failure and Success on Test Anxiety. **Journal of Educational Psychology, 87** (4), 611-623.

Bart, W. M., Baxter, J. & Frey, S. (1980). The relationships of spatial ability and sex to formal reasoning capabilities. **The Journal of Psychology, 104**, 191-198.

Bassarear, T. J. (1991). An Examination of the Influence of Attitudes and Beliefs on Achievement in a College Developmental Mathematics Course. **Research & Teaching in Developmental Education,** 7(2), 42-56.

Beck, J. L. & Carpenter, P. A. (1986). Cognitive approaches to understanding reading. **American Psychologist**, **41**, 1098-1105.

Benbow (1988). Sex differences in mathematical reasoning ability among the intellectually talented: their characterization, consequences, and possible explanations. **Behavioral and Brain Sciences, 11,** 169 - 232.

Benbow (1992). Academic Achievement in Mathematics and Science of Students between ages 13 and 23: Are There differences among Students in the Top One Percent of Mathematical Ability? **Journal of Educational Psychology, 84**(1), 51-61.

Benbow, Stanley, Kirk & Zonderman (1983). Structure of in intellectually precocious children and in their parents. **Intelligence**, **7,** 129-152.

Berliner, D.C. (1990). What's all the fuss about instructional time? In. Bem-Peretz & Bromme (Eds.). **The nature of time in schools.** New York: Teachers College Press.

Billstein, R. , Libeskind, S. & Lott, J.W. (1987). **A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers**. Califórnia: The Benjamin/ Cummings Publishing Company.

Blanco, L. (1991). Conocimento y acción de la enseñanza de las Matemáticas de professores de E. G. B. y estudiantes para professores. **Manuales UNEX**.Espanha.

Born, M. P. & Lynn, R. (1994). Sex differences on the Dutch WISE-R: A comparison with the USA and Scotland. **Educational Psychology, 14**(2), 249-254.

Brasil (País), Secretaria de Ensino Fundamental (1997a). **Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF.

Brasil (País), Secretaria de Ensino Fundamental (1997b). **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**, v. 3. Brasília: MEC/SEF.

Brasil (País), Secretaria de Ensino Fundamental (1998). **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF.

Brasil (País), Secretaria de Ensino Fundamental (1999). **Referenciais para a formação de professores**. Brasília: A Secretaria.

Brito Lima, A. P. (1996). **Desenvolvimento da Representação de igualdade em crianças de 1ª à 6ª série do 1º grau**. Dissertação de Mestrado não Publicada, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

Brito Lima, A. P. & Falcão, J. R. (1997). Early development of algebraic representation among 6 -13 year-old children: the importance of didatic contract. **Proceedings of the 21th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1**, 201-208.

Brito Lima, A. P. & Falcão, J. R. (1998). Desenvolvimento da Representação Algébrica em crianças de 1ª à 6ª série do 1º grau . In R. C. Lins (Ed.), **Anais do IV Encontro Nacional de Educação Matemática: vol.2** (pp. 510-512). São Paulo: PUC/SBEM.

Brito, M. R. F., Fini, L.D.T & Garcia, V. J. N. (1994). Um estudo exploratório sobre as relações entre o raciocínio verbal e o raciocínio matemático. **Pro-posições**, 5, 1[13], 37-44.

Brito, M. R. F. (1995). Grade Distribution and Stability of Attitudes toward Mathematics. **Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education: vol 1**. Recife: Program Commitee of 19th PME Conference.

Brito, M. R. F. (1996a). **Um estudo sobre as Atitudes em Relação à Matemática em Estudantes de 1° e 2° graus**. Tese de Livre Docência não Publicada, UNICAMP, Campinas.

Brito, M. R. F. (1996b). Generalization in algebra problem solving and attitudes toward mathematics. **Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education: vol 1**, 167. Seville: Program Commitee of 20th PME Conference.

Brito, M. R. F. (1998). Adaptação e validação de uma escala de atitudes em relação à Matemática. **Zetetiké, 9** (6), 109 -162.

Bussab, W. O. & Morettin, P. A . (1986). **Estatística Básica**. São Paulo: Atual.

Cacioppo, J. T., Marshall-Goodell, B. S., Tassinary, L. G. & Petty, R. E. (1992). Rudimentary Determinants of Attitudes: Classical conditioning is more effective when prior knowledge about the attitude stimulus is low than high. **Journal of Experimental Social Psychology, 28**(3), 207-233.

Carey, D. A. (1992). The Patchwork Quilt: A Context for Problem Solving. **Arithmetic Teacher, 40** (4), 199-203.

Casey, Nuttall, Pezaris & Benbow (1995). The Influence of Spatial Ability on Gender Differences in Mathematics College Entrance Test Scores Across Diverse Samples. **Developmental Psychology, 31**, 697 -705.

Caston, M. C. (1993). Parent and Student Attitudes Toward Mathematics as they relate to third grade Mathematics Achievement. **Journal of Instructional Psychology, 20**(2), 96-101.

Cone, J. D. & Foster, S. L. (1993). **Dissertations and these from start to finish: Psychology and related fields**. Washington, DC: American Psychological Association.

Cooper, H. Lindsay, J. J, Greathouse, S. & Nye, B. (1998). Relationships among attitudes about homework, amount of homework assigned and completed, and student achievement. **Journal of Educational Psychology, 90**, 70-83.

Covington, M. V. & Omelich, C. L. (1981). As fortunes mount: affective and cognitive consequences of ability demotion in class. **Journal of Educational Psychology**, 73, 796-808.

CsikszentmihalyI, M. (1988). Motivation and Creativity: towards a synthesis of structural and energistic approaches to cognition. **New Ideas in Psychology**, **6**, 159-176.

Daniels, R. R., Senviau, L. P. & Lamb, J. (1991). Math should be fun for girls too! **The Creativa Child and Adult Quarterly, 16**(4), 211-216.

Dark & Benbow (1990). Enhanced problem translation and short-term memory: Components of mathematical talent. **Journal of Educacional Psychology**, **82,** 420-429.

Dark & Benbow (1991). Differential ennhancement of working memory with mathematical versus verbal precocity. **Journal of Educacional Psychology**, **83**, 48 - 60.

Davis-Dorsey, J., Ross, S. & Morrinson, G. (1991). The role of recording and countex personalization in the solving of mathematics word problems. **Journal of Educational Psychology, 83**(1), 61-68.

Diaz, M.V. & Poblete, A. (1995). Resolucion de problemas, evaluacion y enseñanza del calculo. **Zetetiké**, **4**, 51-60.

Dubrovina, I. V. (1992). A Study of Mathematical Abilities in Children in the primary Grades. **Soviet Studies in School Mathematics Education, 8**, 3 - 96.

Dutton, W. H. (1976). **Dutton mathematics attitude scale**. Los Angeles: University of California.

Falcão, J. T. (1994). Representação do problema, escrita de fórmulas e tutoria na passagem da Aritmética a Álgebra. **Seminários sobre novas perspectivas da Educação Matemática no Brasil. Série Documental: Eventos, 4**. Águas de São Pedro: INEP.

