

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**O CONHECIMENTO GEOMÉTRICO DE ALUNOS DO CEFAM
SOBRE FIGURAS ESPACIAIS: UM ESTUDO DAS
HABILIDADES E DOS NÍVEIS DE CONCEITO**

**ODALÉA APARECIDA VIANA
ORIENTADORA: PROF^a DR.^a MÁRCIA R.F.BRITO**

2000

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**O CONHECIMENTO GEOMÉTRICO DE ALUNOS DO CEFAM
SOBRE FIGURAS ESPACIAIS: UM ESTUDO DAS
HABILIDADES E DOS NÍVEIS DE CONCEITO**

**ODALÉA APARECIDA VIANA
ORIENTADORA: PROF^a DR.^a MÁRCIA R.F.BRITO**

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida
por Odaléa Aparecida Viana e aprovada pela Comissão Julgadora.

____/____/____

(orientadora)

Comissão Julgadora:

2000

RESUMO

Este trabalho avalia o conhecimento geométrico de alunos do curso Cefam (Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério) sobre figuras tridimensionais mais comuns – que deveriam ser, de acordo com várias propostas curriculares, objetos de estudo das séries iniciais do Ensino Fundamental. Foram sujeitos da pesquisa 377 alunos das quatro séries do Cefam de Mogi das Cruzes-SP, tendo sido aplicado um questionário tipo lápis e papel. Além de serem avaliados com relação ao desempenho, os alunos foram classificados de acordo com os graus de aquisição dentro dos níveis de conceituação propostos por Van Hiele. Foram também analisadas duas habilidades: a visual/gráfica (através dos desenhos de planificação de figuras) e a verbal (através da linguagem utilizada para nomear e descrever propriedades das figuras), tendo sido criadas categorias de análises fundamentadas, respectivamente, nas teorias de Piaget sobre representação do espaço e de Vygotsky sobre a nomeação de conceitos científicos e espontâneos. Utilizando os testes estatísticos Chi-quadrado e Krustall-Wallis e nível de significância de 0,05, os resultados mostraram que influenciaram no desempenho o fato de gostar de geometria e matemática, a procedência dos alunos, a avaliação que fizeram do ensino de geometria e a sua série. A maioria dos alunos – que admitiu não estar preparada para ensinar geometria espacial – foi classificada nas categorias referentes a não-aquisição, baixa e média aquisição dos Níveis 1 (reconhecimento e nomeação de figuras) e 2 (análise de propriedades), estabelecidas a partir da porcentagem de acertos das questões selecionadas para representar cada nível. Existiu uma relação hierárquica entre os Níveis 1 e 2 ($r=0,58$). Influenciaram no desempenho dentro dos níveis o tipo de figura analisada e o tipo de habilidade requerida. O trabalho fez ainda uma interpretação dos Níveis 1 e 2 de Van Hiele tendo por base as teorias abordadas.

Ensino de geometria; conceitos geométricos; formação de conceitos; habilidades geométricas; Psicologia da Educação Matemática; Educação Matemática.

ABSTRACT

This work evaluates the student's geometrical knowledge from Cefam course about the commonest three-dimensional pictures – that should be, according to several curricular proposals, objects of study of the initial grades of the Elementary School. 377 students, from four grades of Cefam from Mogi das Cruzes – SP, were the subjects of this research and a questionnaire with pencil and paper was applied. Besides being evaluated regarding to the performance, the students were classified according to the degrees of acquisition within the levels of concept proposed by Van Hiele. Also two abilities were analyzed: the visual/graphical (through the pictures planning drawings) and the verbal one (through the language applied to name and describe the properties of figures). There were created categories of analyses based on the Piaget's theories about the spatial representation and on Vygotsky's, about scientific and spontaneous nomination of concepts. By using the statistics tests Chi-square and Krustall-Wallis and the level of significance of 0,05, the results show that have some influence on the performance the fact of enjoying Geometry and Mathematics, the students' background, the evaluation they make about the geometric teaching, and their grades. Most of the students – that admit not being prepared to teach spatial geometry – were classified into the categories referring to no-acquisition, low and medium acquisition of Levels 1 (recognition and nomination of pictures) and 2 (analysis of properties), established from the percentage of correct answers of the questions selected to represent each level. There is a hierarchiq relation between Levels 1 and 2 ($r = 0,58$). The kind of picture analyzed and the kind of ability required have some influence on the performance in the levels. The work still does an interpretation of Levels 1 and 2 from Van Hiele having as basis the broached theories.

Geometry teaching; geometric concepts; formation of concepts; geometric abilities; Psychology of Mathematics Education; Mathematics Education.

AGRADECIMENTOS

À professora Dr.^a Márcia Regina Ferreira de Brito pela orientação, pelas incansáveis leituras e correções, pelo incentivo dado e pelos exemplos de competência e profissionalismo demonstrados em todos os momentos.

À professora Irene Cazorla por suas excelentes aulas, pelo trabalho de revisão dos dados estatísticos e pelas sugestões dadas a este trabalho.

Aos professores do Curso de Mestrado pelas aulas que foram fundamentais na formação teórica.

Aos professores, colegas e amigos do PSIEM – grupo de pesquisa Psicologia da Educação Matemática – que muito colaboram nas etapas deste trabalho.

Aos funcionários da Secretaria de Pós-Graduação, pelo bom atendimento.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

A Ana Suzuki, pela revisão da escrita.

À professora e amiga Vera Lúcia Rodrigues da Silva pelo incentivo de todas as horas.

Ao meu filho Felipe, pelas leituras e comentários feitos.

Aos professores e direção do Cefam de Mogi das Cruzes pelo auxílio na aplicação do instrumento.

Aos queridos alunos do Cefam que, de maneira tão carinhosa e responsável, se empenharam em responder as questões propostas.

Aos meus pais, marido, filho, familiares e amigos pelo incentivo recebido.

A todas as pessoas envolvidas com a educação,
com as quais pude formar, ainda que em vários
níveis e sob várias perspectivas, conceitos
realmente verdadeiros.

ÍNDICE

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO II – O CONHECIMENTO GEOMÉTRICO: DO DESENVOLVIMENTO DA INTELIGÊNCIA À CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS EM SALA DE AULA.....	8
A origem dos conceitos geométricos.....	11
A formação de conceitos na perspectiva de Piaget.....	12
A formação de conceitos na perspectiva de Vygotsky.....	21
Uma contribuição das duas teorias.....	26
O ensino e a aprendizagem de conceitos em sala de aula e o uso de materiais.....	30
Os níveis de conceito segundo outros autores.....	33
CAPÍTULO III – O MODELO TEÓRICO DE VAN HIELE.....	37
CAPÍTULO IV – AS HABILIDADES GEOMÉTRICAS.....	49
A habilidade visual e a habilidade gráfica em geometria.....	55
A habilidade verbal em geometria.....	66
CAPÍTULO V – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	69
CAPÍTULO VI – OS CONCEITOS GEOMÉTRICOS INVESTIGADOS.....	85
CAPÍTULO VII- OBJETIVOS, MATERIAIS, PROCEDIMENTOS.....	92
CAPÍTULO VIII – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	97
1ªparte: Resultados quanto à caracterização, opiniões e desempenho dos sujeitos.....	97
2ªparte: Resultados quanto à comparação entre conceitos.....	125
3ªparte: Descrição das habilidades verbal e visual/gráfica.....	130
4ªparte: Resultados quanto aos níveis de Van Hiele.....	158
CAPÍTULO IX – DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E UMA SÍNTESE DAS TEORIAS.....	178
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	198
REFERÊNCIAS	200

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1.	Distribuição dos alunos de acordo com série e turma.....	97
Tabela 2.	Distribuição dos alunos Quanto à opinião em relação ao ensino de geometria.....	98
Tabela 3.	Distribuição dos alunos por série segundo opinião em relação ao ensino de geometria.....	99
Tabela 4.	Distribuição dos alunos quanto à opinião em relação à importância de se estudar geometria.....	100
Tabela 5.	Distribuição dos alunos quanto aos motivos pelos quais julgam a importância da geometria.....	101
Tabela 6.	Distribuição dos alunos quanto aos objetos de estudo da geometria plana.....	101
Tabela 7.	Distribuição dos alunos quanto aos objetos de estudo da geometria espacial.....	102
Tabela 8.	Distribuição dos alunos quanto ao gosto pela matemática.....	103
Tabela 9.	Distribuição dos alunos quanto ao gosto pela geometria.....	103
Tabela 10.	Distribuição dos alunos que afirmaram não gostar de geometria quanto aos motivos alegados.....	105
Tabela 11.	Distribuição dos alunos que afirmaram gostar de geometria quanto aos motivos alegados.....	105
Tabela 12.	Distribuição dos alunos que afirmaram gostar mais ou menos de geometria quanto aos motivos alegados.....	106
Tabela 13.	Distribuição dos alunos que afirmaram gostar de matemática quanto aos motivos alegados.....	106
Tabela 14.	Distribuição dos alunos que afirmaram não gostar de matemática quanto aos motivos alegados.....	107
Tabela 15.	Distribuição dos alunos que afirmaram gostar mais ou menos de matemática quanto aos motivos alegados.....	107
Tabela 16.	Distribuição dos alunos quanto aos aspectos positivos e negativos em geometria e matemática.....	108
Tabela 17.	Número de alunos e porcentagem que nomearam corretamente as figuras.....	110
Tabela 18.	Distribuição da porcentagem de acertos no reconhecimento de figuras por série.....	111
Tabela 19.	Distribuição da porcentagem de acertos no reconhecimento de figuras segundo tipo de figuras.....	112
Tabela 20.	Desempenho de alunos na planificação de figuras.....	113
Tabela 21.	Distribuição da porcentagem de acertos na planificação de figuras por série.....	114
Tabela 22.	Distribuição dos alunos de acordo com o tipo de descrição dada para cada figura	115
Tabela 23.	Distribuição da porcentagem de acertos em Propriedades das figuras ..	116
Tabela 24.	Distribuição dos alunos de acordo com o desempenho na questão nº9	117

Tabela 25.	Distribuição dos alunos de acordo com o desempenho na questão nº10	118
Tabela 26.	Distribuição dos alunos e acordo com o desempenho em Relações entre Propriedades.....	119
Tabela 27.	Distribuição das questões de acordo com o critério estabelecido para determinação do desempenho.....	120
Tabela 28.	Distribuição dos alunos por série quanto ao Desempenho.....	120
Tabela 29.	Distribuição dos alunos por série e turma quanto ao Desempenho.....	122
Tabela 30.	Distribuição das médias do Desempenho quanto à procedência.....	123
Tabela 31.	Distribuição das médias do Desempenho quanto à avaliação do ensino de geometria.....	123
Tabela 32.	Distribuição das médias do Desempenho quanto ao gosto por matemática e geometria.....	124
Tabela 33.	Distribuição dos alunos de acordo com os acertos na nomeação do cilindro.....	125
Tabela 34.	Distribuição dos alunos de acordo com o reconhecimento de paralelepípedos.....	126
Tabela 35.	Distribuição dos alunos de acordo com o reconhecimento de prismas..	126
Tabela 36.	Distribuição das questões por figura quanto aos critérios formados para comparar conceitos.....	127
Tabela 37.	Distribuição dos alunos de acordo com os nomes atribuídos a cada figura.....	130
Tabela 38.	Distribuição dos alunos de acordo com as categorias de linguagem para nomear figuras.....	136
Tabela 39.	Distribuição dos termos quanto às categorias de linguagem para descrever cubo, pirâmide, paralelepípedo e prismas.....	138
Tabela 40.	Distribuição dos alunos quanto às categorias de linguagem para descrever cone e cilindro.....	139
Tabela 41.	Distribuição dos alunos quanto às categorias de linguagem usadas para descrever cada figura.....	140
Tabela 42.	Distribuição dos alunos de acordo com os nomes atribuídos nas frases da questão nº9.....	141
Tabela 43.	Distribuição dos alunos quanto às categorias de planificação para cada figura.....	157
Tabela 44.	Distribuição das questões quanto aos níveis e critérios considerados.....	160
Tabela 45.	Distribuição da porcentagem de acertos segundo o nível das questões	160
Tabela 46.	Média da porcentagem de acerto nos níveis por série.....	161
Tabela 47.	Relação entre o Nível 1 e o Nível 2 em cada série.....	163
Tabela 48.	Distribuição dos alunos em relação aos níveis de Van Hiele.....	164
Tabela 49.	Distribuição dos alunos de acordo com a classificação nas categorias de aquisição dos níveis.....	167
Tabela 50.	Distribuição dos alunos nos graus de aquisição do Nível 1 quanto ao reconhecimento e nomeação corretos das figuras.....	171
Tabela 51.	Distribuição dos alunos nos graus de aquisição do Nível 1 quanto às categorias de linguagem mais freqüentes usadas para nomear figuras.....	172

Tabela 52.	Distribuição dos alunos nos graus de aquisição do Nível 2 quanto à identificação de figuras por propriedades	173
Tabela 53.	Distribuição dos alunos nos graus de aquisição do Nível 2 quanto às categorias de linguagem mais freqüentes para descrever propriedades	174
Tabela 54.	Distribuição dos alunos nos graus de aquisição no Nível 2 quanto à planificação correta.....	175
Tabela 55.	Distribuição dos alunos nos graus de aquisição do Nível 2 quanto às categorias de planificação	176
Tabela 56.	Distribuição dos alunos nas séries quanto aos graus de aquisição dos Níveis	177

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.	Nível 1- Primeira rede de relações dos Quadriláteros e losango.....	47
Figura 2.	Nível 2- Segunda rede de relações do losango.....	48
Figura 3.	Nível 3- Terceira rede de relações do losango.....	48
Figura 4.	Exemplos de uma organização e uma configuração não organizada....	58
Figura 5.	Objeto formado por setores, com duas organizações possíveis.....	59
Figura 6.	Planificações possíveis e não possíveis para o cubo.....	64
Figura 7.	Distribuição dos alunos quanto à série e ao Desempenho Geral.....	121
Figura 8.	Prisma normalmente usado para explicar o fenômeno de decomposição da luz.....	127
Figura 9.	Porcentagem de acerto por figura quanto aos critérios.....	129
Figura 10.	Porcentagem de acerto por critério quanto às figuras.....	129
Figura 11.	Representações necessárias para a planificação do paralelepípedo reto-retângulo.....	143
Figura 12.	Representações necessárias para a planificação de um prisma.....	144
Figura 13.	Representações necessárias para a planificação do cilindro.....	144
Figura 14.	Representações necessárias para a planificação de uma pirâmide.....	145
Figura 15.	Representações necessárias para a planificação do cone.....	145
Figura 16.	Pirâmide.....	159
Figura 17.	Média de porcentagem de acertos por nível e série.....	161
Figura 18.	Classificação da aquisição de um nível.....	165
Figura 19.	Modelos de grau de aquisição nas categorias mais freqüentes.....	168
Figura 20.	Modelos de grau de aquisição nos níveis nas categorias onde não se manteve hierarquia.....	170
Figura 21.	Paralelepípedo seccionado “ao meio” resultando dois cubos.....	185
Figura 22.	Vários tipos de prismas.....	190
Figura 23.	Cubo e pirâmide constantes na Questão n.º 1- Reconhecimento.....	192
Figura 24.	Cilindros constantes na Questão n.º 1- Reconhecimento.....	193

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1. Estrutura recursiva dos Níveis de Van Hiele.....	43
Quadro 2. Habilidades básicas em Geometria.....	54
Quadro 3. Distribuição dos exemplos de planificação do paralelepípedo de acordo com categorias.....	147
Quadro 4. Distribuição dos exemplos de planificação do prisma de acordo com categorias.....	149
Quadro 5. Distribuição dos exemplos de planificação da pirâmide de acordo com categorias.....	151
Quadro 6. Distribuição dos exemplos de planificação do cilindro de acordo com categorias.....	153
Quadro 7. Distribuição dos exemplos de planificação do cone de acordo com categorias.....	155
Quadro 8. Figuras geométricas utilizadas para verificação do Nível 1	159

ANEXOS

Anexo 1. Levantamento bibliográfico	212
Anexo 2. Instrumento	213
Anexo 3. Saídas do SPSS	220

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Entre aceitar a autonomia intelectual como sendo uma das grandes metas da educação do Ensino Básico e dar uma aula de geometria, há um longo caminho a ser percorrido, marcado por uma série de decisões por parte do professor. Decisões que são frutos de reflexões que envolvem, entre outras, questões de ordem epistemológica sobre como é processado o conhecimento.

Esse caminho não é feito de forma linear, visto que sua trajetória não é bem definida. Nem solitária, uma vez que muitos profissionais têm traçado rumos para a educação. E muito menos de forma autônoma, já que o professor acompanha os movimentos do ensino em geral e os da sua própria disciplina em particular.

Como exemplos desses movimentos, citam-se as mudanças ocorridas no ensino da matemática no Brasil nas últimas décadas. Elas foram um dos fatores que fizeram da geometria uma disciplina praticamente abandonada nas escolas (Miguel, Fiorentini & Miorim, 1992; Miorim, Miguel & Fiorentini, 1993; Pavanello, 1989; Peres, 1991). As dificuldades dos alunos em reconhecer e desenhar mesmo as figuras geométricas mais simples refletem as consequências desse abandono (Nasser, 1992; Oliveira, 1998; Pirola, 1995).