Falcão, J. T. (1997). Lenguaje algebraico. Un enfoque psicológico. **Uno - Revista de Didáctica de las matemáticas, 14**, 25-38.

Farivar, S. & Webb, N. M. (1994). Helping and getting help - essential skills for effective group problem solving. **Arithmetic Teacher, 41**(9), 521-525.

Fennema, E. & Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Scales: Instruments designed to measure attitudes towards the learning of Mathematics by females and males. **Journal for Research in Mathematics Education,** 7(5), 324-326.

Fennema, E. & Carpenter, T. P. (1981). Sex-related differences in Mathematics: Results from National Assessment. **Mathematics Teacher, 74** (7), 554-559.

Fiorentini, D., Miorim, M. A. & Miguel, A. (1993). Contribuição para um Repensar a Educação Algébrica Elementar. **Pro-posições, 1**(4), 78-91.

Fortunato, I., Hecht, D., Tittle, C. K. & Alvarez, L. (1991). Metacognition and problem solving. **Arithmetic Teacher, 39**(4), 38-40.

Freitas, J. L. M. (1994). A atividade de validação na passagem da Aritmética para a Álgebra: Um estudo de tipos de provas produzidos por alunos de 1° e 2° graus. **Seminários sobre novas perspectivas da Educação Matemática no Brasil. Série Documental: Eventos, 4**. Águas de São Pedro: INEP.

Friendlander, A. & Hershkowitz, R. (1997). Reasoning with Algebra. **Mathematics Teacher, 90** (6), 442 - 447.

Frost, L. A., Hyde, J. S. & Fennema, E. (1994). Gender, Mathematics Performance, and Mathematics-related Attitudes and Affect: A meta-analytic synthesis. **International Journal of Educational Research, 21**, 373-386.

Gage, N. L. & Berliner, D. C. (1992). **Educational Psychology**. Boston: Houghton Mifflin Company.

Garcia, F. F. (1997). Aspectos históricos del paso de la Aritmética al Álgebra. **Uno - Revista de Didáctica de las matemáticas, 14,** 75-91.

Garcia, V. J. N. (1995). **Um estudo exploratório sobre as relações entre o conceito de automatismo da teoria do processamento de informações de Sternberg e o conceito de pensamento resumido na teoria das habilidades matemáticas de Krutetskii**. Dissertação de Mestrado não Publicada, UNICAMP, Campinas.

Gardner, H. & Hatch, T. (1989). Multiple intelligences go to school: educational implications of the theory of multiple intelligences. **Educational Researcher, 18**(8), 4-10.

Gomes, F. P. (1987). **Curso de Estatística Experimental**. São Paulo: Nobel.

Gonçalez, M. H. (1995). **Atitudes (Des)Favoráveis em Relação à Matemática**. Dissertação de Mestrado não Publicada, UNICAMP, Campinas.

Gonçalez, M. H. (1996). Atitudes (Des)Favoráveis em Relação à Matemática. In R. C. Lins (Ed.), **Anais do IV Encontro Paulista de Educação Matemática** (pp. 60-67). São Paulo: PUC/SBEM.

Greenwood, J. J. (1994). On the Nature of Teaching and Assessing "mathematical power" and "mathematical thinking". **Arithmetic Teacher, 41**(3), 144-152.

Gwizdala, J. & Steinback, M. (1990). High School Females Mathematics Attitudes: An Interim Report. **School Science and Mathematics, 90**(3), 215-222.

Hanna, G. (1994). Cross-cultural gender differences in Mathematics Education. **International Journal of Educational Research, 21**(4), 417-426.

Hayes-Roth, F., Klahr, P. & Mostow, D. J. (1980). Advice Taking and Knowledge Refinement: An Iterative View of Skill Acquisition. In J. R. Anderson (Ed.), **Cognitive Skills and Their Acquisition** (pp. 231-254). Hillsdale, NJ: Lawrence Erbaum Associates Publishers.

Hernández, R. P. & Goméz-Chacon, I. M. (1997). Las actitudes en educación matemática. Estrategias para el cambio. **Uno Revista de Didáctica de las matemáticas, 13**, 41-61.

Hyde, J. S., Fennema, E. & Lamon, S. J. (1990). Gender differences in mathematics performance: a meta-analysis. **Psychological Bulletin, 107**, 139-155.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais - INEP (1997). **SAEB/95: Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica - Resumo Executivo**. Brasília: O Instituto.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais - INEP (1999). **O perfil do aluno brasileiro: um estudo a partir dos dados do SAEB 97**. Brasília: O Instituto.

Jacobs, J. E. (1991). Influence of Gender Stereotypes on Parent and Child Mathematics Attitudes. **Journal of Educational Psychology, 83**(4), 518-527.

Karp, K. S. (1991). Elementary School Teachers Attitudes Towards Mathematics: the Impact on Students Autonomous Learning Skills. **School Science and Mathematics, 91**(6), 265-269.

Ken, M. (1989). Fostering algebraic thinking in children. **The Australian Mathematics Teacher, 4** (45), 14-16.

Kieran, C. (1991). Research into Practice. Helping to Make the Transition to Algebra. **Arithmetic Teacher, 38**(7), 49-51.

Klausmeier, H. J. (1977). **Manual de Psicologia Educacional: aprendizagem e capacidades humanas**. Traduzido por Maria Célia Teixeira Azevedo de Abreu. São Paulo: Harbra.

Kloosterman, P. & Cougan, M. C. (1994). Students' Beliefs about Learning School Mathematics. **Elementary School Journal, 94**(4), 375-388.

Krutetskii, V. A. (1976). **Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.** Traduzido por Joan Teller. Chicago: University Press.

Larkin, J. H. (1985). Understanding problem representations and skill in physics. In S. F. Chipman, J. W. Segal & Glaser (Eds.). **Thinking and learning skills: vol. 2**. New Jersey: Erlbaum.

Larose, S. & Roy, R. (1995). Test of Reactions and Adaptation in College (TRAC): A new measure of learning propensity for College Students. **Journal of Educational Psychology, 87**(2), 293 - 306.

Leat, D. J. K. (1993). Competence, Teaching, Thinking and Feeling. **Oxford Review of Education, 19**(4), 499-510.

Leeson, N. (1995). Performance of Sixth - Graders in the Australian Primary Schools Mathematics Competion: Gender and Other Factors. **Mathematics Education Research Journal,** 7 (1), 37-49.

Leikin, R. & Zaslavsky, O. (1997). Facilitating student interactions in Mathematics in a cooperative learning setting. **Journal for Research in Mathematics Education, 28**(3), 331-354.

Leitze, A. R. & Kitt, N. A. Using homemade algebra tiles to develop Algebra and Prealgebra concepts. **Mathematics Teacher, 93** (6), 462-466.

Lewis, C. (1980). Skill in Algebra. In J. R. Anderson (Ed.), **Cognitive Skills and Their Acquisition** (pp. 85-110). Hillsdale, NJ: Lawrence Erbaum Associates Publishers.