Fazendo uma rápida retrospectiva do ensino da geometria no Brasil, a partir da década de sessenta, pode ser constatado que nos anos sessenta e setenta ela fazia parte de um currículo organizado segundo o movimento da chamada Matemática Moderna. O currículo tinha como base a Teoria dos Conjuntos, as estruturas matemáticas e a própria lógica interna desta disciplina. Esses três elementos foram responsáveis pela “unificação” dos campos matemáticos, o que justamente se constituía num dos maiores objetivos do movimento. Para tanto, foi enfatizado o uso de uma linguagem matemática precisa e o de justificações matemáticas rigorosas.

Na época em questão, o uso das estruturas matemáticas era fundamentado nos trabalhos de Jean Piaget. Para esse autor, as estruturas da inteligência correspondem às estruturas sobre as quais se assenta o edifício matemático: estruturas algébricas,

estruturas de ordem, estruturas topológicas. (Artigue, 1993). Influenciados por Piaget, os educadores Dienes e Papy tentaram usar nas aulas essas três estruturas “mães” dos matemáticos bourbakistas (Matos, 1992).

Mas, na prática das escolas e nos livros didáticos, o que se verificou foi um abuso da linguagem e uma preocupação em tornar concretas, para as crianças, até mesmo noções abstratas (como os conceitos de conjunto vazio e infinito). Nessa perspectiva, o ensino de geometria para as crianças era iniciado com as noções “intuitivas” de ponto, reta e plano, sendo importante, neste estudo, o uso correto da linguagem : “o ponto pertence à reta”, “a reta está contida no plano”, “a intersecção das retas é um ponto” etc. Na intenção de se organizar o pensamento numa seqüência lógica – tratava-se aqui da lógica interna da própria matemática - os livros didáticos seguiam as orientações dos Guias Curriculares Nacionais (Brasil,1975). Eram estudadas, no então ensino de 1ºGrau (atual Ensino Fundamental), as definições de semi-retas, ângulos, polígonos etc – referentes à geometria plana – mas só no final do 2º Grau (atual Ensino Médio) seriam estudadas as figuras tridimensionais, ou seja, os conceitos da geometria espacial, como por exemplo, prismas, pirâmides etc..

Ao aproximar a Matemática escolar da Matemática pura e, portanto, ao orientar um ensino preocupado excessivamente com abstrações internas da disciplina, o movimento da Matemática Moderna desconsiderou um ponto básico que viria a ser o maior problema: o que ele propunha estava fora do alcance dos alunos, principalmente aqueles do Ensino Fundamental (Brasil,1997).

O movimento começou a entrar em refluxo no mundo todo, quando seus defensores perceberam que muitos dos seus princípios eram inadequados e que muitas distorções haviam acontecido durante sua implantação.

Em 1980, o *Nacional Council of Teachers of Mathematics* – NCTM – dos Estados Unidos, apresentou recomendações para o ensino de Matemática no documento “Agenda para Ação”. Destacavam-se nesse documento o foco na solução de problemas e a relevância dada aos aspectos sociais, antropológicos e lingüísticos da aprendizagem. Essas idéias influenciaram as reformas em vários países e surgiram, no período 1980/1995, propostas coincidentes em aspectos como a importância de o aprendiz ter um papel ativo na construção do conhecimento, a ênfase na solução de

problemas e a importância de se trabalhar com amplo espectro de conteúdos. Em 1989, o NCTM sugeriu que o ensino de geometria fosse iniciado a partir das primeiras séries, permitindo às crianças descrever, modelar, desenhar, comparar e classificar figuras planas e espaciais; reconhecer e apreciar a geometria no mundo; explorar transformações de figuras geométricas; representar e resolver problemas usando modelos geométricos. Sugeriu ainda que o desenvolvimento de idéias geométricas se processasse conforme uma hierarquia de níveis, onde primeiro o aluno reconhecesse figuras totais, depois analisasse propriedades, relacionasse as propriedades e fizesse deduções simples (NCTM,1989).

No final dos anos oitenta, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo lançou a Proposta para o Ensino de Matemática no 1º Grau, elaborada pela Equipe Técnica de Matemática da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP). A proposta surgiu como uma tentativa de responder a uma série de questionamentos que muitos professores faziam quanto ao ensino de matemática. Verificaram eles que uma metodologia que enfatizava os treinos algébricos, a mecanização de regras e esquemas de resolução, a memorização de fórmulas e sobretudo a exigência de um alto grau de abstração (em desacordo muitas vezes com o desenvolvimento do aluno) era incompatível com a formação de um sujeito autônomo e para isso se fazia necessária uma prática que levasse em consideração o que o aluno já sabia, as possíveis relações a serem feitas, a intuição, a argumentação e a criatividade.

A proposta da CENP explicitou então uma dupla função da disciplina nos currículos. De acordo com ela, a matemática seria importante por sua utilização nos aspectos práticos da vida, como na quantificação da realidade (medidas, grandezas, cálculos). Seria também igualmente importante para o desenvolvimento do raciocínio lógico, ou seja, da capacidade de abstrair, generalizar, projetar, "... transcender o que é imediatamente sensível" (São Paulo,1991-a). Assim, não se poderia privilegiar os aspectos utilitários da matemática – e não contribuir para o desenvolvimento da autonomia intelectual dos alunos – como também não se poderia formalizar seu ensino somente na tentativa de se desenvolverem as estruturas lógicas do pensamento – e retirar todo o seu significado prático para os alunos. Dessa forma, a proposta levantou

outra questão: a de como conciliar esses dois aspectos e sugeriu, para tal, uma nova abordagem dos conteúdos.

Os conteúdos foram distribuídos em três grandes temas: Números, Medidas e Geometria. A Geometria – iniciada já a partir da primeira série, com a introdução de atividades ligadas ao vocabulário fundamental para a Matemática – deveria levar o aluno a ampliar as noções de espaço quanto à posição, direção e sentido. Foram, a seguir, sugeridas atividades para a exploração sensorial de objetos, a distinção de formas, a representação de objetos através de modelos e, finalmente, a classificação de figuras geométricas segundo o critério de figuras planas e não planas. O aluno entraria em contato primeiramente com os objetos tridimensionais que fazem parte do seu cotidiano e uma das maneiras de analisar as propriedades das figuras espaciais seria decalcar as faces das partes planas no papel. Analisando esses decalques – na sua maioria polígonos – o aluno entraria em contato com a geometria plana. Nota-se, assim, a inversão dos conteúdos de geometria em relação àquele apresentado pelo movimento da Matemática Moderna.

Seja no tema números, seja em medidas ou em geometria, a Proposta da CENP utilizou um método de ensino baseado em Solução de Problemas. Tal método, quando utilizado pelo professor, serve para organizar o próprio conteúdo, pois todo conceito pode ser introduzido por um questionamento logo após uma atividade, ou um jogo, ou uma história, ou uma tabela de dados etc. Os alunos, nessa situação, são incentivados a dar suas opiniões, a registrá-las, a argumentá-las, a confrontá-las, até que eles consigam generalizar as situações, sendo que os trabalhos são feitos em grupo, com interação dos alunos nos grupos e inter-grupos. Tal procedimento poderia buscar apoio nas idéias de Polya, segundo o qual os problemas dão oportunidade para que os alunos sejam criativos, generalizem ou particularizem resultados, busquem analogias e compreendam os aspectos matemáticos em diversas situações.(Polya, 1970).

Em 1997, a Secretaria de Educação Fundamental do Ministério da Educação e do Desporto divulgou os Parâmetros Curriculares Nacionais, para todas as áreas do conhecimento¹, incluindo-se aí os chamados temas transversais², sendo que os oito

¹ As áreas do Conhecimento são: Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Naturais, História, Geografia, Artes, Educação Física e Língua Estrangeira.

anos do Ensino Fundamental foram divididos em quatro ciclos. No volume III, além de ser dada uma definição para o papel da matemática em duas direções – a que coloca a disciplina como importante na formação de capacidades intelectuais e a que realça sua aplicação em situações da vida cotidiana – foram também apontados alguns caminhos para “fazer matemática” na sala de aula através de recursos como: solução de problemas, história da matemática, tecnologia da informação e jogos. Os conteúdos – definidos como conceituais, procedimentais e atitudinais – foram divididos em quatro blocos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação.

Para o primeiro ciclo (correspondente às duas primeiras séries) foi feita a distinção entre espaço perceptivo e representativo e foram sugeridas, então, experiências sobre os objetos do espaço, como, por exemplo, fazer com que o aluno observe as formas geométricas presentes nos elementos naturais, compare objetos do espaço físico, reconheça objetos esféricos, cônicos, cúbicos, piramidais, prismáticos, percebam semelhanças e diferenças entre quadrados e cubos, paralelepípedos e retângulos, construa e represente formas geométricas etc.(Brasil, 1997).

Percebe-se que tanto o NCTM, a Proposta do Estado de São Paulo, e os atuais Parâmetros Curriculares Nacionais, ao proporem um ensino de geometria que não prioriza definições e cálculos, demonstraram preocupação com o raciocínio geométrico das crianças e sugeriram que o processo de ensino desse conteúdo fosse iniciado com as propriedades do espaço físico e com o reconhecimento das formas freqüentes nos objetos do cotidiano, que são tridimensionais.

É possível inferir que as propostas citadas tiveram preocupação em organizar o conteúdo de modo a favorecer uma aprendizagem significativa de conceitos e de procedimentos em geometria. Entende-se que aprendizagem significativa seja aquela onde o conhecimento novo possa se relacionar com outros já existentes na estrutura cognitiva. O conhecimento das formas existentes na natureza e no cotidiano do aluno – incluindo seu reconhecimento e sua exploração – é um conhecimento espontâneo que pode servir de ancoradouro para a formação dos conceitos. Sendo assim, parece

² Os temas transversais são Ética, Saúde, Meio Ambiente, Orientação Sexual, Pluralidade Cultural e outros, por exemplo, relacionados à educação do consumidor.

natural que se levante, entre outros, o tema relativo à compreensão do professor das séries iniciais quanto a esse novo enfoque da geometria, principalmente no que diz respeito ao seu próprio conhecimento.

Os cursos de formação de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, em especial o Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério (Cefam)³ deveriam oferecer um ensino de geometria que capacitasse o futuro professor para uma prática pedagógica voltada para essa perspectiva atual. No entanto, o ensino de geometria nesses cursos parece ser marcado pelas falhas oriundas do movimento da Matemática Moderna – pela influência que exerceram na formação dos professores atuais. Embora a Proposta Curricular de Matemática para o Cefam e Habilitação Específica para o Magistério (São Paulo, 1990) já tivesse fornecido elementos para o desenvolvimento de um ensino de geometria priorizando a formação de conceitos – através de experiência intensiva com objetos físicos para só depois fazer uso de definições e demonstrações – parece que, na prática, não ocorreram mudanças significativas. Ou seja, o ensino de geometria continua quase abandonado e um dos motivos para essa situação pode ser o fato de os professores não possuírem os conhecimentos geométricos necessários para a realização de sua prática (Brasil, 1997; Lorenzato, 1995). É possível perceber também um ensino preocupado com os nomes, as definições e uso de fórmulas de perímetro e área (raramente de volume) ou então em fazer com que o aluno tenha experiências com manipulação de objetos, mas sem propiciar condições para o desenvolvimento de seu conhecimento geométrico.

Entende-se que o conhecimento geométrico traduz-se nos conceitos geométricos que o indivíduo possui e nas relações que ele consegue estabelecer. Também fazem parte do conhecimento geométrico as maneiras como os conceitos e relações são utilizados, ou seja, os procedimentos aprendidos, entre eles as destrezas em geometria, como desenhar, planificar, usar nomes corretos, visualizar transformações em figuras, generalizar os conceitos para outros tópicos da matemática e para situações do dia-a-dia etc..

³ Os Cefam foram criados pelo Decreto 28.089 de 13 de janeiro de 1988. A parte mais importante do projeto, tal como foi concebido inicialmente pela Secretaria da Educação pode ser encontrada no Parecer CEE nº352/88.

Do exposto até o momento, três pontos são destacados, e o primeiro deles diz respeito às evidências de que geometria é uma parte da Matemática que tem sido pouco ensinada. Dados do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo - SARESP - mostram, por exemplo, que, na prova de Matemática aplicada aos alunos das quartas séries do Ensino Fundamental em 1997, o desempenho em Geometria e Medidas apresentou o pior resultado, com índice médio de 39% de acertos.(São Paulo, 1998).

O segundo se refere ao enfoque diferente que as propostas atuais de currículo dão ao ensino da geometria quando sugerem para início de trabalho, nas primeiras séries do Ensino Fundamental, a exploração das formas tridimensionais dos objetos e a verificação das propriedades das figuras espaciais, para só então introduzir a geometria plana – invertendo, portanto, o que parece ser feito nas escolas, onde a geometria espacial fica reservada para o Ensino Médio.

O terceiro ponto seria a competência dos atuais professores das séries iniciais para realizar, com eficiência e autonomia, o trabalho sugerido em geometria espacial. A eficiência pode ser traduzida em uma prática que possibilite às crianças a aprendizagem significativa de conceitos; a autonomia, na elaboração das atividades e dos materiais para esse fim.

Limitando aquela competência apenas ao conhecimento geométrico que se faz necessário para uma prática pedagógica eficiente e autônoma, e restringindo a investigação aos alunos de um curso de magistério, foram formuladas as seguintes questões: **Qual é o conhecimento sobre a geometria espacial apresentado pelos alunos do Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério⁴? Mais especificamente, que conceitos geométricos relativos às figuras tridimensionais possuem os alunos do Cefam? Quais habilidades eles demonstram possuir quando são solicitados a responder perguntas sobre as figuras espaciais?**

⁴ O Curso de Magistério recebeu, a partir de 1999, a denominação de Curso Normal. No entanto, continua a denominação Cefam.

CAPÍTULO II

O CONHECIMENTO GEOMÉTRICO: DO DESENVOLVIMENTO DA INTELIGÊNCIA À CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS EM SALA DE AULA

Os estudos a respeito do conhecimento em geometria evidenciam, entre outros itens, o conteúdo que está ou não presente na grade curricular das escolas. Conteúdo pode ser definido como “o conjunto de conhecimentos ou formas culturais cuja assimilação e apropriação é considerada essencial para o desenvolvimento e socialização do aluno” (Coll,1998, p.12).

No entanto, para que os conteúdos exerçam um papel importante na concretização das intenções educativas, entende-se que, no processo de apropriação do conhecimento, a aprendizagem deva ser significativa para o aluno (Pozo,1998).

Coll (1998), baseado em estudos anteriores da psicologia educacional, separou os seguintes componentes do conhecimento: os fatos e conceitos (importantes no conhecimento científico de qualquer área e, evidentemente, no conhecimento geométrico), os procedimentos (que se referem a uma atuação ordenada e orientada para a execução de uma tarefa, como por exemplo, as estratégias ou habilidades utilizadas para resolver problemas e para construir figuras) e as atitudes, normas e valores (que têm componentes cognitivo, afetivo e de comportamento).

Os fatos ou dados constituem a informação requerida pelo conhecimento em qualquer área, seja ela científica ou não. Porém, para que os fatos adquiram significado, os alunos devem dispor de conceitos para poder interpretá-los.(Pozo,1998). No caso da geometria, um exemplo de dado a ser ensinado é que o ângulo reto mede 90° . Não há como interpretar esse dado sem os conceitos de ângulo, de ângulo reto e de medida de ângulo. Por outro lado, é essa nova informação que será usada para formar o conceito de triângulo retângulo e tantos outros decorrentes deste. Pode-se dizer que aprender conceitos, fatos e princípios é aprender a dizer ou declarar coisas sobre as pessoas, objetos, acontecimentos etc. Isso equivale a reconhecê-los, compreendê-los, relacioná-los, estabelecer novas conexões etc.

Já os procedimentos são “os passos” pelos quais o pensamento é guiado durante uma ação. Os procedimentos que devem merecer maior atenção na escola são aqueles que resultam de um curso de ações e decisões de ordem interna e que envolvem os símbolos, as representações, as idéias, as letras, as imagens, os conceitos ou outras abstrações. Nos procedimentos em geometria, podem ser incluídas as habilidades de construir figuras com ou sem régua e compasso, de realizar medições, de aplicar fórmulas para solução de problemas, de realizar planificações de figuras espaciais, de compor e decompor figuras, de realizar secções em figuras etc. Os conceitos e os procedimentos estão em estreita vinculação. Sem ter algum conceito de semelhança, por exemplo, talvez um aluno não possa ser hábil em ampliar e reduzir figuras; no entanto, adquirir essa destreza utilizando quadriculados talvez possa contribuir para a formação do conceito de polígonos semelhantes.

Embora esse trabalho aborde especificamente a questão dos conceitos e das habilidades em geometria, não há como negar a importância das atitudes como um conteúdo de ensino, pois acredita-se, assim como Coll (1998), que as atitudes influenciam na aprendizagem de qualquer tipo de conteúdo educacional, seja referente a conceitos ou a procedimentos.

Segundo Brito (1996), atitude é uma disposição pessoal dirigida a objetos, eventos ou pessoas e que, de acordo com as experiências do indivíduo, pode assumir diferentes direções e graus de intensidade. As atitudes podem ser inferidas através do comportamento – apesar de se diferenciarem do temperamento, dos valores, dos hábitos e das habilidades – e uma das maneiras de manifestá-las verbalmente é através das opiniões. Assim, por exemplo, reconhecer que o estudo da geometria é importante e gostar de estudá-la poderiam ser indicativos de atitudes positivas em relação a essa parte da matemática.

Assim como os procedimentos e as atitudes, os conceitos são de fundamental importância na aprendizagem da geometria. Usando a distinção feita por Brito (1996), Klausmeier (1977) e Pirola (1995), pode-se diferenciar conceito como entidade pública de conceito como construto mental do indivíduo. Conceito como entidade pública é entendido como uma informação organizada, como uma definição aceita pelas pessoas de uma determinada área de conhecimento ou pelos membros de uma mesma

comunidade, e portanto aparece nos livros, dicionários, enciclopédias etc. Já os conceitos como construtos mentais referem-se às idéias que cada indivíduo desenvolve a fim de pensar sobre o mundo físico e social. Dependem não só das experiências que o indivíduo manteve com o conceito mas também dos seus padrões maturacionais.

Trazendo essa distinção para o caso dos conceitos geométricos, pode-se exemplificar como entidades públicas o conceito de poliedro¹ e o conhecimento da relação de Euler², que depois de passarem por um processo de conjecturas e refutações³, acabaram sendo aceitos pela comunidade matemática. No entanto, é possível que crianças de sete anos entrem em contato com os poliedros e formem o conceito em um nível mais elementar; que crianças de nove anos possam estabelecer alguma relação entre as faces, vértices e arestas de tais figuras e que adolescentes possam resolver problemas de inscrição desses sólidos em esferas. O conceito de poliedro – como construto mental – difere, portanto, para esses indivíduos, seja em razão das suas experiências ou do nível das operações mentais que podem realizar.

A aprendizagem de conceitos desempenha um papel fundamental na construção de conhecimentos de um indivíduo (Brito,1996). No cotidiano, os conceitos e as categorias permitem às pessoas organizar a realidade e poder prevê-la, sendo que as crianças, ao longo do seu desenvolvimento cognitivo, devem adquirir a maior parte dos conceitos que os adultos utilizam para que possam compreender e dar sentido a tudo que as cerca. Já os conceitos científicos, normalmente objetos de instrução, fazem parte de um sistema organizado, formando uma hierarquia conceitual (Pozo, 1998).

Aprender geometria é estabelecer relações significativas numa extensa rede conceitual, a qual, quanto mais entrelaçada estiver, maior possibilidade terá de propiciar ao aluno o domínio nessa área do conhecimento.

¹Considerando um número natural finito de n ($n > 3$) de polígonos convexos tais que: a) dois polígonos não estão no mesmo plano; b) cada lado de um polígono é comum a dois e somente dois polígonos; c) o plano que contém cada polígono deixa os outros dois num mesmo semi-espaço. Nestas condições ficam determinados n semi-espaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A intersecção destes semi-espaços é chamada poliedro convexo.

² Relação de Euler: $F + V = A + 2$, sendo F o nº de faces, V o nº de vértices e A o nº de arestas de um poliedro.

³ Conjecturas e refutações são termos que fazem parte da tese filosófica chamada Falibilismo (Lakatos, 1978).

Portanto, para que se possa avaliar o conhecimento geométrico dos alunos do Cefam, é importante compreender como ocorre a formação dos conceitos que de uma forma geral fazem parte do ensino sistemático na escola.

Para tanto, esse trabalho foi baseado em duas teorias cognitivas e desenvolvimentistas, a de Piaget e a de Vygotsky, embora sejam feitas referências a outros teóricos que também tratam do assunto.

A origem dos conceitos geométricos

Buscando na História a origem da geometria, poder-se-ia inferir que esta surgiu com Euclides quando escreveu *Os Elementos* em 300 a .C. A geometria teria surgido já organizada e de forma lógica, e isto implicaria que o seu ensino nas escolas também aconteceria através do estudo de axiomas e das demonstrações de teoremas.

No entanto, pode-se pensar que a geometria surgiu da vida prática e que levou muito tempo para se transformar em teoria matemática (Aleksandrov,1985). Para Freudenthal (1973) a geometria começou bem antes de Euclides, quando o homem começou a organizar as suas experiências espaciais. Buscando a natureza destas experiências, poder-se-ia admitir as idéias de Eves (1969), citado por Gerdes (1992), que afirma que o homem, através da percepção, reconhecia e comparava as formas existentes na natureza como, por exemplo, o contorno circular da Lua e as teias de aranha que se parecem polígonos. Ao observar a natureza e perceber regularidades nas formas, a mente reflexiva do homem construiu uma geometria intuitiva que depois viria a se tornar uma geometria científica.

No entanto, segundo Engels (1975) citado por Gerdes (1992), a capacidade do homem de geometrizar a realidade nasceu da necessidade do trabalho. Alexandrov (1974) citado por Gerdes (1992) dizia que as formas geométricas já existiam na natureza, e que os homens, através de uma observação ativa, puderam reproduzir estas formas em seus objetos diários. Assim, as melhores formas (curvas para as panelas de barro, retas para as cordas dos arcos) eram reproduzidas para satisfazerem essas necessidades. Só então as formas foram reconhecidas e consideradas como uma abstração do material.

Gerdes (1992) também argumenta que a geometria teria nascido como uma ciência empírica ou experimental para só depois se tornar uma ciência matemática. Analisa as relações entre o desenvolvimento das técnicas de confecção de objetos antigos (em especial o entrelaçamento de cestos e esteiras com paus e tiras) e o despertar do conhecimento geométrico. Afirma, ao contrário de Alexandrov, que não existiriam formas naturais que, *a priori*, se distinguíssem para serem observadas pelo homem. A regularidade das formas não foi observada para depois ser reproduzida nos objetos, mas sim o contrário. Isto é, na atividade criativa de elaborar seus instrumentos, o homem teria descoberto as vantagens de uma determinada forma e assim, sua regularidade. Para confeccionar vários objetos parecidos, a regularidade da forma simplificou a sua reprodução, assim cresceu o interesse pela forma, reforçou a consciência sobre ela, descobriu-se sua beleza e ela começou a ser reproduzida em outras situações. O pensamento matemático inicial teria então se libertado da necessidade material, e nascido assim o conceito de forma.

O mundo está repleto de formas. Em um vidro de perfume, em uma embalagem de presente, nas construções, nos apelos visuais de propaganda, nos logotipos, nas telas de computador, as formas são utilizadas tanto para responder a um teste de ergonomia, ou para satisfazer um senso estético, ou para garantir aspectos práticos e econômicos, ou para corresponder a um modelo científico. As formas podem ser vistas e apreciadas pelas crianças, mas, assim como aconteceu na história da humanidade, talvez não seja apenas pela observação delas que o aluno possa construir os conceitos geométricos. Para aprender a geometria que é ensinada nas escolas, o aluno, mais do que conhecer formas, deve dominar uma imensa teia de conceitos. E o tema do presente trabalho é a construção desse conhecimento.

A formação de conceitos na perspectiva de Piaget

Para Piaget (1971), o conhecimento é construído através das interações do indivíduo com o mundo. O processo de construção tem algumas características básicas: as biológicas (onde se entende a maturação do sistema nervoso), as

referentes às transmissões sociais (que podem ocorrer dentro ou fora da escola) e a que diz respeito às experiências (sejam físicas ou lógico-matemáticas). Isoladamente, nenhum desses três fatores é responsável pela construção, mas é na coordenação entre eles – a equilibração – que a estrutura cognitiva é formada (Piaget, 1967).

O desenvolvimento do conhecimento é um processo espontâneo, ligado aos processos da embriogênese. Para uma pessoa conhecer um objeto é necessário abstraí-lo reflexivamente para assimilá-lo e conseqüentemente integrá-lo aos esquemas já construídos. Os esquemas (construções mais simples) ou estruturas (construções mais complexas, como são as operatórias) são então modificados a fim de acomodar o elemento novo, através do processo de auto-regulação ou equilibração. O desenvolvimento dessas estruturas acontece de forma seqüencial e integrativa, fato que levou à classificação dos quatro estágios de desenvolvimento: sensório-motor, pré-operatório, operatório concreto e hipotético dedutivo.

Para estudar, portanto, como acontece o desenvolvimento cognitivo, podem ser destacados os aspectos referentes ao conteúdo da inteligência (que varia com a idade do indivíduo), às estruturas cognitivas (que também mudam com a idade e são propriedades organizacionais da inteligência) e à função da inteligência (que possui características válidas para todas as idades e que definem a própria essência do pensamento inteligente).

As estruturas cognitivas são mediadoras entre as funções invariantes e os variados conteúdos comportamentais. O panorama das estruturas em mudança é subdividido em estágios; a seqüência dos estágios é invariante e as estruturas que definem os estágios anteriores integram-se ou incorporam-se às estruturas dos estágios seguintes.

No período da inteligência sensório-motora (0 a 2 anos, aproximadamente) a criança se desenvolve de um período neonatal, onde ela não diferencia a si própria do mundo, para uma organização relativamente coerente de ações sensório-motoras diante do ambiente físico que a rodeia. É o período da inteligência prática, onde ela é incapaz de utilizar símbolos para representar as suas ações (Flavel, 1970).

Com o aparecimento da linguagem, inicia-se o período pré-operatório (2 a 7 anos) onde a criança desenvolve a capacidade representativa que permite que ela comece a

verbalizar o que, até então, só sabia realizar motoramente. Nesta passagem da ação física à representação intervêm os mecanismos de abstração e generalização, responsáveis pela formação de conceitos.

A partir de sete ou oito anos, a criança pensa antes de agir, começando, assim, a conquista desse processo difícil que é a reflexão (Piaget, 1967). É o período das operações concretas, quando a criança começa a se libertar do seu egocentrismo intelectual, tornando-se assim capaz de novas coordenações, pois começa a desenvolver o raciocínio lógico. No entanto, ela pensa concretamente sobre cada problema à medida que a realidade os propõe, não conseguindo ligar suas soluções por meio de teorias gerais, como por exemplo, os princípios (Piaget, 1967).

No período que corresponde ao da adolescência, o indivíduo é capaz de construir as operações mentais próprias do nível formal de pensamento. Ele se abstrai do conteúdo material e o seu pensamento começa a manipular proposições ou declarações feitas a respeito desse conteúdo, por intermédio de palavras, de símbolos matemáticos e de outras formas de linguagem. Comparando esse período ao anterior, pode-se dizer que o pensamento concreto é a representação de uma ação possível; já o pensamento formal é a representação de uma representação de ações possíveis (Piaget, 1967). As operações formais permitem a construção de vários conceitos importantes para o trabalho na física, química, filosofia etc. (Faria, 1989). Em geometria, muitos dos procedimentos que os adolescentes usam para resolver questões devem estar ligados às próprias características do estágio de desenvolvimento em que se encontram. Assim, a demonstração de teoremas deve ser uma tarefa possível de ser realizada apenas por indivíduos capazes de pensar de uma maneira hipotético-dedutiva.

Sob a perspectiva piagetiana, pode-se compreender a formação de conceitos – tema de especial interesse neste trabalho – através do entendimento das operações que um indivíduo pode realizar ao longo do seu desenvolvimento. Tendo como base a teoria de Piaget, Lovell (1977) define um conceito como uma generalização a partir de dados relacionados e que possibilita responder a algo ou pensar em estímulos ou percepções específicos de uma determinada maneira. Um conceito equivale a um juízo e se utiliza como um critério.

O início do processo de formação de conceitos começa, na criança, com a percepção, isto é, com a atividade perceptiva. Ela passa, então, a discriminar e a generalizar a partir dos dados da realidade em sua volta. Ao generalizar, os conceitos proporcionam palavras para representar toda classe de objetos, qualidades ou acontecimentos.

A percepção é a interpretação que o sujeito dá às sensações experimentadas quando submetido aos estímulos visuais, sonoros, táteis, gustativos e olfativos. A percepção depende também do reforço dessas sensações com experiências anteriores, idéias, imagens, expectativa e atitudes. Piaget utiliza a expressão “atividade perceptiva” para explicar que ela é o prolongamento da inteligência sensório-motora em ação antes do aparecimento da representação. Evidentemente, na medida em que se desenvolve a inteligência representativa e depois a operatória, tal desenvolvimento influi na própria atividade perceptiva (Piaget&Inhelder, 1993).

A discriminação acontece quando, frente a objetos ou acontecimentos, a criança reconhece e aprecia qualidades comuns e distingue estas de outras propriedades diferentes. Por exemplo, o traço comum entre vários círculos de diâmetros e materiais diferentes é a “redondez” do círculo, e o reconhecimento dessa característica em todos os objetos constitui um avanço na formação desse conceito.

Discriminando essa característica, a criança abstrai e a seguir generaliza o conceito de círculo para outros objetos ou outras situações. As abstrações e generalizações prosseguem com maior facilidade e rapidez se a criança puder manter uma variedade de experiências estimulantes e se estas estiverem de acordo com o seu desenvolvimento.

A linguagem e os símbolos matemáticos intervêm na conceituação porque capacitam o indivíduo a captar ou clarear os conceitos. No entanto, mesmo considerando que a linguagem ajude no processo de formação e estabilização de um conceito, ela pode ser insuficiente para dar origem às operações mentais realizadas nesse processo. A linguagem pode traduzir o que já foi compreendido; é, assim, essencialmente um veículo simbólico. Tanto um adulto como uma criança podem ter alcançado um conceito suficientemente válido para seu emprego na vida e, no entanto, serem incapazes de defini-lo em termos verbais (Lovell, 1977).

Ainda com respeito à linguagem, pode-se admitir que a criança muitas vezes usa as palavras que designam conceitos, sejam estes particulares ou gerais, do modo como foi ensinada. Os adultos ensinam primeiro as palavras que designam os objetos mais comuns do cotidiano. Lovell (1977), por exemplo, verificou que os adultos ensinam primeiro *peixe* antes de *salmão*; no entanto, as palavras *colher* e *garfo* são ensinadas antes de *talheres*. Portanto, os conceitos podem alcançar um alto grau de abstração ou de concretização, de onde se deduz que os termos usados pelas crianças muitas vezes não refletem tanto as suas experiências intelectuais, mas sim as que os adultos consideram importantes. Segundo Lovell (1977), os adultos, de certa forma, impõem suas estruturas cognitivas às crianças.

Para Piaget, as ações que a criança realiza com os objetos são as responsáveis pela formação dos conceitos. Todo pensamento – conjunto de idéias em conexão e dirigidas para um certo fim – surge dos atos, sejam eles realizados com objetos físicos, sejam eles interiorizados. As crianças não podem, portanto, formar conceitos através de meras observações, pois há a necessidade de serem construídos sistemas de operações mentais, e tais sistemas se baseiam na coordenação das ações realizadas. O tipo de conceito que elas podem construir depende do nível de abstração do qual são capazes. Assim, a partir dos doze anos, podem construir tipos de conceitos mais avançados, estruturar e coordenar ações (na mente) sobre relações que em si mesmas resultam da coordenação de atos. Os conceitos matemáticos, por exemplo, correspondem a um tipo especial de generalizações sobre relações entre certas classes de dados.

Com base nas características de cada período do desenvolvimento cognitivo, poder-se-ia tentar acompanhar como o aluno se apropria do conhecimento geométrico que lhe é transmitido na escola. No entanto, convém estabelecer a distinção entre três tipos de conhecimento: o conhecimento físico, o conhecimento social e o conhecimento lógico-matemático. Alguns exemplos de conhecimento geométrico podem esclarecer melhor esta distinção, como pode ser verificado a seguir.

O conhecimento físico é o conhecimento obtido através das abstrações físicas ou empíricas, quando o indivíduo percebe propriedades que estão nos objetos, na realidade externa. A abstração empírica tira as informações dos objetos como tais, ou

das ações do sujeito sobre suas características materiais. Observar a posição que permite um cilindro rolar ou comparar empiricamente as áreas de dois pedaços de papel retangulares são dois exemplos de experiência física .

O conhecimento lógico matemático é obtido através das abstrações reflexivas e envolve a construção de relações entre os objetos. Essas relações não existem na realidade externa. Se, em uma atividade de classificação, a criança reunir o cilindro com a esfera porque ambos podem rolar, essa relação foi feita pela criança através da abstração reflexiva. Outro exemplo seria a comparação de áreas de retângulos e paralelogramos por compensações de superfícies e a generalização decorrente da coordenação dessas ações.

O conhecimento social tem como fonte primária as convenções desenvolvidas pelas pessoas. Mostrar formas geométricas com seus respectivos nomes é um exemplo de conhecimento social, onde os nomes podem ser absolutamente arbitrários. Para que as transmissões sociais possam interferir no desenvolvimento do conhecimento as influências não podem ser recebidas passivamente, e nem assimiladas em bloco, de uma só vez. As informações devem ser gradativamente organizadas à medida que vão sendo incorporadas pelo sujeito. Assim, pode-se entender o papel das transmissões sociais no processo de construção do conhecimento.