Lins, R. C. & Gimenez, J. (1997). **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. São Paulo: Papirus.

Loefler, T. A. (1997). Assisting women in developing a sense of competence in outdoor programs. **The Journal of Experimental Education Research, 90**(4), 221-229.

Low, R. & Over, R. (1993). Gender Differences in Solution of Algebraic Words Problems Containg Irrelevant Information. **Journal of Educational Psychology, 85**(2), 331-339.

Lupkowski - Shoplik , Sayler & Assouline (1993). **Mathematics achievement of talented elementary students: Basic concepts vs. computation.** Paper presented at the Henry B. and Jocelyn Wallace National Research Symposium on Talent Development, University of Iowa.

Malan, W. A. (1993). Impact of School Type and Sex of the Teacher on Female Students Attitudes Towards Mathematics in Nigerian Secondary Schools. **Educational Studies in Mathematics, 24**(2), 223-229.

Marher, C. A. & Martino, A. M. (1992). Implementing the Professional Standards for Teaching Mathematics: Teachers Building on Student's Thinking. **Arithmetic Teacher, 39**(7), 521-525.

Mayer, R. E. (1998). Cognitive, metacognitive and motivational aspects of problem solving. **Instructional Science, 26** (1-2), 49-63.

Mc Leod, D. B. & Adams, V. W. (Eds.) (1989). **Affect and Mathematical Problem Solving**. New York: Springer.

Mc Leod, D. B. (1990). Information-processing theories and mathematics learning: the role of affect. **International Journal of Educational Research, 14,** 13-29.

Meece, J. L., Wigfield, A. & Eccles, J. S. (1990). Predictors of math anxiety and its influence on young adolescent's course enrollment intentions and performance in mathematics. **Journal of Educational Psychology, 82,** 60-70.

Mills, Ablard & Stumpf (1993). Gender differences in academically talented young students' mathematical reasoning: Patterns across age and subskill. **Journal of Educational Psychology**, **85**, 340-346.

Milton, J. S. (1992). **Statistical Methods in the Biological and Health Sciences**. Singapore: Mc. Graw-Hill.

Moron, C. F. (1998). **Um estudo exploratório sobre as concepções e as atitudes dos professores de educação infantil em relação à Matemática**. Dissertação de Mestrado não Publicada, UNICAMP, Campinas.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston, VA: The council.

Newell, A. & Rosenbloom, P. S. (1980). Mechanisms of Skill Acquisition and the Law of Practice. In J. R. Anderson (Ed.), **Cognitive Skills and Their Acquisition** (pp. 1-56). Hillsdale, NJ: Lawrence Erbaum Associates Publishers.

Norusis, M. J. (1993). **SPSS for Windows Base System User's Guide Release 6.0.** Chicago: SPSS Inc.

Norwich, B. (1994). Predicting Girls' Learning Behaviour in Secondary School Mathematics Lessons from Motivacional and Learning Environment Factors. **Educational Psychology, 14**(3), 291-306.

Ortiz, M. A. (1997). El lenguaje algebraico en la escuela: como conseguir un equilibrio entre investigación y práctica. **Uno - Revista de Didáctica de las matemáticas, 14**, 47-60.

Paris, S. G., Wixson, K. K. & Palincsar, A. S. (1986). Instructional approaches to reading comprehension. In Rothkopf (Ed.), **Review of research in education.** Washington, DC: American Educational Research Association.

Pattison, P. & Grieve, N. (1984). Do spatial skills contribute to sex differences in different types of mathematical problems? **Journal of Educational Psychology, 76**(4), 677-689.

Perfetti, C. A. & Curtis, M. E. (1986). Reading. In Dillon & R. Sternberg (Eds.), **Cognition and instruction.** New York: Academic Press.

Pirola, N. (1995). **Um estudo sobre a formação de conceitos de triângulos e paralelogramos em alunos de 1° grau**. Dissertação de Mestrado não Publicada, UNICAMP, Campinas.

Polya, G. (1978). **A Arte de Resolver Problemas**. Traduzido por Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência.

Polya, G. (1981). **Mathematical Discovery: on Understanding, Learning and Teaching Problem Solving**. New York: John Wiley & Sons.

Pozzo, J. I. (1994). **Teorias cognitivas del aprendizaje**. Madrid: Ed. Morata.

Pozzo, J. I. (1998). **A solução de problemas**. Porto Alegre: Artmed.

Reynolds, A. J. & Walberg, H. J. (1991). A Structural Model of Science Achievement. **Journal of Educational Psychology, 83**, 97-107.

Reynolds, A. J. & Walberg, H. J. (1992). A Strutural Model of High School Mathematics Outcomes. **Journal of Educational Research, 85**(3), 150-158.

Robayna, M. M. S. & Medina, M. M. P. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el Álgebra escolar. **Uno - Revista de Didáctica de las matemáticas, 14**, 7 - 24.

Robinson, N.M., Abbott, R.D., Berninger, V.W. & Bussue, J. (1996). The structure of abilities in Math - precocious young children: gender similarities and diferences. **Journal of Educational Psychology, 88**(2), 341-352.

Rosén, M. (1995). Gender Differences in Structure, Means and Variances of Hierachically Ordered Ability Dimensions. **Learning and Instruction, 5**(1), 37-62.

São Paulo (Estado), Secretaria da Educação/ Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (1991). **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática - 1° grau**.

Sax, L. (1994). Mathematical Self Concept: How College Reinforces the Gender Grap. **Research in Higher Education, 35**(2), 141-166.

Schiefele, U. (1992). Topic interest and levels of text comprehension. In K. A. Renninger, S. Hidi & A. Krapp (Eds.). **The role of interest in learning and development** (pp. 151-182). Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum..

Schiefele, U. & Csikszentmihalyi (1995). Motivation and Ability as Factors in Mathematics Experience and Achievement. **Journal for Research in Mathematics Education**, **26**(2), 163-181.

Schiff, M., Duymé, M., Dumaret, A., Stewart, J., Tomkiewicz, S., & Feingold, J. (1978). Intellectual status of working-class children adopted early into upper-middle-class families. **Science**, 200, 1503-1504.

Schiff, M., Duymé, M., Dumaret, A. & Tomkiewicz, S. (1982). How much could we boost scholastic achievement and IQ scores? A direct answer from a French adoption study. **Cognition**, 12, 165-196.

Schoenfeld, A. H. (1985). **Mathematical problem solving**. Flórida: Academic Press.

Schultz, J. E. (1991). Implementing the Standards: Teaching Informal Algebra. **Arithmetic Teacher**, **38**(9), 34-37.

Seegers, G. & Boekaerts, M. (1996). Gender-related differences in self-referenced cognition in relation to Mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, **27**(2), 215-240.

Shaw, M. E. & Wright, J. M. (1967). **Scales for measurement of attitudes**. New York: Mc Graw-Hill.