Com respeito a esta questão da transmissão social, Nunes (1997) enfoca o papel das convenções sociais que tanto influenciam a formação de conceitos pela criança. Segundo a autora, existe um conjunto de convenções que foram criadas pelos nossos ancestrais, que foram transmitidas através das gerações e que fazem parte da cultura em que o aluno está inserido. Essas convenções podem ter uma lógica por detrás – como acontece com o nosso sistema de numeração decimal – e essa lógica, portanto, deve ser compreendida pelo aluno. Classificar e nomear as figuras geométricas pelo número de lados também é uma convenção que tem o objetivo de facilitar o estudo da geometria na escola. Por convenções sociais também pode ser entendida a utilização de nomes de figuras geométricas para identificar objetos do cotidiano do aluno, como por exemplo: paralelepípedo (para pedra no calçamento de ruas), quadrado (para pipa) e triângulo (para instrumento musical). Na escola, o processo de formação dos conceitos geométricos de paralelepípedo, quadrado e triângulo talvez seja influenciado

por essas convenções que refletem um conhecimento pertencente à cultura do indivíduo.

A construção do espaço

A partir das idéias de Piaget, podem-se inferir algumas diretrizes para o ensino da matemática em geral e da geometria em particular. Admitindo que o estudo do espaço e das relações espaciais faça parte dessa área, é importante que os professores conheçam as idéias desse autor sobre a construção da noção de espaço pela criança – uma das construções que explicam o desenvolvimento infantil.

Piaget estabelece um paralelo entre as operações concretas de caráter lógico-aritmético e as operações concretas de caráter espaço-temporal. As primeiras apoiam-se exclusivamente nas relações de semelhanças (classes e relações simétricas), de diferenças (relações assimétricas) ou das duas ao mesmo tempo, sendo que tais relações são inferidas pelo sujeito a partir de ações com objetos discretos, reunidos em conjuntos descontínuos e independentes de sua configuração espacial. São elas que irão permitir, por exemplo, a construção do número pela criança. Já as operações de caráter espaço-temporal ou infra-lógico⁴ acabam na construção de esquemas únicos e contínuos⁵ e são as constitutivas das noções de espaço, descritas a seguir.

A criança constrói as noções de espaço por meio de uma liberação progressiva e gradual do egocentrismo. Essa construção se faz por etapas. As primeiras noções construídas são as referentes ao espaço prático, da ação, que ela constrói por meio dos sentidos e através dos seus próprios deslocamentos. Com o aparecimento da linguagem e da representação simbólica em geral, começa a se constituir o espaço representativo, sub - dividido em espaço intuitivo e espaço operatório. As relações que a criança realiza e que permitem a construção da noção de espaço são as relações topológicas, as projetivas e as euclidianas (Piaget&Inhelder,1993).

⁴ O termo infra-lógico não significa que essas operações são inferiores às operações lógico-aritméticas, mas simplesmente que elas são formadoras da noção do objeto como tal, em oposição aos conjuntos de objetos.

⁵ O contínuo intervém, num certo grau, na elaboração da série de números racionais e irracionais.

a) Relações topológicas

São as relações de *vizinhança* ou *proximidade* (quando a criança, por exemplo, percebe a proximidade dos elementos num mesmo campo), *separação* (quando percebe que os objetos ocupam posições distintas no espaço), *ordem ou sucessão* (quando estabelece relação de ordem, em uma organização espacial), *envolvimento ou fechamento* (quando relaciona o que está entre, ou então o que está dentro ou fora - em duas ou três dimensões), *continuidade* (quando reconhece e representa pontos em seqüência). As relações topológicas elementares são construídas entre partes vizinhas de um mesmo objeto ou então entre um objeto e sua vizinhança imediata, de modo contínuo e sem referência às distâncias. Um espaço topológico é, pois, uma reunião contínua de elementos, deformáveis por estiramentos ou contrações. Assim, as relações topológicas permitem à criança distinguir figuras abertas e fechadas, mas não permitem que ela faça distinção entre um círculo e um quadrado.

b) Relações Projetivas

São as relações que permitem a coordenação dos objetos entre si num sistema de referência móvel, dado pelo ponto de vista da própria criança. As noções de direita e esquerda são exemplos dessas relações, que vão se desenvolvendo em três fases (dos 5 anos até 12, aproximadamente), onde, na última fase, a criança mostra a liberação do egocentrismo, conseguindo localizar os objetos sob vários pontos de vista. O espaço projetivo não conserva ainda as distâncias e as dimensões como um sistema de coordenadas, mas conserva as posições relativas dos elementos das figuras ou das figuras em relação às outras. O desenho de um cubo em perspectiva, por exemplo, coloca os elementos das figuras (arestas) uns em relações aos outros segundo certas dimensões aparentes, coloca as figuras (quadrados) em relações, coloca o conjunto em relação ao ponto de vista considerado.

c) Relações Euclidianas

São as relações que permitem localizar objetos em um sistema de referência e têm como base a noção de distância. Para tal construção são necessárias a conservação de distância, de comprimento e superfície e a construção de medida em uma, duas ou

mais dimensões (quando, por exemplo, um retângulo de papel é recortado pelo aluno e os dois pedaços são novamente colados em outra posição, sem superposição, é possível verificar se o aluno acha que a área do retângulo mudou ou não) e a elaboração de um sistema de coordenadas para localização no plano e no espaço e as conseqüentes transformações geométricas (as que preservam comprimento e ângulo – translação, rotação, simetria e as que preservam apenas ângulos – semelhanças). Embora haja distinção entre os espaços projetivo e euclidiano, as duas construções são solidárias, pois é na medida em que o sujeito chega a coordenar os pontos de vista de um objeto é que ele consegue coordenar as distâncias, e assim localizar objetos tendo como referência um sistema de coordenadas.

É possível entender, então, que, se para construir a noção de número é necessário um sistema de operações lógico-aritméticas, para construir os conceitos geométricos que são ensinados nas escolas, as crianças devem possuir um sistema de operações mentais concretas de caráter espaço-temporal que substituem a noção de semelhança pela de vizinhança, a noção de diferença em geral pela de diferença de ordem ou colocação e a noção de número pela de medida. Conhecendo-se um pouco mais sobre as relações espaciais construídas pelas crianças, pode-se pensar na forma como os conteúdos são tradicionalmente trabalhados nas aulas de geometria, como, por exemplo, o ensino de cálculo de áreas de figuras para crianças que ainda não conservam a superfície e nem construíram a noção de medida em duas dimensões.

Assim, em uma aula onde se tenta trabalhar um conceito geométrico, dependendo da fase de desenvolvimento em que a criança esteja, pode haver até compreensão real do que foi ensinado; mas se ela tiver poucas oportunidades para reorganizar o que está sendo dado, é grande a probabilidade de as mudanças de raciocínio serem momentâneas e de as generalizações serem limitadas (Seber,1989).

Como o aspecto construtivista da teoria de Piaget está diretamente ligado à atividade do sujeito, é importante refletir sobre o papel das interações sociais no processo de conhecimento e, em particular, o papel do professor em sala de aula. Leite (1993) faz a seguinte pergunta: *"Se é o sujeito que constrói, pode-se ensinar o que se há de construir? A resposta só pode ser sim, pois é o professor que orienta o que vai*

ser construído, que ajuda a desencadear novos processos de equilíbrio” (Leite,1993,p.12).

Para Coll (1994), embora a atividade auto-estruturante esteja na base do processo de construção do conhecimento, isto não implica que seja impermeável à influência do professor e da intervenção pedagógica. Pelo contrário, parece que é esta influência que faz com que a atividade do aluno seja ou não auto-estruturante e dessa forma tenha um maior ou menor impacto sobre a aprendizagem escolar.

A ação pedagógica, assim como situou Macedo (1993), é um desafio para o professor, pois este, como desencadeador de novos processos de equilíbrio, deve levar em consideração alguns princípios: verificar se o aluno tem as estruturas necessárias para a construção que se pretende, privilegiar as descobertas das crianças e respeitar suas respostas, encaminhando os questionamentos de tal forma que o aluno venha a tomar consciência das suas contradições, assim como garantir a motivação em sala de aula (Seber,1989).

Shulmann (1989), citado por Moro (1996), estuda a cognição do professor e afirma que falta muito para esclarecer sobre a relação existente entre o conhecimento do professor e a instrução que é feita por ele aos alunos. No caso do sujeito dessa pesquisa, pode-se imaginar que, além do nível de conceituação desse aluno sobre as figuras espaciais, talvez a maneira como ele formou esses conceitos possa vir a influenciar sua prática futura. Ou seja, partindo do pressuposto piagetiano de que a construção do conhecimento é psicogenética em uma continuidade funcional, então a concepção dos alunos do Cefam sobre a geometria poderá fazer parte das suas elaborações futuras, quando ensinará os conceitos para as crianças (Becker, 1990; Moro, 1996).

A formação de conceitos na perspectiva de Vygotsky

Para Vygotsky (1995) existem os conceitos espontâneos (ou cotidianos) e os não-espontâneos (ou científicos). Os espontâneos são aqueles que a criança adquire fora do contexto escolar, que não foram apresentados a ela de forma sistemática, embora sempre mediados por adultos. Os científicos são aqueles apresentados explicitamente

por um professor, na forma de um sistema de idéias inter-relacionadas, e que serviriam para entendimento de uma área de conhecimento.

No entanto, para esse autor, os dois processos – o de desenvolvimento dos conceitos espontâneos e o dos científicos – se relacionam e se influenciam constantemente, fazendo parte de um único processo: o de desenvolvimento da formação de conceitos. O processo de formação de conceitos é afetado por diferentes condições internas e externas à criança, sendo que a aprendizagem de conceitos em idade escolar é uma poderosa força que direciona todo o desenvolvimento mental da criança (Vygotsky, 1995). Assim, a educação é vista como um dos fatores a produzir o desenvolvimento cognitivo, idéia que contradiz a de Piaget, pois para este último a aprendizagem só se dá em virtude do desenvolvimento.

Para Vygotsky, embora os conceitos possam ser formados a partir do nascimento, é na adolescência que os processos amadurecem, tomam forma e desenvolvem-se as funções intelectuais que formam a base psicológica do processo de formação de conceitos.

De acordo com Vygotsky,

“ A formação de conceitos, resultado de uma atividade complexa onde tomam parte as funções intelectuais básicas,...não pode ser reduzido à atenção, à inferência ou às tendências determinantes...A palavra é o meio pelo qual se conduzem as operações mentais que levam à formação dos conceitos, é a causa psicológica imediata da transformação radical por que passa o processo intelectual no limiar da adolescência.” (Vygotsky, 1995,p.50)

Assim, os conceitos que os adultos apresentam são precedidos por vários “protoconceitos”, sendo que a principal diferença entre tipos inferiores e superiores de atividade mental é que estes últimos são operações mediadas através de signos (Veer,1991).

No desenvolvimento da criança rumo ao pensamento conceitual real, Vygotsky distinguiu, por meio de uma série de experimentos, três estágios: (1) do sincretismo, (2) da formação de complexos, (3) da formação potencial de conceitos.

No primeiro estágio, do sincretismo, através de uma percepção global e indistinta, a criança agrupa os objetos com base nos fatores perceptuais irrelevantes, como a proximidade espacial, e não com base em características comuns que eles venham a ter. Existem aqui três sub-fases: primeiramente há a fase da tentativa e erro – o grupo é criado ao acaso, e os objetos são experimentados de forma arbitrária quando a criança é corrigida. Em seguida, o grupo é determinado pela posição espacial dos objetos, por uma organização visual da criança, puramente sincrética. Por fim, a criança seleciona vários grupos sincréticos dos quais separa diversos objetos para formar um novo grupo sincrético. Nesse primeiro estágio, a criança pode comunicar-se com os adultos de forma adequada, embora as palavras usadas por ela ainda não sejam conceitos, em um sentido real.

O segundo estágio é marcado pelo chamado pensamento por complexos, superior ao pensamento sincrético. Aqui a criança seleciona os objetos com base em alguma característica objetiva concreta, embora esta possa parecer irrelevante para o adulto e possa ser modificada uma ou mais vezes durante o processo de ordenação. Não é possível também encontrar uma única característica comum a tais complexos. Este estágio é subdividido em cinco sub-fases:

- (a) Complexos associativos, onde a criança acrescenta objetos ao primeiro objeto porque eles compartilham uma característica, como por exemplo, a cor. Um outro objeto pode ser associado ao primeiro pela característica forma, outro pelo tamanho, outro ainda pela proximidade etc. Percebe-se que a característica é mutável. A palavra, neste estágio, refere-se ao nome da família de um grupo de objetos relacionados entre si de muitas formas.
- (b) Coleções, onde os objetos são agrupados com base em alguma característica que os torna diferentes e, conseqüentemente, complementares entre si. Assim, se um primeiro objeto for uma pirâmide amarela, a criança irá acrescentar objetos com outras cores e formas, até que todas as cores e formas estejam representadas. Este estágio do pensamento infantil tem suas raízes na experiência que a criança obtém

no dia-a-dia quando agrupa objetos com base na sua cooperação funcional: coleção de garfo, faca, colher e prato, conjunto de roupas que usa etc.

- (c) Complexos em cadeia, uma junção dinâmica e consecutiva de elos isolados numa única corrente, com a transmissão de significado de um elo para o outro. O critério de seleção muda o tempo todo, mas a criança é inspirada apenas pelo último objeto que ela selecionou e deixa de levar em conta o primeiro objeto. O complexo em cadeia não possui núcleo, mas há relações entre elementos isolados.
- (d) Complexos difusos, onde o próprio critério de seleção é fluido, indeterminado, com tendência a expandir-se pelos acréscimos de mais e mais elementos à coleção original. Por exemplo, a criança pode combinar triângulos com trapézios, pois suas formas são vagamente similares.
- (e) Pseudoconceitos, que é a ponte entre a fase dos complexos e o estágio final mais elevado do desenvolvimento da formação conceitual. Nesta fase, a criança agrupa os mesmos objetos que um adulto agruparia, porém, a generalização que sua mente realiza - fenotipicamente semelhante ao conceito do adulto - é psicologicamente diferente do conceito propriamente dito. Ela pode acrescentar todos os triângulos disponíveis a um triângulo original baseando-se em certas características perceptuais muito concretas - e restritas - e não na compreensão das características abstratas que teria o conceito de triângulo. Adultos e crianças podem atribuir o mesmo significado a uma palavra que se refere a um objeto concreto, porém o seu entendimento se dá em níveis diferentes. Na interação verbal com os adultos os pseudoconceitos podem se desenvolver em conceitos reais, mas a criança tem que percorrer um longo caminho até sua compreensão de um conceito coincidir com a do adulto (Veer, 1991).

Essa segunda fase, portanto, descreve uma forma de pensamento que difere ainda dos conceitos verdadeiros pelo fato de as relações estabelecidas ancorarem-se nas conexões entre elementos individuais e não em relações lógico-abstratas. As conexões entre os objetos de um grupo são estabelecidas de um modo empírico, acidental e concreto (Tunes, 1995).

No terceiro e último estágio, que é o da formação de conceitos potenciais, o agrupamento de objetos é feito com base em um único atributo e não é distinguível do

agrupamento baseado no conceito real. Nesta fase, a criança consegue dominar a capacidade de combinar objetos baseada nas semelhanças entre eles com a capacidade de analisar, separar e abstrair certas características, realçando outras. Desenvolve-se aqui, portanto, a capacidade de abstração que, combinada com o pensamento por complexos, permite à criança progredir até a formação dos conceitos verdadeiros.

De acordo com Vygotsky,

“ Um conceito só aparece quando os traços abstraídos são sintetizados novamente, e a síntese abstrata daí resultante torna-se o principal instrumento do pensamento... A palavra desempenha um papel decisivo nesse processo” (Vygotsky, 1995,p.68).

De acordo com Tunes (1995), os conceitos verdadeiros têm, portanto, duas raízes no pensamento da criança: o pensamento por complexos desenvolve as estruturas de generalização, enquanto que o conceito potencial desenvolve as de abstração, ambas necessárias para que se atinja o pensamento por conceitos verdadeiros, ou científicos⁶.

Admitindo que os conceitos científicos organizam-se dentro de um sistema hierárquico de inter-relações conceituais, então essas relações são tipos de generalizações que implicam em uma estrutura mental superior que acontece no desenvolvimento do indivíduo. Para o ensino dos conceitos científicos, há a necessidade da palavra como ancoradouro. Os conceitos cotidianos dizem respeito às relações da palavra com os objetos a que se referem. Já os científicos, às relações das palavras com outras palavras, pois não há como compreender tais conceitos sem ligá-los a outros. Assim, o indivíduo só daria significado a uma palavra que designa um conceito científico se desse significado às outras palavras que representam os outros conceitos aos quais o primeiro está relacionado.

Vygotsky teve especial interesse em estudar especificamente o desenvolvimento dos conceitos científicos na criança e compará-los aos cotidianos, principalmente pelas

⁶ Parece não existir, na obra de Vygotsky, uma distinção clara entre conceitos verdadeiros e científicos.

implicações para a educação e o aprendizado. Para os conceitos cotidianos, os indivíduos focalizam a atenção no objeto, enquanto que para os científicos a atenção está focalizada no próprio ato de pensar. Os primeiros permitem o desenvolvimento de estruturas importantes de generalização. Os segundos – devido a sua estrutura semiótica – a consciência reflexiva, o discernimento, o controle voluntário do ato de pensar, ou, em outras palavras o domínio do pensamento. Existe uma relação dinâmica entre os dois tipos de desenvolvimento dos conceitos, o que sugere que, para aprender um conceito científico, o indivíduo necessitaria de processos dinâmicos de “descida” aos cotidianos e de “subida” em direção a abstração, mudando assim a sua estrutura psicológica. Tal estrutura permite ao indivíduo obter outros conceitos em outras áreas do conhecimento.

Quando se consideram as postulações de Vygotsky sobre a formação dos conceitos, considera-se também, evidentemente, a particular importância da instituição escola nas sociedades letradas. A transmissão de conceitos que ocorre nos procedimentos de instrução deliberada é fundamental na construção dos processos psicológicos dos indivíduos dessas sociedades (Oliveira, 1992).

Uma contribuição das duas teorias

Tanto a teoria de Piaget como a de Vygotsky podem fornecer idéias importantes para a compreensão do modo como os alunos formam os conceitos em geometria, em especial aqueles relacionados às formas geométricas.

Parece que a realidade das formas não está nas figuras. Para aprender tais formas, o aluno deve interpretar a realidade, interagindo com ela, transformando-a. Mas de que forma ocorre o processo que faz o indivíduo transformar a realidade dos objetos em formas, e as formas em conceitos geométricos?

Se Piaget privilegia o estudo de processos no nível do indivíduo, Vygotsky enfatiza a natureza social da consciência, e desloca do individual para o socio-cultural a origem do funcionamento mental (Smolka, 1995).

Segundo Vygotsky é a cultura que proporciona as ferramentas necessárias para o indivíduo modificar o seu meio, adaptando-se ativamente a ele (os atributos necessários

e suficientes para definir um conceito são estabelecidos por características dos elementos encontrados no mundo real, selecionados como relevantes pelos diversos grupos sociais). Além disso, a cultura está constituída de sistemas de sinais e é este que modifica o próprio indivíduo. É o sistema de sinais que atua sobre a interação do indivíduo com o seu meio. No caso da geometria, parece que os sistemas de sinais estão constituídos por conceitos e estruturas organizadas de conceitos que, internalizados pelo indivíduo, atuam para que ele possa interpretar os objetos físicos como objetos geométricos. Para Vygotsky, a internalização é a reconstrução no plano pessoal ou intrapsíquico das funções existentes no plano social ou interpssíquico (Vygotsky, 1978, apud Pino, 1992).

Utilizando a classificação de Vygotsky quanto aos conceitos espontâneos e científicos, poder-se-ia dizer que os conceitos geométricos fazem parte da segunda categoria, pois são frutos de instrução específica feita pela escola, na forma de um sistema de idéias inter-relacionadas. Diferem portanto dos conceitos cotidianos ou espontâneos, que podem ser adquiridos fora do contexto escolar. Figuras que, para um especialista, seriam todas chamadas de paralelogramos, podem não ser organizadas e nomeadas dessa maneira pelos alunos. A semelhança, então, não é objetiva, mas fruto de um sistema conceitual. Por isso, dificilmente a semelhança pode explicar, por si mesma, como se forma esse sistema conceitual (Pozo, 1998).

As teorias organicistas, onde se situam Piaget e Vygotsky, rejeitam a idéia de que os conceitos ficam determinados pelas características ou atributos que os definem. O significado de um conceito é estabelecido a partir de relações com outros conceitos, dentro de uma teoria ou estrutura geral. O sujeito interpreta a realidade a partir de seus conhecimentos anteriores, mas não somente isto, os próprios conhecimentos anteriores são construídos sob a forma de estruturas. Para Piaget, a realidade é transformada por meio dos mecanismos de assimilação e acomodação através do fator equilíbrio. Para Vygotsky, a realidade é transformada através dos instrumentos de mediação, incluindo os sinais, que são proporcionados pela cultura, pelo meio social. Os dois autores rejeitam a idéia de que os significados estão na realidade e somente é necessário abstraí-los por procedimentos indutivos. Se fosse assim, bastaria que o aluno percebesse semelhanças e diferenças entre as figuras para assim conceituá-las.

Piaget explica a formação dos conceitos através de ações e da coordenação dessas ações, sejam elas sensório-motoras ou ações concretas, individuais. Vygotsky postula que os significados provêm do meio social externo, mas devem ser internalizados por cada criança de forma particular. Os dois autores coincidem quando consideram que os sinais se elaboram em interação com o meio ambiente, porém no caso de Piaget esse ambiente está constituído por objetos, alguns dos quais são objetos sociais (como são os nomes das figuras) enquanto que, para Vygotsky, está composto por objetos e por pessoas que, pela linguagem, medeiam a interação com os objetos. Para este, o vetor de desenvolvimento e de aprendizagem iria desde o exterior⁷ do sujeito ao interior, seria um processo de internalização ou transformação das ações externas, sociais, em ações internas, psicológicas (Pozo, 1998).

Relacionando as idéias de Piaget e Vygotsky à formação de conceitos em geometria, pode-se imaginar um ambiente formado por figuras geométricas planas e espaciais. A aprendizagem de conceitos só aconteceria através da interação do indivíduo com esse ambiente, e cada um dos dois autores esclarece de maneira diferente o modo como essa interação acontece.

De acordo com Piaget, essa interação com o ambiente se daria através de ações com o material. Essa ação não seria apenas física, pois, mesmo ao manipular um objeto, ou observar um desenho, o aluno poderia estabelecer uma série de relações (e, portanto, ações mentais) que o ajudariam na obtenção do conhecimento físico sobre tais objetos. O vértice do cubo feito de vidro, por exemplo, pode “furar a pele” (por que uma agulha também é pontuda e fura), a aresta pode “cortar” (por que uma faca também corta) , a face dele é “lisinha” e o cubo pode “assentar” na mesa, pode escorregar, mas não pode rolar. Sejam feitas por crianças, sejam feitas por adultos, essas experiências permitem percepções dos objetos físicos que fazem parte da abstração empírica da forma desses objetos.

A abstração reflexiva envolve a construção de relações entre os objetos (Kamii, 1994). E essas relações não estão na realidade externa, ou seja, nos objetos ou desenhos, e sim no pensamento de quem as faz. Ao juntar um cubo, uma caixa e uma

⁷ Os termos interior e exterior se referem ao lugar do significado que é o espaço social, sendo que este não pode ser simplesmente configurado como espaço físico (Smolka, 1992).

pirâmide, e separar esse grupo da esfera e do cilindro, essa relação “são diferentes” é construção da mente. Se o aluno reunisse um triângulo com um losango porque os dois são pontudos e juntasse um retângulo e um quadrado porque os dois parecem retinhos, essa relação que ele fez (e que não está nos desenhos) é um exemplo de abstração reflexiva que mais tarde deve estar ligada ao conceito geométrico de ângulo.

Ao abstrair, o aluno assimila as características das figuras (por exemplo, ter ou não ter pontas) aos sistemas que possui. No entanto, para que essa nova informação possa ser utilizada para outras figuras, é necessária uma modificação nos esquemas anteriores que o aluno tinha quanto a “pontas”. Essa modificação, chamada de acomodação, só é possível graças à reorganização dos esquemas anteriores. Ou seja, esse novo conceito – ângulo – não apenas modificaria os esquemas usados pelo aluno para classificar as figuras, mas todos os conhecimentos anteriores de figuras estariam modificados em função dessa transformação⁸. Portanto, de acordo com Piaget (1993), é na ação sobre os objetos e na coordenação dessas ações que os conceitos geométricos são formados pelos alunos. É desde a tomada de contato perceptiva que se manifesta esta ação, sob a forma de uma atividade sensório-motriz que regula as percepções. Nos níveis das operações concretas, depois formais, a ação é reencontrada, porém mais rica porque passa a ser reversível e suscetível de composições. O tipo de operação mental que o aluno pode realizar depende do seu desenvolvimento.

De acordo com as idéias de Vygotsky, a interação do aluno com o ambiente descrito anteriormente – formado por figuras planas e espaciais – dar-se-ia mediado por um adulto ou por um professor. A geometria supostamente presente nesse ambiente é um conhecimento cultural, e é esse conhecimento, historicamente produzido, que deve proporcionar as ferramentas necessárias para o indivíduo modificar o seu meio, adaptando-se ativamente a ele, re-produzindo o conhecimento, transformando-o e transformando-se. Existe um sistema de sinais próprios da geometria – e entre eles, a

⁸ Interessante verificar como o conceito de ângulo é apresentado pela Proposta da CENP, na 3ª série. Em uma atividade, a criança analisa os “cantinhos” feitos por dobradura de papel e passa a utilizar tais “cantinhos” para comparar os existentes numa coleção de polígonos. Parece que, para formação do conceito de ângulo, são necessárias várias relações e elas estão apoiadas na coordenação das ações, a princípio realizadas com o material manipulável, como no caso dos citados “cantinhos”.

linguagem geométrica - que, internalizados pelo indivíduo, atuam para que ele possa interpretar os objetos físicos como objetos geométricos. Talvez, frente às figuras geométricas desconhecidas, os alunos tentem dar significados a elas através de seu relacionamento com outros signos de linguagem natural já elaborados e, no diálogo com outras pessoas, caminhar rumo à elaboração conceitual (Rossi, 1993).

O ensino e a aprendizagem de conceitos em sala de aula e o uso de materiais

Coll (1998), baseado na Taxonomia de Bloom (1971) fez a diferenciação entre fatos e conceitos, afirmando que a aprendizagem dos fatos (ou dados) consiste na aquisição de informação verbal literal (nomes, vocabulário etc) ou de informação numérica (decorar dados quantitativos, tabuada, etc). Algumas vezes esse processo se dá de uma forma mecânica, ou seja, a repetição pode levar à mecanização da informação, que pode ser adquirida de um só vez e rapidamente ser esquecida.

Para a aprendizagem de conceitos é necessário que exista relação com os conhecimentos anteriores já existentes na estrutura cognitiva. Tal aprendizagem pode ser chamada, usando a terminologia de Ausubel (1968), de aprendizagem significativa. Para este autor, aprendizagem significativa é o processo que permite que uma nova informação recebida pelo sujeito se relacione com um aspecto relevante da sua estrutura⁹ cognitiva. A nova informação pode, neste processo, interagir com uma estrutura de conhecimento específica, onde existem os chamados conceitos subsunçores. Se existir pouca associação com conceitos relevantes, então a aprendizagem pode ser chamada de mecânica e, portanto, contrasta com a significativa.

Os conhecimentos prévios dos alunos, que devem ser ativados para que aconteça a compreensão dos conceitos, são construções pessoais (embora possam ser compartilhados por outras pessoas) que possuem coerência do ponto de vista do aluno,

⁹ Estrutura pode ser entendida como o conteúdo e organização das idéias, seja em uma forma ampla ou em uma forma específica (quando se trata de uma área particular de conhecimentos).

mas não necessariamente do ponto de vista científico. Podem ter sido formados espontaneamente, na tentativa de dar significado às atividades cotidianas, por exemplo ao buscar relações de causa a dados recolhidos através da experiência sensorial ou perceptiva. Os conhecimentos prévios também podem ter sido transmitidos socialmente, ou então formados através de concepções analógicas com outras áreas do conhecimento.

O professor pode ajudar a ativar os conhecimentos prévios dos alunos. Para isso, precisa conhecer suas idéias anteriores relacionadas ao novo material e precisa proporcionar oportunidades para que eles possam refletir sobre elas (justificando, organizando, comparando) e se habilitem a desenvolver novas concepções – mais próximas daquelas cientificamente aceitas.

Para verificar se o aluno tem o conceito de quadrilátero pode-se, por exemplo, apresentar um desenho na forma de um quadrilátero e pedir que o aluno nomeie e identifique elementos ou propriedades. Ou pedir que ele imagine um quadrilátero e o desenhe a figura imaginada em um papel. Pode ser solicitado, ainda, que ele identifique quadriláteros apresentando-lhe uma caixa de sapatos. Em todas estas situações aparecem elementos importantes que intervêm no processo de ensino e aprendizagem da geometria. São eles: o objeto (caixa), o desenho (já pronto), a imagem mental (que foi “concretizada” pelo desenho) e o próprio conceito de quadrilátero.

Parece ser viável apresentar às crianças objetos do mundo físico vivenciado por elas e associá-los a conceitos geométricos. É esperado que os alunos, manipulando o objeto e sob orientação do professor, descubram propriedades que contribuam para a elaboração conceitual. Ao manipular, por exemplo, uma caixa de sapato, eles podem identificar faces, vértices, arestas, perceber que duas faces se “encontram” em uma aresta, que existem faces que são paralelas etc. Um desenho em perspectiva¹⁰ da caixa talvez dificulte (de acordo com a idade do aluno) a identificação daqueles elementos. A tal caixa é, neste caso, um objeto utilizado para representar vários conceitos de

¹⁰ No caso de desenhos feitos em perspectiva para representar formas tridimensionais, parece ser mais difícil estabelecer relações entre os elementos representados em cada desenho. Pesquisas mostram que os alunos têm grandes dificuldades na leitura de propriedades geométricas a partir dos desenhos em perspectivas. Até mesmo adultos (incluindo professores) não conseguem interpretar informações necessárias para formação de conceito de volume em desenhos feitos com perspectiva. (Kaleff, 1996; Cox&Pehara,1998).

geometria plana (quadrilátero, retângulo, polígono, ângulo, reta, ponto, retas paralelas, plano) ou de geometria espacial (paralelepípedo, prisma, poliedro, planos paralelos, planos perpendiculares).

Freudenthal (1973) fazia referência ao estudo do espaço através dos sólidos pois dizia que eles eram mais concretos que figuras no plano. Os caminhos para a análise lógica seriam mais curtos no plano, mas o espaço seria mais intuitivo e favoreceria atividades mais criativas.

Apesar disso, concorda-se com Pais (1996) quando afirma que um ensino de geometria em um nível puramente experimental com objetos contrasta frontalmente com a generalidade e a abstração dos conceitos visados, surgindo daí a necessidade de se transpor sua própria materialidade. Embora o uso de objetos e desenhos seja necessário na formação de conceitos, tem-se que ter em mente que estes conceitos só serão incorporados no nível formal quando o aluno fizer uma leitura geométrica destas representações.

Completando esta reflexão sobre objeto e desenho, pode-se dizer que eles são recursos para representações de conceitos geométricos e que podem ser muito úteis na formação desses conceitos. Para a geometria plana, desenho é o recurso mais usado, sendo que alguns conceitos têm uma única forma de representação que é convencional¹¹ (por exemplo, quadrado), mas outros podem ter muitas (por exemplo, trapézio¹²). O risco de usar uma única forma de representação é impedir que os alunos possam desenvolver um conhecimento matemático autônomo, como afirma Matos (1992). De acordo com Hoffer (1993), isso pode também acarretar o chamado “fenômeno de idealização” (quando, o aluno desenha um triângulo equilátero, ao ser solicitado a desenhar um triângulo) que impede o desenvolvimento do pensamento em níveis mais elevados. Alguns conceitos sequer podem ser representados por figuras (o conceito de plano) ou mesmo por objetos (o conceito de ponto).

Através do trabalho com desenhos e objetos, uma pessoa pode construir imagens mentais associadas a conceitos e a situações-problema em geometria. É claro que

¹¹ O termo é uma referência ao Construtivismo Social que defende que a base do conhecimento objetivo da matemática são as convenções, as regras e o conhecimento lingüístico. (Ernest, 1995).

¹² Para muitos autores, trapézio é o quadrilátero que tem um par de lados paralelos. Sendo assim, o quadrado também é um trapézio

estas imagens mentais podem ser comunicadas verbalmente, através de um desenho ou até por gestos.

Um aluno pode ter imagens mentais da diagonal do cubo, de retas paralelas, ou de planos paralelos, sem representá-las num papel. A noção de lugar geométrico talvez passe primeiro por imagens mentais até ser expressa por desenhos. Em geometria plana, podem ser imaginados todos os pontos que sejam eqüidistantes de dois pontos dados. Ou então todos os pontos que sejam eqüidistantes de um ponto dado. O primeiro caso refere-se ao conceito de mediatriz e o segundo caso ao de circunferência e ambos tratam da idéia de lugar geométrico no plano. Na geometria espacial os conceitos seriam de plano e de superfície esférica, respectivamente.

É importante que o professor, nas atividades de ensino de conceitos geométricos, possa trabalhar com objetos e com figuras, e assim auxiliar os alunos a formarem imagens mentais. Convém lembrar, no entanto, que objetos e figuras são apenas representações dos conceitos. Ficar preso a essas representações é impedir que o aluno alcance níveis mais altos de conceituação.

Os níveis de conceitos segundo outros autores

Vários autores analisam os níveis de formação de conceitos, isto é, classificam as operações mentais que um indivíduo realiza quando na elaboração de um conceito. Klausmeier (1977), por exemplo, afirma que esse processo depende não só das experiências que o indivíduo manteve com o conceito, mas também dos seus padrões maturacionais. O desenvolvimento conceitual se daria de acordo com quatro níveis, sucessivos: concreto, identidade, classificatório e formal.

No nível concreto, o indivíduo reconhece um objeto já visto em uma situação anterior, presta atenção, discrimina-o de outros objetos, representa-o internamente como uma imagem e mantém a representação, pois consegue se lembrar dele mesmo quando o mesmo estiver ausente, mas não é necessário que a denominação do conceito seja aprendida. No nível de identidade, o indivíduo reconhece um mesmo objeto ainda que seja observado de uma perspectiva física ou num aspecto sensorial

diferentes do anterior; realiza as operações mentais de prestar atenção nas características perceptuais de um objeto, discriminar o objeto de outros, lembrar o nome, generalizar que duas ou mais formas da coisa são o mesmo objeto. O nível classificatório caracteriza-se pela capacidade que tem o indivíduo de classificar objetos de acordo com um critério e de utilizar objetos como exemplos e não-exemplos, embora ele não seja capaz de definir uma palavra que represente a base da classificação. Finalmente, no nível formal, o sujeito pode dar o nome do conceito em termos de atributos definidores.