Sherman, J. (1980). Mathematics, spatial visualizations and related factors: changes in girls and boys in grades 8 - 11. **Journal of Educational Psychology, 72**(4), 476-482.

Sherman, J. (1982). Continuing in Mathematics: A Longitudinal Study of the Attitudes of High School Girls. **Psychology of Women Quarterly**, 7(2), 132-140.

Shiomi , K. (1992). Association of Attitudes Towards Mathematics with self-efficacy, causal attribution and Personality Traits. **Perceptual and Motor Skills, 75**(2), 563-567.

Siegler, R. S. (1985). Encoding and the development of problem solving. In S. F. Chipman, J. W. Segal & Glaser (Eds.), **Thinking and learning skills: vol. 2**. New Jersey: Erlbaum.

Spalletta, A. G. (1998). **Desenvolvimento das habilidades matemáticas: um estudo sobre as relações entre o desempenho e a reversibilidade de pensamento na solução de problemas.** Dissertação de Mestrado não Publicada, UNICAMP, Campinas.

Stanley (1990). Finding and helping young people with exceptional mathematical reasoning ability. In M.J.A Howe (Ed.), **Encouraging the development of exceptional skills and talents**. Leicester, England: British Psychological Society.

Stanley (1994). **Gender differences for abble elementary schools students on above - grade - level ability and achievement tests.** In N. Colangelo, S. G. Assouline, & D. L. Ambroson (Eds.). Dayton: Ohio Psychology Press.

Steinkamp, M. W. & Maehr, M. L. (1983). Affect, Ability and Science: a quantitative synthesis of correlational research. **Review of Educational Research, 53,** 369-396.

Sternberg, R. (1985). Instrumental and componential approaches to the nature and training of intelligence. In S. F. Chipman, J. W. Segal & Glaser (Eds.), **Thinking and learning skills: vol. 2** (pp.). New Jersey: Erlbaum.

Sternberg, R. (1992). **As Capacidades Intelectuais Humanas.** Traduzido por Dayse Batista. Porto Alegre: Artes Médicas.

Stipek, D. J. & Gralinski, J. H. (1991). Gender Differences in Children's Achievement - related beliefs and emotional responses to sucess and failure in mathematics. **Journal of Educational Research, 83** (3), 361-371.

Swenson, E. (1994). How much Real Problem Solving? **Arithmetic Teacher, 41**(7), 400-403.

Taylor, L., Stevens, E. Peregoy, J. J. & Bath, B. (1991). American Indians, Mathematical Attitudes and the Standards. **Arithmetic Teacher, 38**(6), 14-20.

Tesser, A. & Shaffer, D. R. (1990). Attitudes and Attitude Change. **Annual Review of Psychology, 41**, 479-523.

Tobias, S. & Weissbrod, C. (1980). Anxiety and Mathematics: an update. **Harvard Educational Review, 50**(1), 63-69.

Tocci, C. M. & Engelhard, Jr. G. (1991). Achievement, Parental Support, and Gender Differences in Attitudes Toward Mathematics. **Journal of Educational Research, 84** (5), 280-286.

Utsumi, M. C. (1995). **Escola-Padrão: Avanço na Melhoria do Ensino?** Dissertação de Mestrado não Publicada, UNICAMP, Campinas.

Utsumi, M. C. & Mendes, C. R. (2000). Researching the attitudes towards Mathematics in Basic Education. **Educational Psychology, 20**(2), 237-243.

Van Someren, M. W., Barnard, Y. F. & Sandberg, J. A. C. (1994). **The think aloud method: a practical guide to modelling cognitive process**. San Diego, CA: Academic Press.

Viana, O. A. (2000). **O conhecimento geométrico de alunos do CEFAM sobre figuras espaciais: um estudo das habilidades e dos níveis de conceito**. Dissertação de Mestrado não Publicada, UNICAMP, Campinas.

Vidal, F. (1973). **Problem Solving.** Traduzido por Agnes Cretella. São Paulo: Bestseller.

Wagner, R. K. & Sternberg, R. (1984). Alternative conceptions of intelligence and their implications for education. **Review of Educational Research**, **54**, 179 - 224.

Whitney, H. (1980). **Mathematics Anxiety**. The Institute for Advanced Study. Princeton, New Jersey.

Witter, G. (1996). Pesquisa científica e nível de significância. **Estudos de Psicologia**, **13**(10), 55-63.

Anexos

O ensino baseado na solução de problemas tem como pressuposto promover nos alunos o domínio de habilidades e estratégias que lhes permitam aprender a aprender, assim como a utilização de conhecimentos disponíveis para dar respostas a situações variáveis e diferentes.

Juan Ignácio Pozzo, 1998

Anexo A : Instrumentos - Fase I

(carta de apresentação, questionário, teste matemático e escala de atitudes)

Prezado Aluno,

Você está participando da Pesquisa desenvolvida em nível de Doutorado na Faculdade de Educação - UNICAMP, da Profª Miriam Cardoso Utsumi que estuda as habilidades matemáticas de alunos do primeiro grau.

Suas respostas serão importantíssimas para a validade desta pesquisa, por isso solicito sua colaboração no sentido de que você responda a todas as questões o mais seriamente possível.

Agradeço desde já sua colaboração.

Miriam C. Utsumi

Nome: ____
Idade: ________anos
Sexo: ( ) Masculino ( ) Feminino

1.Escolaridade do Pai:______________________________________

2.Escolaridade da Mãe:______________________________________

3.Você já repetiu alguma série?
( ) sim ( )não

4.Se sim, qual(is) série(s)? ______________________________________

5.Quando você estuda Matemática ou faz suas tarefas de Matemática, você é ajudado por:
( ) alguém de casa;
( ) outra(s) pessoa(s) da família (por exemplo: primos, tios);
( ) outra(s) pessoa(s) (por exemplo: colega, vizinho, professor particular);
( ) ninguém me ajuda.

6.Quantos dias por semana você estuda Matemática fora da sala de aula? __________

7.Você consegue entender os problemas matemáticos dados em sala de aula?
( ) sim, sempre; ( ) sim, na maioria das vezes;
( ) não, nunca; ( ) não, na maioria das vezes.

8.Qual a matéria que você mais gosta? ____________________

9.Qual a matéria que você menos gosta? ____________________

6ª série

Procure responder a todos os problemas SEMPRE deixando seus cálculos na folha.

1. Um vídeo cassete começou a gravar um programa de TV às 17h35min e desligou às 18h23min porque a fita havia terminado. Quantos minutos do programa foram gravados?

2. O ônibus que faz a linha Campinas-Paulínia saiu da rodoviária de Paulínia com um certo número de passageiros. No trajeto subiram 16 passageiros, depois subiram 13, desceram 16 e logo depois, desceram mais 23 passageiros. Quando chegou ao ponto final, em Campinas, o ônibus:

a) não tinha passageiros;
b) tinha 10 passageiros a mais que no início;
c) tinha 10 passageiros a menos que no início;
d) tinha 12 passageiros a menos que no início.

3. Nestas férias fui à praia e tirei uma certa quantidade de fotos. Após revelá-las, observei que colocando 5 fotos em cada página do álbum, completo um certo número de páginas e fica sobrando 1 foto. Colocando 7 fotos em cada página, completo um número menor de páginas do álbum, é claro, mas também fica sobrando 1 foto. Nessas condições, a quantidade de fotos que eu tirei na praia, pode ser:

a) um número entre 70 e 75 fotos;
b) 49 ou 50 fotos;
c) um número entre 80 e 85 fotos;
d) 60 ou 61 fotos.

4. Comprei 18 garrafas de guaraná e 14 de coca-cola, cada uma por R$ 1,20. Paguei com uma nota de 50 reais. Quanto receberei de troco?

5. Quantos copos com capacidade de ¼ de litro podem ser enchidos com o conteúdo de uma jarra de 2 ½ litros?

7ª série

Procure responder a todos os problemas SEMPRE deixando seus cálculos na folha.

1. No retângulo da figura, a soma dos números de cada linha, coluna ou das duas diagonais é sempre a mesma. Qual o número que deve ficar no lugar de A ?

12	17	10
		15
	A	

2. Quatro amigos gastaram 13,45 reais em sanduíches e 7, 35 reais em sucos. A essas despesas foram acrescentados 10% de gorjeta para o garçom. Dividiram o total em partes iguais, quanto coube a cada amigo?

3.Observe a tabela e encontre os valores de a, b e c.

x	-1	-3	c
y	-5	b	-2
x-y	a	2	3

4. Com 3kg de farinha de trigo, são feitos 140 biscoitos. Com 5kg de farinha aproximadamente quantos biscoitos podem ser feitos?

5. Numa eleição com 2 candidatos, votaram 3850 eleitores. O candidato A obteve 1032 votos e o candidato B obteve 2048 votos. Qual foi a porcentagem de votos nulos ou em branco?

8ª série

Procure responder a todos os problemas SEMPRE deixando seus cálculos na folha.

1. Um camelô comprou 30 ursinhos de pelúcia por R$ 165,00. Se o camelô deseja lucrar R$ 75,00 com a venda desses ursinhos, por quanto ele deve vender cada um?

2. Digitando x páginas por dia, D. Ana completa um serviço em 10 dias. Se digitasse $x + 6$ páginas por dia, ela faria o serviço em 8 dias. Qual é o valor de x?

3. Três latas iguais de massa de tomate mais uma lata de sardinha custam, juntas, R$ 3,00. Duas latas de massa de tomate mais duas latas de sardinha (todas iguais às anteriores) custam, juntas, R$ 3,40. Qual é o preço de uma lata de massa de tomate?

4. Um aquário tem a forma de um bloco retangular, com arestas de 60 cm, 40 cm e 30 cm. Quantos litros de água cabem no aquário cheio?

Anexo B

Instrumento do Estágio da Obtenção da Informação Matemática

Série I - Problemas incompletos

Objetivo da Série: Percepção das relações e fatos concretos no problema.

Formule uma questão para cada problema:

1. Duas pessoas juntas tem R$ 28,00 e, uma delas tem a reais.
   (R: Quantos reais tem a outra pessoa?)

2. Um aluno comprou 2b cadernos numa loja e, 3,5 vezes cadernos a mais numa outra loja.
   (R: Quantos cadernos ele comprou ao todo?)

3. Um carro viajou 760 Km, numa velocidade média de x Km por hora.
   (R: Qual o tempo gasto na viagem?)

4. Uma roda faz 12 a revoluções percorrendo uma distância de 1800m.
   (R: Qual é o perímetro da roda?)

5. Um homem vive y meses.
   (R: Qual a idade dele?)

Anexo C

Instrumento do Estágio do Processamento da Informação Matemática

Série V- sistemas de problemas de um único tipo

Objetivos da Série: 1. Generalização;

2. Percepção das relações e encurtamento de raciocínio.

Testes para familiarização propostos pelo examinador:

1a) $a^2 - 2ab + b^2 =$

2a) $9a^4 - 6a^2m^2 + m^4 =$

3a) $16x^2 - 4xy^2 + ¼\, y^4 =$

4a) $-2xy + x^2 + y^2 =$

5a) $b^2 + (x - a)^2 - 2b(x - a) =$

6a) $a^2 - b^2 =$

7a) $9x^4 - 4y^2 =$

8a) $1/25\, m^4 - 4n^2m^6 =$

9a) $-0{,}25y^2 + 1/9\, x^2 =$

10a) $(x - y)^2 - 25y^8 =$

Teste a:

1) $(a + b)^2 =$

2) $(1 + ½\, a^3b^2)^2 =$

3) $(-5x + 0.6xy^2)^2 =$

4) $(3x - 6y)^2 =$

5) $(m + x + b)^2 =$

6) $(4x + y^3 - a)^2 =$

7) $51^2 =$

8) $(C + D + E) . (E + C + D) =$

1a) $a^2 + b^2 =$

2a) $(1/3ab^3)^2 + (2a)^2 =$

3a) $(-5x - 0.6xy^2). 2 =$

4a) $(3x + 6y) \cdot 2x =$

5a) $2(m^2 + x^2 + b^2) =$

6a) $4x^2 + y^2 - a^2 =$

7a) $98^2 =$

8a) $(c + m + x) . (c - m + x) =$

Teste b:

1b) $(a + b)^2 =$

2b) $(m + n)^2 =$

3b) $(1/4a + 1/3b)^2 =$

4b) $(a^3 + b^4)^2 =$

5b) $(3x + 6z)^2 =$

6b) $(6a^2 + 3b^4)^2 =$

7b) $(c^2 + d^3)^2 =$

8b) $(3c^3 + 1/2d^4)^2 =$

Anexo D

Instrumento do Estágio do Processamento da Informação Matemática

Série VIII- composição de problemas de um determinado tipo

Objetivo da Série: Generalização e percepção dos fatos.

1. Pense num número que possa ser fatorado por 2.

[problema de familiarização elaborado pelo examinador]

2. Pense num número que possa ser fatorado por x^2.

[problema de familiarização elaborado pelo examinador]

3. Pense num trinômio que possa ser fatorado pelo termo $2a^2b$**.**

[problema 1 do original]

4. Quem é menor -3 ou -9? ¼ ou ½ ? 1/16 ou ½?

[problema de familiarização elaborado pelo examinador]

5. Pode-se dizer que p é sempre menor que 3p **?**

[problema 2 do original, dividido em 3 partes]

6. Que a^2 é maior que a **?**

[problema 2 do original, dividido em 3 partes]

7. Que "-x" é um número negativo **?**

[problema 2 do original, dividido em 3 partes]

8. Qual é o perímetro de um quadrado de lado 5? E a área?

[problema de familiarização elaborado pelo examinador]

9. Um retângulo de lados 4c tem os outros dois lados medindo 3 unidades a mais (que os dois lados). Qual o seu perímetro e área?