Klausmeier (1977) salienta que nem todos os conceitos possuem as características necessárias aos quatro níveis sucessivos. Os conceitos geométricos – embora se possa admitir esses níveis na sua formação – fazem parte de uma rede de relações, e são essas que merecem maior destaque. Utilizando as idéias de Piaget e Inhelder (1993) para interpretar os níveis de Klausmeier, parece que, nos dois primeiros níveis, a formação dos conceitos geométricos depende do desenvolvimento dos espaços perceptivo e representativo na criança, resultado das ações e da coordenação dessas ações do sujeito quando em contato com os objetos. Utilizando as idéias de Vygotsky (1995), esses dois primeiros níveis de Klausmeier parecem corresponder ao estágio do sincretismo e às primeiras fases do pensamento por complexos, mas são relativos ainda aos conceitos cotidianos.

Nos outros níveis de Klausmeier – classificatório e formal – percebe-se a natureza dos conceitos científicos que, para serem formados, necessitam do desenvolvimento operatório (que, segundo Piaget, se dá através de ações coordenadas e reversíveis do sujeito), mas também da instrução feita pela escola. Assim, do nível classificatório (talvez pseudo-conceito) o sujeito alcançaria o nível formal (ou conceitos verdadeiros, na terminologia de Vygotsky). Tal instrução para a geometria deveria ser baseada em material estruturado que permitisse a reorganização dos conhecimentos anteriores por parte do sujeito e assim, conceitos em níveis mais elevados.

Tratando também da formação de conceitos, Ausubel (1968) faz a diferenciação entre *formação* e *assimilação* de conceitos. Na formação de conceitos, a criança, por meio da experiência empírico-concreta, adquiriria um significado através de um processo indutivo de descoberta dos atributos criteriais do conceito, mediante múltiplos

exemplos particulares do mesmo. Ao atingir a idade escolar a maioria dos conceitos seria adquirida através do processo de assimilação, ou seja, retenção de um novo significado adquirido em ligação com idéias-âncora existentes na estrutura. Para ocorrer a assimilação, um conceito (ou proposição) potencialmente significativo, seria assimilado sob uma idéia ou conceito mais inclusivo, já existente na estrutura cognitiva, na forma de um exemplo, extensão, elaboração ou qualificação. Quanto ao desenvolvimento cognitivo, Ausubel (1968) aponta ganhos progressivos no nível de abstração do indivíduo, através de três estágios: o pré-operacional, operacional-concreto e operacional abstrato. Esses ganhos se referem ao processo de aquisição dos conceitos, aos significados dos conceitos que emergem desse processo e à abstração e complexidade dos tipos de conceitos que estão ao alcance do indivíduo.

O autor analisa a situação de aprendizagem, em especial a escolar, a partir de duas dimensões: uma referente ao tipo de aprendizagem realizada pelo aluno e a outra referente à estratégia de instrução planejada para estimular essa aprendizagem. Na primeira dimensão, a aprendizagem se daria num contínuo que iria desde aquela por repetição (ou mnemônica) até a plenamente significativa. Na segunda dimensão, o ensino também se daria num contínuo que iria do ensino que proporcionaria a aprendizagem puramente receptiva até aquele que favoreceria a aprendizagem através do descobrimento autônomo por parte do aluno.

Assim, ao se admitir a distinção entre ensino e aprendizagem, supõe-se também que determinadas formas de ensino não levem forçosamente a um determinado tipo de aprendizagem. Por exemplo, uma aprendizagem por recepção – onde haja esclarecimento das relações entre os conceitos – pode se tornar significativa para o aluno. Ao se admitir a continuidade, é possível estabelecer a possibilidade de coexistência entre a aprendizagem por recepção ou mnemônica (por associação) e a aprendizagem significativa (por reestruturação).

Pode-se perceber que as idéias de Piaget –sobre desenvolvimento das estruturas cognitivas – estão presentes na teoria de aprendizagem significativa de Ausubel. No entanto, apesar de os significados serem sempre uma construção individual, a maior parte deles são adquiridos em contextos interpessoais de instrução, e nota-se aqui a

influência das idéias de Vygotsky. Assim, muitos conceitos não se formam apenas em função do desenvolvimento, mas sim através da mediação que, no caso da escola, é feita principalmente pelo professor. Embora Piaget admita a importância da experiência e da transmissão social no processo de construção do conhecimento, parece ser Vygotsky o autor que explicita a influência do meio social nessa construção. São de Vygotsky as idéias de nível de desenvolvimento real e potencial. O primeiro nível se refere ao que o sujeito pode fazer sozinho; o segundo, ao que ele pode fazer com a ajuda de uma outra pessoa. Entre os dois, é definida a zona de desenvolvimento proximal, onde três elementos atuam e se relacionam: o desenvolvimento do sujeito, a sua aprendizagem e o ensino a ele dirigido, estruturado por outras pessoas (Tunes, 1995).

CAPÍTULO III

O MODELO TEÓRICO DE VAN HIELE

Pierre van Hiele desenvolveu sua teoria na Holanda, em meados dos anos 50.

As idéias de Van Hiele (1986) sobre geometria tiveram início com as próprias dificuldades que o autor enfrentou enquanto estudante dessa disciplina. Na época, o ensino de geometria era basicamente formado pelos axiomas e demonstrações de teoremas que, uma vez não sendo entendidos, acabavam sendo decorados pela maioria dos estudantes.

Mais tarde, em 1951, como professor na escola Montessori, Van Hiele (1986) não se conformava com a idéia de que a aprendizagem de fatos e métodos pudesse ser o objetivo da Matemática. Passou, então, a ter contato com as crianças e, através dos seus depoimentos, a identificar as formas de pensamento delas.

Nessa época, o autor entrou em contato com os psicólogos da Gestalt e iniciou seu trabalho sobre insight e estrutura. Ele e sua esposa, Dina van Hiele-Geldof, elaboraram suas teses de doutoramento sob a orientação de Hans Freudenthal na Universidade de Utrecht.

Seus trabalhos influenciaram o ensino na então União Soviética, onde o currículo escolar foi reformulado na década de sessenta, incluindo o modelo de Van Hiele. Na década de 70, Izaak Wirszup começou a divulgar o trabalho e, na mesma época, Hans Freudenthal escreveu sobre os trabalhos do casal no seu livro *Mathematics as an Education Task*, em 1973.

Os trabalhos de Van Hiele tinham três grandes características: uma forte base estruturalista (as estruturas estavam presentes na sua visão de mundo e na visão de organização da cognição), uma influência da Psicologia da Gestalt (base para análise da percepção e interpretação cognitiva dessas estruturas) e uma preocupação com a didática da Matemática (presente nas atividades propostas por sua esposa Dina).

Van Hiele tinha uma visão de estrutura diferente da de outros educadores da sua época - como Dienes - que usavam as estruturas algébricas, as de ordem e as

topológicas. Para ele, a criação de estruturas mentais envolveria dois atos de pensamento distintos. No primeiro deles, ao se deparar com uma estrutura na forma de desenhos, por exemplo, uma pessoa poderia evocar estruturas visuais, não verdadeiramente matemáticas. Mas, ao analisar as figuras, seria possível abstrair e eliminar um certo número de qualidades, e então as figuras seriam vistas e identificadas de outras maneiras. Novas estruturas mentais seriam, portanto, formadas.

Um segundo ato do pensamento seria a classificação de estruturas inter-relacionadas. Se o aluno conseguisse estabelecer vários critérios para classificação de estruturas, os próprios critérios ou princípios seriam uma nova estrutura. Esse novo processo de pensamento estaria então em um nível mais elevado (Van Hiele, 1986)

Os níveis de pensamento

O modelo de Van Hiele consiste em cinco níveis de compreensão: “visualização” (ou reconhecimento), “análise”, “dedução informal” (ou ordenação, ou síntese, ou abstração), “dedução formal” e “rigor” e sugere que os alunos progridem através dessa seqüência hierárquica enquanto aprendem geometria. A linguagem, o insight e o tipo de experiências desempenham papéis especiais nesse desenvolvimento

De acordo com Hoffer (1981), uma pessoa demonstraria compreensão se fosse capaz de trabalhar em uma situação possivelmente desconhecida; se realizasse com competência o que a situação exigisse; se levasse a cabo intencionalmente (deliberada e conscientemente) um método para resolver tal situação.

Esses níveis do raciocínio¹ geométrico foram descritos por Van Hiele (1986) e são resumidos a seguir:

¹ A expressão “*levels of thinking in geometry*” tem sido traduzida como “níveis de pensamento em geometria”, “níveis de conceituação em geometria”, “níveis de raciocínio em geometria”, “níveis de conceito em geometria” ou como “níveis de pensamento geométrico”.

Nível 1 - Reconhecimento:

Neste estágio inicial, também chamado de nível básico, o aluno percebe os conceitos geométricos como entidades totais, não vê componentes ou atributos. A aparência física é determinante para reconhecer figuras e não suas partes ou propriedades. O aluno consegue aprender um vocabulário geométrico, identificar formas específicas e reproduzir um desenho com papel quadriculado. Por exemplo, pode reconhecer um dado, chamá-lo de cubo, mas não é capaz de reconhecer as seis faces quadradas.

Jaime e Gutiérrez (1990-b) descreveram o nível básico através das seguintes características observáveis nos comportamentos dos alunos:

- Percepção das figuras geométricas em sua totalidade, de maneira global, como se fossem unidades, e possível inclusão de atributos irrelevantes nas descrições que são feitas.
- Percepção das figuras como objetos individuais, ou seja, não capacidade para generalizar as características reconhecidas em uma figura a outras de sua mesma classe.
- Descrição dos aspectos físicos das figuras; os reconhecimentos, diferenciações ou classificações de figuras que são realizados se baseiam em semelhanças ou diferenças físicas globais entre elas.
- Em muitas ocasiões as descrições das figuras estão baseadas em sua semelhança com outros objetos (não necessariamente geométricos) que conhecem. São usadas frases como: "... se parecem com...", "...tem a forma de..." etc.
- Reconhecimento não explícito das partes que compõem uma figura nem de suas propriedades matemáticas. Por exemplo, ao apresentar a um aluno um círculo, um quadrado e um triângulo, e perguntar em que estas figuras se diferenciam, ele poderá se referir à forma redonda, às figuras mais ou menos pontudas, mas não falará do número de vértices, nem das medidas dos ângulos.

Este nível mais elementar de raciocínio é decorrente da forma como normalmente a geometria parece ser ensinada na pré-escola e no ensino fundamental, ou seja, baseada em atividades que têm por objetivo o reconhecimento nos dois sentidos:

Nome $\longleftrightarrow$ figura.

Nível 2 - Análise:

Neste nível, o aluno reconhece as partes de uma figura, começa a analisar as suas propriedades e utiliza algumas propriedades para resolver certos problemas. Não é capaz de explicar relações entre propriedades, não vê inter-relações entre as figuras e não entende definições. Pode perceber que os lados opostos e, possivelmente, até que as diagonais de um retângulo são congruentes, mas não notará como os retângulos se relacionam com os quadrados ou com os triângulos retângulos (Hofer,1981).

Jaime e Gutiérrez (1990-b) descreveram este nível levando em conta que o aluno:

- Percebe que as figuras geométricas são formadas por partes ou elementos e que têm propriedades matemáticas; pode descrever as partes que formam uma figura e enunciar suas propriedades, embora de maneira informal.
- Pode generalizar propriedades a partir da experimentação.
- Não é capaz de relacionar umas propriedades com outras, não pode fazer classificações lógicas de figuras baseando-se em suas propriedades ou elementos.

O Nível 2 é o primeiro que oferece um raciocínio chamado “matemático” pois nesta fase os alunos são capazes de descobrir e generalizar propriedades (necessariamente a partir da manipulação e da observação). Esta capacidade de generalização é, no entanto, limitada, pois usarão as propriedades como se fossem independentes entre si. Por exemplo, não relacionarão a existência de ângulos retos do retângulo com a perpendicularidade ou o paralelismo dos lados.

Acrescente-se que, neste nível, o aluno dá mais importância à existência de algumas propriedades diferenciadoras nas figuras que à existência de propriedades comuns. Em termos piagetianos, pode-se dizer, também, que ele não tem a habilidade de fazer inclusões de classes.

Nível 3 – Ordenação:

O aluno, neste nível, ordena logicamente figuras e entende inter-relações de propriedades tanto das figuras quanto entre elas. É capaz de formar classes de figuras, e a inclusão de classes é entendida. Consegue entender a importância de definições acuradas, acompanha e formula argumentos informais. Mas não compreende o significado da dedução como um todo ou o papel dos axiomas. Pode, segundo Hoffer (1981), entender porque todo quadrado é retângulo, mas pode não ser capaz de explicar porque as diagonais de um retângulo são congruentes.

Para Jaime e Gutiérrez (1990-b), os alunos nesse nível:

- Apresentam a capacidade de raciocínio formal (matemático), pois são capazes de reconhecer que umas propriedades decorrem de outras e de descobrir estas implicações.
- Podem classificar logicamente as diferentes famílias de figuras a partir de suas propriedades ou relações já conhecidas.
- Podem descrever uma figura de maneira formal, isto é, dar definições matematicamente corretas, pois compreendem o papel das definições e dos requisitos de uma definição correta.
- Compreendem os passos sucessivos individuais de um raciocínio lógico formal, mas os vêem de forma isolada, pois não compreendem a necessidade de um encadeamento desses passos nem entendem a estrutura de uma demonstração. Podem entender uma demonstração mas não são capazes de construí-la.
- Não compreendem a estrutura axiomática da geometria.

Nível 4 – Dedução:

O aluno compreende o significado da dedução como maneira de estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático. Conforme verificado por Crowley (1994) e Hoffer (1981), um aluno nesse nível compreende as condições necessárias e suficientes para uma afirmação; é capaz de construir demonstrações, de

fazer distinções entre uma afirmação e sua recíproca, de usar o postulado LAL² para provar afirmações sobre os triângulos, todavia poderá não entender por que é necessário postular a condição LAL.

Para Jaime e Gutiérrez (1990-b) os alunos neste nível:

- Podem entender e realizar raciocínios lógicos formais; usam as demonstrações para verificar a verdade de uma afirmação.
- Podem entender a estrutura axiomática da matemática.
- Aceitam a existência de demonstrações alternativas para um mesmo teorema e a existência de definições equivalentes de um mesmo conceito.

Nível 5 – Rigor:

O aluno, nesse nível, é capaz de trabalhar em vários sistemas axiomáticos, pode estudar geometrias não - euclidianas e comparar diferentes sistemas. Segundo Nasser (1990), esse nível mais avançado raramente é alcançado por alunos do Ensino Médio.

Hoffer (1991) considerou que o aluno nesse nível entenderia como o postulado das paralelas (Euclidiano) relaciona-se à existência de retângulos e que na Geometria não-Euclidiana os retângulos não existem. Jaime e Gutiérrez (1990-b) acreditam que este nível não existe ou não pode ser testado.

Propriedades do modelo

Para melhor entendimento dos níveis de raciocínio geométrico, algumas características foram descritas por Van Hiele (1959), resumidas por Nasser (1992) e apresentadas seguir:

1. Seqüencial.

Os níveis formam uma hierarquia, sendo impossível passar de um nível para outro sem dominar as operações do nível anterior.

² LAL é um dos casos de congruência de triângulos.

2. Avanço.

O avanço nos níveis depende do conteúdo e dos métodos de instrução e das experiências de atividades adequadas. Não é possível pular de nível, mas alguns métodos podem acelerar o processo.

3. Intrínseco e extrínseco.

Os objetos inerentes a um nível tornam-se objetos do nível seguinte. Por exemplo, no Nível 1, o aluno reconhece as figuras mas não verifica suas partes e propriedades. No nível seguinte, o aluno verifica as propriedades de uma figura, mas é no nível seguinte que as propriedades vão ser relacionadas e só depois utilizadas para uma demonstração.

Jaime e Gutiérrez (1990-b), com a finalidade de explicar a estrutura recursiva dos níveis, afirmam que em cada nível N há determinadas habilidades que estão sendo usadas implicitamente pelos alunos e que se tornam explícitas no nível N+1. O Quadro 1 resume essas idéias.

Quadro 1. Estrutura recursiva dos Níveis de van Hiele. (Jaime&Gutiérrez,1990)

	Elementos explícitos	Elementos implícitos
Nível 1	Figuras	Partes e propriedades das figuras
Nível 2	Partes e propriedades das figuras	Implicações entre as propriedades
Nível 3	Implicações entre as propriedades	Dedução formal de teoremas
Nível 4	Dedução formal de teoremas	

Hoffer (1983) analisa cada um dos níveis de Van Hiele em termos de categorias de objetos de estudo. Na descrição a seguir pode ser verificada a estrutura recursiva dos níveis.

Nível 1 - Objetos são os elementos base do estudo. Por exemplo, objetos são paralelogramos.