[problema de familiarização elaborado pelo examinador]

10. Um lado de um retângulo é igual a 3m + 2n e, o outro lado é m - n maior (que aquele) lado. Determine a o perímetro e a área desse retângulo. [problema 3 do original]

11.Escreva alguns números pares.
[problema de familiarização elaborado pelo examinador]

12. Escreva alguns números ímpares.
[problema de familiarização elaborado pelo examinador]

13. O que é a fórmula geral para um dado número? [problema 4 do original]

Anexo E

Instrumento do Estágio do Processamento da Informação Matemática

Série X - composição de equações usando os termos de um problema

Objetivos da Série: 1) Generalização do método de raciocínio, lógica, encurtamento do raciocínio e percepção dos dados.

2) Flexibilidade de pensamento.

1. Um professor manda os alunos adicionarem 12 a um dado número e dividirem o resultado por 13; mas, um aluno desatento subtraiu 13 do número dado e dividiu o resultado por 12. Ele estava com sorte e obteve o resultado certo. Qual foi o número dado? *(R: 313)*

2. Adicionei 36 a um certo número e obtive o mesmo que se multiplicasse esse número desconhecido por 4. Qual é esse número? *(R: 12)*

3. Pensei em um número. A soma da metade com um terço desse número é sete unidades maior que um quarto desse número. Qual é o número? *(R: 12)*

4. Um bloco de anotações é 4 vezes mais caro que uma caneta; a caneta é R$ 0,30 mais barata que o bloco. Quanto custam a caneta e o bloco separadamente? *(R$ 0,10 e R$ 0,40)*

5. Em 3 prateleiras de um varejão há um número igual de laranjas. Quando tiverem sido vendidas 600 laranjas de cada prateleira, então todas as prateleiras juntas terão a mesma quantidade que tinham cada uma inicialmente. Quantas laranjas havia inicialmente em cada prateleira? *(R: 900 laranjas)*

6. A soma de 2 números é 20. Se um destes números é aumentado 5 vezes e o outro 4 vezes, a soma obtida será 92. Encontre os números. *(R: 12 e 8)*

7.Uma escola adquiriu livros para a biblioteca. Se tivesse pago esses livros com notas de R$ 3,00, teria usado 8 notas a mais do que se tivesse pago com notas de R$ 5,00. Qual foi o preço dos livros? *(R: R$ 600,00)*

8. Imagine 2 barris que contenham quantidades diferentes de água. Se retirarmos 1 litro de água do primeiro barril e colocarmos no segundo barril, os dois barris ficarão com a mesma quantidade de água. Se retirarmos 20 litros de água do segundo barril e colocarmos no primeiro barril, o primeiro barril ficará com o triplo de água do segundo barril. Quantos litros de água tem em cada barril? *(R: 43 litros e 41 litros respectivamente)*

9. Divida o número 100 em 4 partes diferentes, de maneira que se você subtrair 4 da primeira parte, somar 4 na segunda parte, multiplicar por 4 a terceira parte e dividir por 4 a quarta parte, você obterá o mesmo número. Quanto vale cada uma das quatro partes? *(R: 12, 20, 64 e 4 respectivamente)*

10. Eu agora tenho o triplo da idade que eu tinha quando meu irmão tinha a minha idade. Quando eu tiver a idade que meu irmão tem agora, juntos nós teremos 96 anos de idade. Qual é a nossa idade hoje? *(R: Eu tenho 24 anos e meu irmão tem 40 anos)*

Anexo F

Instrumento do Estágio do Processamento da Informação Matemática

Série XIII - problemas com várias soluções

Objetivos da Série: 1) Flexibilidade de pensamento e elegância da solução

2) Pensamento crítico e memória matemática.

1. Calcule a expressão:

   $(a^2a^2 - b)(a^8 - b)(a^n + b^n) =$, para a = 2, b = 4 e n = 3.

2. Calcule: $2ab + b^2 + a^2 =$, para a = 17 e b = 3

3. Resolva $x + \frac{1}{x} = 3\frac{1}{3}$

4. $113^2 - 112^2 =$

5. A diferença do quadrado de dois números consecutivos de um mesmo número é igual a 28. Encontre esses números.

Anexo G

Instrumento do Estágio do Processamento da Informação Matemática

Série XIV- problemas com mudança de conteúdo

Objetivo da Série: Flexibilidade de pensamento, estudar a mudança a partir de uma operação mental fixa para outra.

Resolva:

1) $(0{,}1mn^2 + 0{,}01m^2n)^2 =$

2) $(0{,}1mn^2 - 0{,}01m^2n)^2 =$

[variante do problema 1, trocou o sinal]

3) $(2a^2b^2c^2 - 2x^2y^2z^2)^2 =$

4) $(2a^2b^2c^2 - 2x^2y^2z^2)^3 =$

[variante do problema 3, trocou o exponte 2 pelo 3]

5) Duas torneiras são conectadas a uma piscina. A primeira enche a piscina em 2 horas e a segunda em 3 horas. Em quanto tempo as duas juntas encherão a piscina vazia?

6) Duas torneiras são conectadas a uma piscina. A primeira enche a piscina em 2 horas e a segunda esvazia a piscina em 3 horas. Em quanto tempo a piscina estará cheia se as duas torneiras estiverem abertas, uma enchendo e a outra esvaziando?

[variante do problema 5: a primeira torneira enche e a segunda esvazia]

Anexo H

Instrumento do Estágio do Processamento da Informação Matemática

Série XV- problemas de reconstrução de uma operação

Objetivos da Série: 1) Flexibilidade de pensamento;

2) Tipos de habilidade matemática.

B.

+ 12 - (-4) =	-19 - (+ 18) =
-17 - (-18) =	-9 - (+ 7) =
0 - (-6) =	14 - (- 11) =
7 - (+11) =	27 - (-9) =
-46 - (+3) =	19 - (+ 3) =
22 - (-3) =	-2 + (-3) =

C. Dado <u>a</u> . Adicione 2, multiplique por 2, eleve o resultado ao quadrado.

Faça o mesmo para : $2x$, $3m$, y^2, $3a^2$, b^n, $n+2$, $a^3 - 2$, $3a^n - 1$.

Dado $2b^n$, divida por 2, subtraia 2 e leve o resultado ao quadrado.

D. Resolva:

$(x + 2y)^2 =$	$(2mn + 2m)^2 =$
$(2m + 1)^2 =$	$(3a^2 + 2b^3) =$
$(x + xy)^2 =$	$(2a^3 - 3b^2)^2 =$

Anexo I

Instrumento do Estágio do Processamento da Informação Matemática

Série XVII - problemas diretos e reversos

Objetivo da Série: Reversibilidade de processos mentais.

Primeira parte:

Direto: Quantos dias um trabalhador deve trabalhar para ganhar b reais, se ele ganha c reais por dia?

Reverso: Quanto um trabalhador ganha em d dias, se ele ganha a reais em um dia de trabalho?

1) Problema de Familiarização elaborado pelo examinador: Quanto uma empregada doméstica recebe em 10 dias, se ela ganha 50 reais em um dia de trabalho?

Direto: A distância entre as cidades A e B é x km. Dois trens partiram, viajando um em direção ao outro. Um deles viajava a b km/h e o outro a c km/h. Depois de quanto tempo eles se encontraram?

Reverso: A distância entre 2 pontos é y km. Dois trens partiram , um em direção ao outro e se encontraram depois de n horas. Sabendo-se que um trem viajava a 40 km/h, qual a velocidade do outro trem?

Problema de Familiarização elaborado pelo examinador: A distância entre Campinas e São Paulo é 100 km. Dois ônibus partiram um da rodoviária de Campinas e outro da rodoviária do Tietê, um em direção ao outro. Se a velocidade de um é 90 km/h e eles se encontram depois de 30 min, qual a velocidade do outro ônibus?

Direto: Uma fábrica de auto peças, para atender um pedido, planejava fazer m peças em n dias, porém eles fizeram k peças a mais, terminando o serviço em t dias antes do prazo final. Quantas peças a mais por dia os funcionários fizeram?

Reverso: Uma fábrica de auto peças, para atender um pedido, planejou fazer a peças em um certo período e planejou para isso, fazer b peças por dia. Mas os funcionários excederam esta quota e fizeram n peças a mais por dia. Quantos dias antes do prazo final eles vão terminar o pedido?

Problemas de Familiarização elaborados pelo examinador: Uma fábrica de auto peças, para atender um pedido, planejou fazer 120 peças em um certo período e planejou para isso, fazer 12 peças por dia. Mas os funcionários excederam esta quota e fizeram 3 peças a mais por dia. Quantos dias antes do prazo final eles vão terminar o pedido?

Uma fábrica de auto peças, para atender um pedido, planejava fazer 1600 peças em 10 dias, porém eles fizeram k peças a mais, terminando o serviço 2 dias antes do prazo final. Quantas peças a mais por dia os funcionários fizeram?

Segunda parte:

1) $(a - b)^2 =$	1a) $a^2 - 2ab + b^2 =$
2) $(2a^3 - n^4)^2 =$	2a) $9a^4 - 6a^2m^2 + m^4 =$
3) $(3x + 1/3\ y^3)^2 =$	3a) $16x^2 - 4xy^2 + ¼\ y^4 =$
4) $(x^4 - y^n)^2 =$	4a) $-2xy + x^2 + y^2 =$
5) $(a - x + y)^2 =$	5a) $b^2 + (x - a)^2 - 2b(x - a) =$
6) $(x + y)(x - y) =$	6a) $a^2 - b^2 =$
7) $(2a^3 - 3b)(2a^3 + 3b) =$	7a) $9x^4 - 4y^2 =$
8) $(1/4\ p^3 + ½\ q^2)(1/4\ p^3 - ½\ q^2) =$	8a) $1/25\ m^4 - 4n^2m^6 =$
9) $(0{,}6m^n - ¼\ n^m)(0{,}6m^n + ¼\ n^m) =$	9a) $-0{,}25y^2 + 1/9\ x^2 =$
10) $(a + b - c)(a - b + c) =$	10a) $(x - y)^2 - 25y^8 =$

Terceira parte:

Divida oralmente $a^{64} - b^{64}$ por $(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16})(a^{32} + b^{32})$

Problemas da primeira parte - para aplicação:

1. Quanto uma empregada doméstica recebe em 10 dias, se ela ganha 50 reais em um dia de trabalho?

2.Quantos dias um trabalhador deve trabalhar para ganhar b reais, se ele ganha c reais por dia?

3.A distância entre Campinas e São Paulo é 100 km. Dois ônibus partiram um da rodoviária de Campinas e outro da rodoviária do Tietê, um em direção ao outro. Se a velocidade de um é 90 km/h e eles se encontram depois de 30 min, qual a velocidade do outro ônibus?

4. A distância entre 2 pontos é y km. Dois trens partiram , um em direção ao outro e se encontraram depois de n horas. Sabendo-se que um trem viajava a 40 km/h, qual a velocidade do outro trem?

5.Uma fábrica de auto peças, para atender um pedido, planejou fazer 120 peças em um certo período e planejou para isso, fazer 12 peças por dia. Mas os funcionários excederam esta quota e fizeram 3 peças a mais por dia. Quantos dias antes do prazo final eles vão terminar o pedido?

6.Uma fábrica de auto peças, para atender um pedido, planejou fazer a peças em um certo período e planejou para isso, fazer b peças por dia. Mas os funcionários excederam esta quota e fizeram n peças a mais por dia. Quantos dias antes do prazo final eles vão terminar o pedido?

Segunda parte - Problemas 1a) a 10a)

Terceira parte - Problema único

Reaplicação da Série XVII:

primeira parte:

1. Quanto uma empregada doméstica recebe em 10 dias, se ela ganha 50 reais em um dia de trabalho?

2. Quanto um trabalhador ganha em d dias, se ele ganha a reais em um dia de trabalho?

3.Quantos dias um trabalhador deve trabalhar para ganhar b reais, se ele ganha c reais por dia?

4.A distância entre Campinas e São Paulo é 100 km. Dois ônibus partiram um da rodoviária de Campinas e outro da rodoviária do Tietê, um em direção ao outro. Se a velocidade de um é 90 km/h e eles se encontram depois de 30 min, qual a velocidade do outro ônibus?

5. A distância entre 2 pontos é y km. Dois trens partiram , um em direção ao outro e se encontraram depois de n horas. Sabendo-se que um trem viajava a 40 km/h, qual a velocidade do outro trem?

6. A distância entre as cidades A e B é x km. Dois trens partiram, viajando um em direção ao outro. Um deles viajava a b km/h e o outro a c km/h. Depois de quanto tempo eles se encontraram?

7.Uma fábrica de auto peças, para atender um pedido, planejou fazer 120 peças em um certo período e planejou para isso, fazer 12 peças por dia. Mas os funcionários excederam esta quota e fizeram 3 peças a mais por dia. Quantos dias antes do prazo final eles vão terminar o pedido?

8. Uma fábrica de auto peças, para atender um pedido, planejou fazer a peças em um certo período e planejou para isso, fazer b peças por dia. Mas os funcionários excederam esta quota e fizeram n peças a mais por dia. Quantos dias antes do prazo final eles vão terminar o pedido?

9. Uma fábrica de auto peças, para atender um pedido, planejava fazer 1600 peças em 10 dias, porém eles fizeram k peças a mais, terminando o serviço 2 dias antes do prazo final. Quantas peças a mais por dia os funcionários fizeram?

10. Uma fábrica de auto peças, para atender um pedido, planejava fazer m peças em n dias, porém eles fizeram k peças a mais, terminando o serviço em t dias antes do prazo final. Quantas peças a mais por dia os funcionários fizeram?

Segunda parte - todos os problemas

Terceira parte - problema único

Anexo J

Instrumento do Estágio do Processamento da Informação Matemática

Série XVIII - tarefas heurísticas

Objetivos: 1) Lógica no raciocínio, independência e generalização;

2) Encurtamento de raciocínio.