Nível 2 - Objetos são propriedades que analisam os elementos base. Exemplo: objetos são lados paralelos.

Nível 3 - Objetos são afirmações que relacionam propriedades. Exemplo: objetos são paralelismo dos lados.

Nível 4 - Objetos são seqüências parciais de afirmações. Exemplo: Se um quadrilátero é um paralelogramo, então suas diagonais se encontram no seu ponto médio.

Nível 5 - Objetos são propriedades que analisam as seqüências parciais. Exemplo: o paralelismo de retas faz parte da geometria euclidiana.

O movimento para um nível mais alto é acompanhado de uma nova linguagem. Por exemplo, se os losangos são considerados objetos de estudo no Nível 1, nesse nível não há discussão das razões lógicas que levam a figura a ser chamada de losango. Os objetos de estudo são imagens de losangos. Várias atividades como dobrar, medir e desenhar são feitas com os losangos e os objetos de estudo passam a ser, portanto, as propriedades dos lados, ângulos e diagonais dos losangos, o que garantiria o Nível 2 de pensamento. Portanto, no Nível 2, os objetos de estudo são as propriedades, que vão passando, segundo Hoffer (1983), de “instrumentos de ação” para “instrumentos de reflexão”. Nessa fase, o aluno compreende, por exemplo, que as diagonais são perpendiculares, mas ainda não consegue utilizar uma terminologia correta para poder se comunicar com os outros. Estando no Nível 3, o aluno saberia utilizar as palavras técnicas para melhorar, por exemplo, a discussão de um problema geométrico que envolvesse perpendicularismo de diagonais. Somente no quarto nível, o aluno consegue estabelecer um sistema axiomático utilizando os símbolos adquiridos no nível anterior e poderia demonstrar a perpendicularidade das diagonais do losango. (Van Hiele, 1986 apud Matos, 1992).

4. Lingüística.

Cada nível tem símbolos lingüísticos próprios e seus próprios sistemas de relações que ligam esses símbolos. Para incluir o retângulo como paralelogramo, por

exemplo, o aluno deve ter dominado a linguagem e as relações que justificam essa inclusão.

Um outro exemplo é o significado da palavra demonstrar, que descreve uma atividade tipicamente matemática: assegurar a veracidade das afirmações que são feitas (Jaime&Gutiérrez,1990-b). Para pessoas com diferentes níveis de formação de conceitos, esta palavra pode ter significados diferentes. Pode-se tomar, por exemplo, a demonstração de que a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180° . Para uma pessoa no Nível 1, a palavra demonstrar apareceria desprovida de sentido matemático. No Nível 2, a palavra demonstrar consistiria simplesmente em comprovar que a afirmação é correta para certos casos, e essa comprovação poderia ser feita com medições oportunas com alguma ferramenta (com o uso do transferidor é possível verificar que a soma vale 180°). No Nível 3, demonstrar já teria um significado próximo ao dos matemáticos: as demonstrações seriam formadas por raciocínios lógicos, embora seus argumentos fossem do tipo informal, baseados na observação de exemplos particulares (no caso do triângulo, seria possível verificar, usando retas paralelas interceptadas por uma transversal, a existência de ângulos suplementares). No Nível 4 o aluno já construiria demonstrações com os requisitos usuais de rigor, ou seja, formularia uma hipótese, traçaria as retas paralelas, nomearia ângulos, usaria postulados e definições e provaria assim a tese, ou seja, o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo.

5. Combinação inadequada

Se o aluno estiver em um nível e o professor utilizar linguagem ou propuser atividades adequadas a um nível superior, aquele não será capaz de acompanhar os processos que estarão sendo empregados, portanto poderá não ocorrer a aprendizagem no nível desejado.

As fases do aprendizado na perspectiva de Van Hiele

Para orientar os professores na elaboração de atividades que possibilitem aos alunos alcançar os níveis, Van Hiele (1986) considerou cinco etapas: indagação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração:

Fase 1 – Interrogação

Nesta etapa inicial, alunos conversam sobre os objetos de estudo e desenvolvem atividades que envolvam os objetos de estudo do respectivo nível. O professor avalia os conhecimentos que os alunos já possuem sobre o assunto.

Fase 2 - Orientação dirigida

O professor, tendo em vista as observações feitas na etapa anterior, prepara atividades para que os alunos possam dar respostas específicas com o objetivo de revelar gradualmente as estruturas do material.

Fase 3 – Explicação

Os alunos expressam suas visões sobre as estruturas que foram observadas anteriormente. O professor apenas orienta os alunos para que eles utilizem linguagem adequada.

Fase 4 - Orientação livre

A situação com a qual os alunos se deparam são mais complexas, as tarefas podem ser concluídas de várias formas, cada aluno pode decidir um caminho para concluir os trabalhos.

Fase 5 – Integração

Os alunos revêem, resumem e comparam o que aprenderam com o objetivo de formar uma visão geral nova de objetos e relações. No final desta fase, os alunos provavelmente teriam construído uma nova rede de relações e alcançariam um novo nível de pensamento.

Com exceção da última fase, as outras podem ocorrer em diversas ordens e até simultaneamente.

O processo de aprendizagem na perspectiva de Van Hiele

Baseados na teoria de Van Hiele, Jaime e Gutiérrez (1990-b) definem o processo de aprendizagem em geometria como sendo o mecanismo pelo qual uma pessoa passa a utilizar novos métodos e ferramentas de raciocínio próprio de um nível superior ao que utilizava anteriormente e que lhe permite ter acesso a conhecimentos mais profundos.

Com a aprendizagem são produzidas modificações na estrutura cognitiva de uma pessoa, passando assim de um nível de raciocínio a outro. Estas modificações transformam as estruturas mentais atuais em outras novas, mais complexas, que absorvem as anteriores. As estruturas mentais podem ser representadas por “redes de relações” nas quais os vértices são os diferentes conceitos assimilados (ou diferentes representações do mesmo conceito) e as linhas de conexão entre vértices são as relações estabelecidas entre esses conceitos.

Nessa perspectiva, a passagem de um nível de Van Hiele a outro superior se produziria mediante a criação de uma nova rede de relações obtida ao incorporar à anterior novos conceitos e novas relações entre eles. As figuras a seguir são exemplos de redes de relações em diferentes níveis para o caso dos quadriláteros, em especial o conceito de losango.

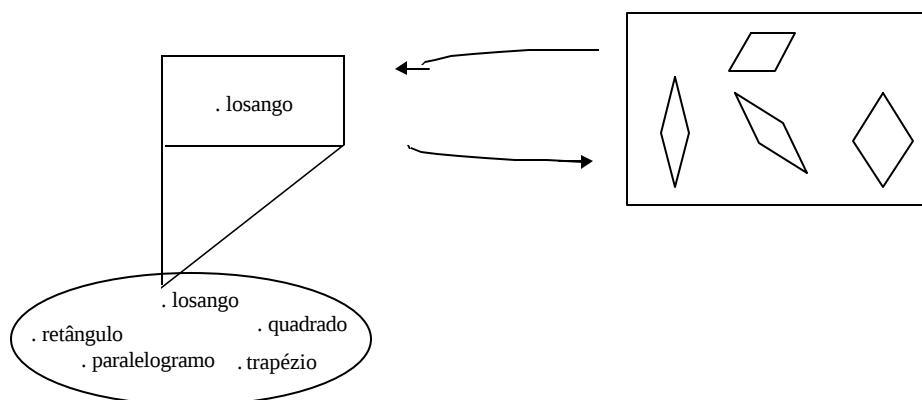


Figura 1. Nível 1- Primeira rede de relações dos quadriláteros e do losango (Jaime&Gutiérrez,1990-b)

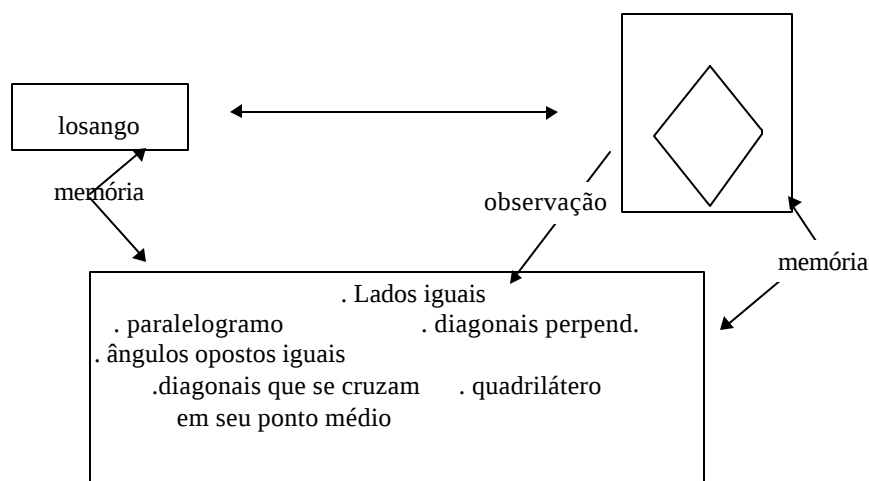


Figura2. Nível 2 - Segunda rede de relações do losango(Jaime&Gutiérrez,1990)

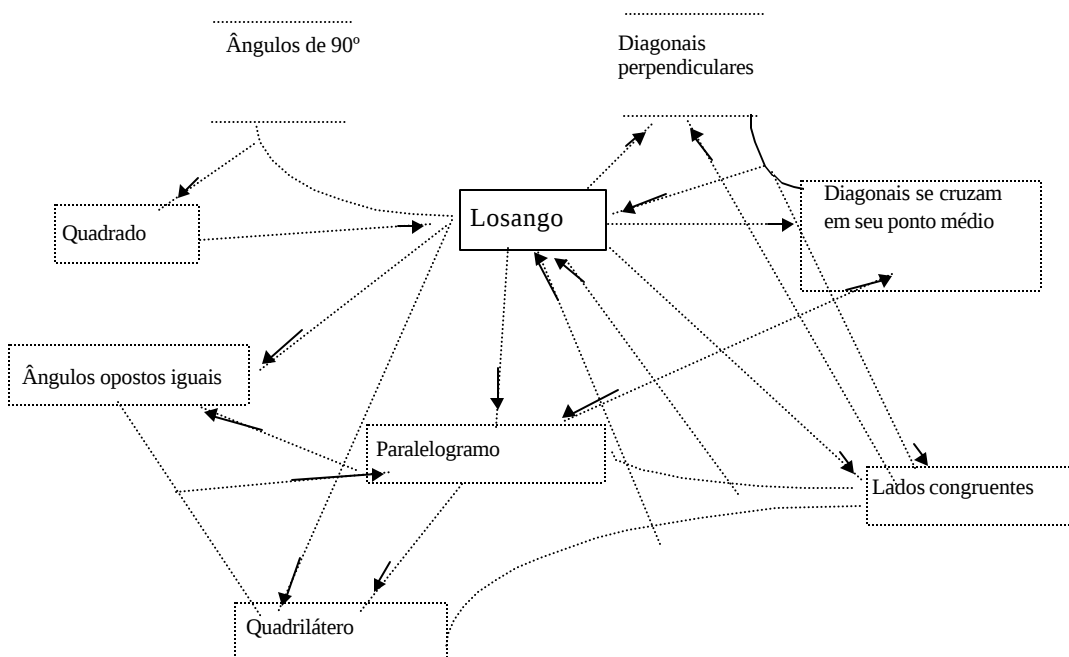


Figura 3. Nível 3 - Terceira rede de relações do losango(Jaime&Gutiérrez,1990)

Resta acrescentar que a aquisição de níveis mais complexos de pensamento é fruto da experiência do sujeito e pode acontecer tanto dentro como fora da escola. Um método de ensino adequado é, portanto, aquele que proporciona tal experiência.

CAPÍTULO IV

AS HABILIDADES GEOMÉTRICAS

Na descrição das características de cada um dos níveis propostos por Van Hiele, verifica-se que o modelo utiliza alguns verbos como perceber, reconhecer, analisar, descrever, relacionar, classificar, desenhar, resolver, aplicar etc.; alguns mais relacionados à forma declarativa de expor um conceito, outros mais relacionados à forma procedimental de aplicação dos conceitos. Os procedimentos em geometria são, nesse trabalho, chamados de habilidades geométricas.

Hoffer (1981) destacou cinco habilidades geométricas básicas: visual, verbal, gráfica, lógica e aplicações. No nível básico, parece que a habilidade mais considerada pela teoria é a visual (para reconhecer as figuras); no segundo nível, talvez a verbal (uma vez que os alunos deveriam, para análise, descrever propriedades, além de reconhecê-las); nos níveis seguintes, a habilidade lógica para incluir classes de figuras e deduzir teoremas. Não parece, no entanto, que a habilidade visual se destine apenas a descrever o nível mais básico de conceitos. Pode-se indagar, por exemplo, em que nível de conceituação deveria estar um aluno para imaginar se é possível obter uma secção hexagonal em um cubo...

Entendendo que fazem parte do conhecimento em qualquer área os três tipos de conteúdo apontados por Coll (1998) (conceitos, habilidades e atitudes) e que existem relações entre os níveis de conceito e as habilidades, definem-se habilidades geométricas como sendo as diferentes maneiras de o aluno demonstrar os conceitos que possui.

No entanto, para estudar as habilidades, convém levar em consideração dois fatores: um mais relativo ao próprio conceito de habilidade e outro ligado à dimensão do conteúdo em geometria que realmente deveria ser ensinado nas escolas (e que, logicamente implica em diferentes habilidades).

Quanto ao primeiro fator, podem-se estudar as habilidades como sendo traços diferenciadores dos indivíduos. Krutetskii (1976), ao estudar os fatores que contribuiriam para que um indivíduo se saísse bem no desempenho de uma atividade

em matemática, evidencia dois pontos: o primeiro é o que ele chama de habilidade matemática e o segundo são as condições psicológicas gerais, como atitudes positivas em relação à atividade, traços de personalidade, estado mental e um conjunto de conhecimentos, destrezas e hábitos. A habilidade matemática é então estudada por esse autor a partir de componentes e isso permite descrever as características de um indivíduo habilidoso em matemática.

No presente trabalho, as habilidades geométricas dos alunos do Cefam são estudadas como sendo destrezas que podem ser adquiridas via instrução. Admite-se ainda que as habilidades, assim como os conceitos, podem ser aprendidas por reestruturação e, em virtude disso, possam ser verificados níveis no processo de formação dessas habilidades com relação ao desenvolvimento do sujeito nessa área do conhecimento. Acrescenta-se que o termo instrução é entendido como um processo de ensino que possibilite ao aluno reestruturar seu conhecimento, modificando o objeto de estudo mas modificando-se a si próprio também. Acrescenta-se também que, assim como apontado por Coll (1998), o desenvolvimento das habilidades esteja intimamente relacionado com a formação dos conceitos. Assim, estudar as habilidades dos alunos é algo entendido como uma maneira de estudar o processo de formação de conceitos, e esse processo – embora seja de responsabilidade da escola – pode se dar tanto dentro como fora da escola.

Quanto ao segundo fator, ou seja, para contextualizar as habilidades no ambiente escolar, é importante questionar como se consideraria a geometria no Ensino Fundamental e Médio. Nessa perspectiva, Usiskin (1994) constata que existem diferentes maneiras de se considerar a geometria. Essas são chamadas de dimensões, rapidamente descritas a seguir.

Em uma dimensão 1, a geometria seria vista como estudo da visualização, do desenho e da construção de figuras. Um ensino com essa perspectiva trataria de desenvolver os conceitos baseando-se principalmente nas habilidades visual e gráfica. Assim, poderia ser pedido às crianças, por exemplo, que desenhassem triângulos, num primeiro momento, e mais tarde que fizessem desenhos de figuras transformadas por reflexões, rotações, etc. Alguns psicólogos parecem acreditar que os aspectos desta dimensão são pouco afetados pelo ensino – e por isso mesmo é que testes de

inteligência muitas vezes apresentam itens de percepção espacial – mas o autor acredita que o ensino influenciaria na faculdade de visualização dos alunos. Em uma dimensão 2, a geometria seria encarada como estudo do mundo real, físico. Nessa perspectiva, a formação e a aplicação dos conceitos geométricos poderia acontecer ao explorar as formas da natureza, ao utilizar os conhecimentos relativos a certas profissões (engenharia, arquitetura, mecânica etc), ao apreciar obras artísticas etc. Já a geometria como veículo para representar conceitos matemáticos, ou outros, cuja origem não é visual, seria uma terceira dimensão (utilização de reta numérica, gráficos). Por fim, a geometria poderia ser vista como exemplo de um sistema matemático¹, e assim, idéias de lógica seriam os elementos do ensino da geometria, podendo ser ensinados – até mesmo às crianças – alguns aspectos de uma demonstração indireta.

Dependendo da dimensão dada ao ensino de geometria, algumas habilidades podem se desenvolver mais do que outras. Concordando com Hoffer (1981), admite-se que o ensino de geometria no Ensino Fundamental e no Ensino Médio deveria proporcionar oportunidades para que todas aquelas habilidades fossem desenvolvidas.