Resolva:

1) $(a + b)(a - b) =$ 2) $(x + y)(x - y) =$

3) $(2m + n)(2m - n) =$ 4) $(3a^2 + b^3)(3a^2 - b^3) =$

5) $(1/2\,x - 1/3\,y)(1/2\,x + 1/3\,y) =$ 6) $(b^n - c^n)(b^n + c^n) =$

Idem para:

1a) $(a + b)^2 =$ 2a) $(x + y)^2 =$

3a) $(2m + n)^2 =$ 4a) $(3a^2 + b^3)^2 =$

5a) $(1/2\,x + 1/3\,y)^2 =$ 6a) $(b^n + c^n)^2 =$

Idem para:

1b) $(a + b)^3 =$ 2b) $(x + y)^3 =$

3b) $(2m + n)^3 =$ 4b) $(3a^2 + b^3)^3 =$

5b) $(1/2\,x + 1/3\,y)^3 =$ 6b) $(b^n + c^n)^3 =$

Anexo K

Instrumento do Estágio do Processamento da Informação Matemática

Série XXI - sofismas matemáticos

Objetivos da Série: 1) Lógica no raciocínio;

2) Flexibilidade de pensamento e tipos de habilidade matemática.

1) Dada a equação $\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x}$

Nós a transformamos em:

$\frac{x+5-5(x-7)}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x}$

$\frac{-4x-40}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x}$

$\frac{4x-40}{7-x} = \frac{4x-40}{13-x}$

$7 - \mathbf{x} = 13 - \mathbf{x}$

$7 = 13$

2) A soma de dois números idênticos e não - nulos é igual a zero.

Prova:

Condição: Seja $a = x$ não - nulos

multiplica (- 4a) dos dois lados

$-4a^2 = -4ax$

$0 = 4a^2 - 4ax$

some (x^2) dos dois lados

$x^2 = x^2 + 4a^2 - 4ax$

$x^2 = (x - 2a)^2$

$x = x - 2a$

Como $x = a$ pela condição, então

$a = a - 2a$

$a = -\mathbf{a}$

$a + \mathbf{a} = 0$ c.q.d.

Anexo L

Instrumento do Estágio da Retenção da Informação Matemática

Série XXII - problemas com termos difíceis de serem lembrados

Objetivo: Memória matemática, generalização e percepção das relações.

Leia cada um dos problemas e reproduza verbalmente seu enunciado:

1) Calcule de cabeça: $64.27 + 27.\ 27 + 9.27$

2) $(1/3\ x^2y^n + 4xyz^2)^2 =$

3) Que tipo de número a fração $\frac{n\ (n - 1)}{2}$ será quando n for qualquer número natural maior que 1. Um inteiro, uma fração ou zero?

4) Agora eu sou 2 vezes tão velho quanto você era quando eu tinha a idade que você têm agora. Quando você for tão velho quanto eu sou agora, juntos teremos 63 anos de idade. Qual a nossa idade agora?

Anexo M

Instrumento para investigar o tipo de habilidade matemática

Série XXIV - problemas com formulações visuais e verbais

Objetivos: 1) Tipos de habilidade matemática ;

2) Generalização e encurtamento de raciocínio, memória matemática.

1) O que é um coeficiente? Identifique os coeficientes das expressões algébricas:

$3a^2$ $\frac{3}{7}x^3$

m $4ab^n(3 + 2)$

$b.4$ $\frac{4}{5}ab$

$3b.2$ $\frac{5}{4} . 2y^n$

2) O que são os expoentes nas expressões? Defina e identifique.

$2a^3$ $\frac{1}{2}mn$

b^2 z

$-3x^2y^2$ $c/4$

$7xy^6$

3) Escreva a expressão algébrica dada, de forma que o coeficiente seja 1.

$3abc$ $7xy^3z$

$4m^2n^3$

4) Escreva a expressão algébrica dada, de forma que os expoentes sejam 1.

$2m^2n^2$ a^3bc

xy^4 $7c^4d^3$

5) Eleve ao quadrado a expressão 2a. Dobre seu resultado. Triplique a expressão $2x^2$. Eleve ao cubo o resultado. Adicione as duas expressões resultantes.

Anexo N

Porcentagem de respostas às proposições da escala de atitudes em relação à Matemática.

Tabela 51:

Porcentagem de Respostas às Proposições da Escala de Atitudes em relação à Matemática.

Proposição	Concordo Totalmente	Concordo	Discordo	Discordo Totalmente
1. (-) Eu fico sob uma terrível tensão na aula de Matemática.	5,1	16,1	42,7	36,1
2. (-) Eu não gosto de Matemática e me assusta ter fazer essa matéria.	3,1	8,6	42,0	46,3
3. (+) Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática.	29,5	40,6	19,7	10,2
4. (+) A Matemática é fascinante e divertida.	13,7	46,5	28,9	10,9
5. (+) A Matemática me faz sentir seguro(a) e é, ao mesmo tempo estimulante.	9,0	52,5	31,0	7,5
6. (-) "Dá um branco" na minha cabeça e não consigo pensar claramente quando estudo Matemática.	12,5	27,3	34,8	25,4
7. (-) Eu tenho sensação de insegurança quando me esforço em Matemática.	4,7	28,1	38,3	28,9
8. (-) A Matemática me deixa inquieto(a), descontente, irritado(a) e impaciente.	6,6	17,6	37,1	38,7
9. (+) O sentimento que tenho com relação à Matemática é bom.	28,1	51,6	16,0	4,3
10. (-) A Matemática me faz sentir como se estivesse perdido(a) em uma selva de números e sem encontrar a saída.	7,8	18,8	42,2	31,3
11. (+) A Matemática é algo que eu aprecio grandemente.	16,8	39,1	32,8	11,3
12. (-) Quando eu ouço a palavra Matemática, eu tenho um sentimento de aversão.	5,5	11,0	53,7	29,8
13. (-) Eu encaro a Matemática com um sentimento de indecisão que é resultado do medo de não ser capaz em Matemática.	7,0	26,2	39,5	27,3
14. (+) Eu gosto realmente de Matemática.	25,9	33,7	29,0	11,4
15. (+) A Matemática é uma das matérias que eu realmente gosto de estudar na escola.	24,2	36,7	28,9	10,2
16. (-) Pensar sobre a obrigação de resolver um problema matemático me deixa nervoso(a).	7,8	29,7	40,2	22,3
17. (-) Eu nunca gostei de Matemática e é a matéria que mais me dá medo.	5,1	11,7	36,7	46,5
18. (+) Eu fico mais feliz na aula de Matemática que na aula de qualquer outra matéria.	16,1	24,3	42,7	16,9
19. (+) Eu me sinto tranquilo(a) em Matemática e gosto muito dessa matéria.	21,9	33,6	34,8	9,8
20. (+)Eu tenho uma reação definitivamente positiva com relação à Matemática: eu gosto e aprecio essa matéria.	20,0	42,0	30,2	7,8