Segue-se uma descrição das habilidades propostas por Hoffer (1981), ilustrada com exemplos de geometria plana e espacial.

a) habilidade visual

Como geometria é claramente uma matéria visual, seria importante proporcionar ao aluno experiências para ampliar a sua capacidade de ver objetos e representações e de deduzir transformações. Com essa habilidade, o aluno poderia reconhecer figuras diferentes de um desenho, estabelecer propriedades comuns de diferentes tipos de figuras e até deduzir informações a partir de uma figura. Poderia, por exemplo, realizar rotações mentais de quadrados, imaginar secções em cubos etc.

b) habilidade verbal

A habilidade verbal se refere ao uso das palavras que designam os conceitos e as relações entre os conceitos, e pode ser conseguida partindo de análises de

¹ Essa dimensão parece ter sido utilizada pela Matemática Moderna.

propriedades. Por exemplo, o entendimento da expressão “circunferência circunscrita a um decágono regular” exige habilidade verbal.

c) habilidade gráfica (de desenho)

Não apenas na vida escolar, mas em situações cotidianas, muitas vezes um desenho é muito mais importante do que uma demonstração. Por exemplo, na tentativa de explicar um endereço, um esboço de mapa pode ser melhor do que o uso de termos como perpendicular, paralelas e ângulos.

No contexto escolar, a habilidade para desenhar está intimamente relacionada com a formação do conceito geométrico. Para desenhar um retângulo ou um losango, o aluno deve saber medidas de segmentos, ângulo reto, mediatriz, perpendicularismo, etc. e deve saber utilizar corretamente os instrumentos de desenhos como régua, transferidor, esquadro e, em um nível mais avançado, a régua não graduada e o compasso.

d) habilidade lógica

São habilidades lógicas os atos de classificar figuras de acordo com as semelhanças e diferenças, estabelecer propriedades, incluir classes, deduzir conseqüências a partir de informação dada e entender as limitações de hipóteses e teoremas. Nas próprias construções de figuras ou nos cálculos de medidas de ângulos, perímetros, áreas e volumes, é necessária a habilidade lógica.

e) Habilidade de aplicação

No decorrer da história, pode-se perceber o grande fascínio do homem pelo estudo das formas dos objetos e das relações espaciais e suas transformações. A geometria aparece tanto na história do desenvolvimento das ciências naturais como no terreno das artes plásticas em geral. No cotidiano percebem-se as mais variadas formas de objetos, o apelo visual de propaganda, os logotipos, as medidas etc. Um modelo matemático pode ajudar a descrever um fenômeno e a buscar soluções, por exemplo em estatística, arquitetura, astronomia etc. Na matemática utilitária, a geometria tem um grande campo de aplicação.

Não se deveria reduzir o estudo da geometria a aplicações práticas. No entanto, desconsiderá-las seria tornar cada vez menos significativo o ensino desta disciplina.

Além de classificar as habilidades, Hoffer (1981) relacionou-as com os níveis propostos por Van Hiele, permitindo, dessa forma, que se possa estudar os níveis de pensamento dos alunos através das diferentes habilidades apresentadas por eles ao responder questões, executar tarefas ou solucionar problemas. O quadro a seguir resume essa relação. Para este trabalho, foram escolhidas para estudo as habilidades visual, gráfica e verbal, que serão descritas logo adiante.

Quadro 2. Habilidades básicas em geometria (baseado em Hoffer, 1981)

NÍVEL HABILIDADE	RECONHECIMENTO	ANÁLISE	ORDENAÇÃO	DEDUÇÃO	RIGOR
VISUAL	Reconhece figuras diferentes num desenho. Reconhece informações rotuladas numa figura	Percebe as propriedades de uma figura como parte de uma figura maior	Reconhece relações entre diferentes tipos de figuras. Reconhece propriedades comuns de diferentes tipos de figuras.	Usa informação sobre uma figura para produzir outras informações.	Reconhece suposições injustificadas feitas através do uso de figuras. Concebe figuras relacionadas em vários sistemas dedutivos
VERBAL	Associa o nome correto com uma figura dada. Interpreta sentença que descreva figuras.	Descreve acuradamente várias propriedades de uma figura	Define palavras precisa e concisamente. Formula sentenças mostrando relações entre figuras.	Entende a distinção entre definições, postulados e teoremas. Reconhece o que é dado num problema e o que se pede.	Formula extensões de resultados conhecidos. Descreve vários sistemas dedutivos.
GRÁFICA	Faz esquemas de figuras identificando acuradamente as partes dadas.	Traduz numa figura a informação verbal dada. Usa as propriedades de figuras para desenhar ou construir as figuras.	Dadas certas figuras é capaz de construir outras figuras relacionadas às figuras dadas	Reconhece quando e como usar elementos auxiliares numa figura. Deduz a partir de informação dada como desenhar ou construir uma figura específica	Entende as limitações e capacidades de vários instrumentos de desenho. Representa pictoricamente conceitos em vários sistemas dedutivos
LÓGICA	Percebe que há diferenças e semelhanças entre figuras. Entende a conservação da forma de figuras em posições diferentes.	Entende que figuras podem ser classificadas em diferentes critérios. Percebe que propriedades podem ser usadas para distinguir as figuras.	Entende qualidades de uma boa definição. Usa propriedades de uma figura para determinar se uma classe de figuras está contida numa outra classe.	Usa regras de lógica para desenvolver provas. É capaz de deduzir consequências a partir de informação dada.	Entende as limitações e capacidades de hipóteses e postulados. Sabe quando um sistema de postulados é independente, consistente e categórico.
APLICAÇÕES	Identifica formas geométricas em objetos físicos	Reconhece propriedades geométricas de objetos físicos. Representa fenômenos físicos em papel ou num modelo	Entende o conceito de um modelo matemático que representa relações entre objetos.	É capaz de deduzir propriedades de objetos a partir de informações dadas ou obtidas. É capaz de resolver problemas que relacionam objetos.	Usa modelos matemáticos para representar sistemas abstratos. Desenvolve modelos matemáticos para descrever fenômenos físicos, sociais e da natureza.

A HABILIDADE VISUAL E A HABILIDADE GRÁFICA EM GEOMETRIA

Considera-se que as habilidades citadas por Hoffer (1981) estejam relacionadas e que possam ser aprendidas com os conceitos, simultaneamente. Para o presente trabalho, a habilidade visual está muito ligada à habilidade gráfica, já que os alunos mostram, através de desenhos de planificações, não apenas a sua percepção visual da figura tridimensional, mas a habilidade de reproduzir suas partes (desenho no plano) de uma maneira organizada, de tal forma que essas partes possam ser reunidas novamente e assim possam reconstruir a figura no espaço. Convém lembrar que a habilidade em realizar planificações é requerida dos alunos do Ensino Fundamental nas propostas de currículo constantes na Proposta do Estado de São Paulo, nos Parâmetros Curriculares Nacionais e em boa parte dos livros didáticos das primeiras séries.

Ao se fazer uma revisão do conceito de habilidade visual e gráfica, encontram-se na literatura termos como percepção, percepção espacial, relações espaciais, imagens mentais e rotação mental (Banks, 1981; Bryden & Inch, 1990; Cooper & Shepard, 1973, 1982; Jahoda, 1979; Lejeune, 1994; Marmor, 1975; Shepard & Metzler, 1971; Shimojo (1981) citados por Núñez; Corti & Retschitzki, 1998) e desenhos representativos, pontos de vista, desenvolvimento da representação gráfica (Chen, 1986; Chen, Therkelsen & Griffiths, 1984; Cox, 1986; Duthe, 1977; Flavell, 1974; Freedman, 1986; Mitchelmore, 1978; Moore, 1986 e Thisstlewood, 1992, citados por Cox & Perara, 1998), o que mostra que os estudos sobre habilidades são bastante vastos na psicologia. No entanto, para este trabalho, são analisadas apenas as situações que possam indicar entendimento dos conceitos investigados.

Gardner (1983) argumenta que a habilidade espacial é uma das várias competências intelectuais humanas consideradas como autônomas, sendo que o raciocínio espacial é essencial para o pensamento científico e é usado para representar e manipular informações para a solução de problemas.

Krutetskii (1976) cita a habilidade geométrica como uma forma de raciocínio que teriam alguns indivíduos quando preferem resolver problemas usando esquemas

gráficos. Outros autores (Hershkowitz, 1989; Johnson, 1987; Kosslyn, 1983; Stigler, 1990; Tartre, 1990; Yakimanskaya, 1971; citados por Clements & Batista, 1992) realçam a importância do raciocínio espacial e da formação de imagens na aprendizagem não apenas da geometria especificamente, mas de outros campos da matemática.

Entre outros autores que estudam as habilidades, Lea (1990), define a habilidade espacial como um complexo conjunto de destrezas intercaladas, como memória visual, visualização e orientação. Para se ter uma boa memória visual seria preciso ter uma habilidade para reter, recordar e manipular informações relativas às figuras e relações espaciais. A visualização dependeria de como se percebe, retém e reconhece uma configuração organizada como um todo. A orientação seria uma habilidade para manipular uma figura, transformá-la mentalmente movimentando-a ou deformando-a e relacionar as partes de um todo ou os objetos entre si (Lea, 1990).

Para Del Grande (1994), a percepção espacial é a faculdade de reconhecer e discriminar estímulos no espaço, e interpretar esses estímulos associando-os a experiências anteriores. Baseado nos estudos de Frosting e Horne (1964) e Hoffer (1977), citados por Del Grande (1994), este último autor descreveu sete aptidões espaciais, resumidas a seguir:

Coordenação visual-motora é a capacidade de coordenar a visão com o movimento do corpo. Muitas vezes, o esforço em realizar movimentos em uma tarefa (como cortar, desenhar) dificulta a concentração da criança para a aprendizagem.

Percepção de figuras em campos é o ato visual de identificar uma figura específica (o foco) num quadro (o campo). A atenção é focalizada em uma figura, desconsiderando-se outras marcas.

Constância da percepção ou constância de forma e tamanho é a habilidade de reconhecer uma forma mesmo quando é vista sob um ângulo diferente. Assim, um aluno perceberia que a forma e o tamanho de um cubo não se modifica quando ele é visto sob várias perspectivas.

Percepção da posição no espaço é a habilidade de determinar a relação de um objeto com outro e com o observador. Parece que quem tem essa habilidade consegue perceber os movimentos de rotação e translação de uma figura em relação a um referencial.

Percepção de relações espaciais é a habilidade que uma pessoa tem de enxergar dois ou mais objetos em relação a si mesma ou em relação um ao outro, ou uns aos outros. Está ligada à percepção da posição no espaço, mas inclui também relações que permitem completar figuras, completar sequências, unir pontos para formar figuras etc.

Discriminação visual é a habilidade de distinguir semelhanças e diferenças entre objetos.

Memória visual é a habilidade de lembrar, com precisão, um objeto que não está mais à vista e relacionar suas características com outros objetos, estejam eles à vista ou não.

O conceito de percepção

A percepção é tema de vários estudos que tratam da habilidade visual, no entanto, neles seu significado nem sempre é o mesmo. Utilizando a definição de Roth (1986) citado em Eysenk&Keane (1994), o termo percepção diz respeito ao processo de transformar e interpretar a informação adquirida do meio ambiente através dos órgãos sensoriais. Na percepção visual, é estudado na psicologia cognitiva o reconhecimento de padrões, que envolve a identificação de estímulos bidimensionais e tridimensionais do meio ambiente.

Entre outras, duas importantes abordagens sobre o reconhecimento de padrões podem ser citadas: a da teoria de atributos e a da Gestalt.

Segundo a teoria de atributos, o reconhecimento visual de padrões baseia-se nos atributos ou elementos do padrão visual. Assim, supõe-se que, para reconhecer padrões, o sujeito comece extraíndo características do estímulo apresentado, sendo que essas características são então combinadas e comparadas às informações armazenadas na memória. Essa teoria tem várias limitações, entre elas está o fato de que não leva em consideração o papel desempenhado pelo contexto onde o estímulo está situado, nem as expectativas do sujeito no reconhecimento dos padrões. Além disso, a análise de atributos a estímulos mais complexos não é sempre aplicável. Parece que as relações entre os atributos - e não apenas os atributos em si - são importantes no reconhecimento de padrões.

A teoria da Gestalt² contrasta com a teoria dos atributos ao propor que o reconhecimento de padrões baseia-se no formato geral do estímulo visual, e não sobre os atributos que o compõem. Nessa perspectiva, a principal unidade de análise, na percepção, é o todo, que não é a soma das partes.

Segundo a teoria, o conhecimento anterior de uma forma não influencia no reconhecimento imediato dessa forma quando esta aparece em uma outra estrutura organizada. A organização formaria entidades maiores, onde as partes parecem ficar destruídas para se ter a formação do todo. Assim, por exemplo, mesmo conhecendo a forma do numeral 4, esta não é facilmente visível no primeiro desenho a seguir, mas é visível no segundo desenho. Isso aconteceria porque o primeiro desenho forma uma estrutura organizada, ao contrário do segundo, que não é um todo organizado.

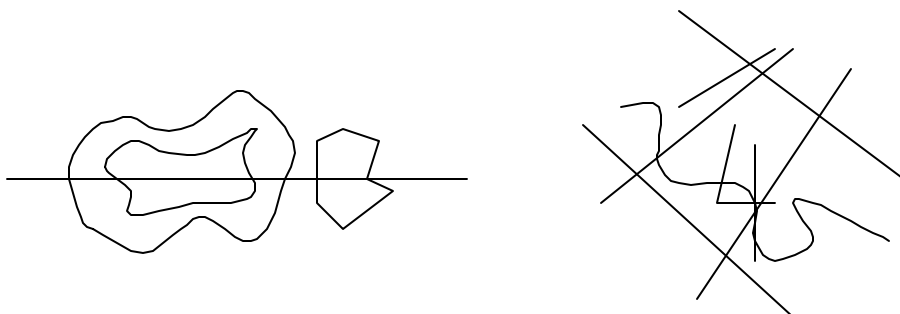


Figura 4. Exemplos de uma organização (à esquerda) e uma configuração não organizada (à direita). Baseado em Köhler (1980)

Embora dê tanta importância à organização total, Köhler (1980) reconhece que os próprios princípios de organização dizem respeito tanto ao isolamento das partes quanto ao seu caráter unitário. Por isso, não nega a importância da análise (processo capaz de salientar alguns conteúdos e suprimir outros) e afirma que esse processo pode dar origem a uma mudança de organização. Assim, por exemplo, pondo em evidência certos membros em um campo, pode-se intencionalmente mantê-los juntos e favorecer uma espécie particular de unificação. A figura a seguir é um exemplo dessa

² Gestalt pode significar “inteiro”, “configuração”, “forma”, “organização”. Essa teoria foi proposta por um grupo de psicólogos alemães, entre eles Koffka, Wertheimer e Köhler.

alteração de organização do modelo, onde é possível verificar os três setores estreitos (com ângulos agudos), ou os três mais largos (com ângulos obtusos).

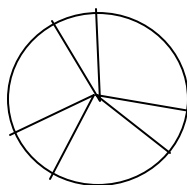


Figura 5. Objeto formado por setores, com duas organizações possíveis. Baseado em Köhler (1980).

A teoria conclui que o exame prolongado de qualquer objeto visual pode levar à mudança de sua organização.

Com base nessa teoria, pode-se refletir um pouco sobre o papel da habilidade visual na formação dos conceitos geométricos. A teoria da Gestalt pode fornecer algumas idéias de como o sujeito percebe as formas geométricas. Segundo ela, parece que tais formas podem ser percebidas como um todo organizado, e não através de seus atributos. Sendo assim, um triângulo seria reconhecido por sua aparência total, em um primeiro momento, para só depois de uma análise suas partes serem percebidas (lados, ângulos, vértices etc). O processo de análise, segundo a teoria, poderia dar origem a uma mudança na organização. De fato, parece que, ao analisar as partes da figura, essas partes acabam se tornando um todo organizado. Se é assim, a partir da análise dos lados retos do triângulo e do número de lados, seria possível que a nova organização passasse a ser lados. A figura seria vista como uma organização de lados, e não uma forma total. O caminho para a percepção do triângulo como um polígono ainda poderia ser longo, mas mudanças estruturais estariam acontecendo no indivíduo. Seria a mudança do Nível 1 para o Nível 2 de Van Hiele, embora, para essa mudança, talvez não influenciasse apenas a percepção visual (mas outras habilidades, como a verbal, a gráfica etc) .

Com discordância em relação à teoria da Gestalt, para Piaget e Inhelder (1993), a percepção é o conhecimento dos objetos resultante do contato direto com eles. A percepção das boas formas (ou formas euclidianas simples) desenvolve-se com a idade em função da atividade sensório - motriz: movimentos do olhar, exploração tátil, análise

imitativa, transposições ativas etc. Uma percepção é, portanto, um determinado sistema de relações organizadas em uma totalidade imediata, mas o equilíbrio dessa totalidade não depende somente das relações reais; intervêm nele também as relações que se referem a percepções anteriores ou a possíveis movimentos. Um exemplo para essas idéias é um cubo percebido em perspectiva de modo que nenhuma de suas faces apareça projetivamente como um quadrado: é impossível perceber esse objeto sem que intervenham, na percepção dessa forma, os movimentos que poderiam ser executados para ver os quadrados de frente. Portanto, toda percepção implica em um esquema sensório-motor: o indivíduo aplica à situação atual o resultado conjunto das construções anteriores (Piaget&Inhelder,1993).

Além da percepção do objeto, é necessário que o indivíduo o represente internamente. A representação envolve a evocação dos objetos, em sua presença ou em sua ausência. Nos estudos sobre a construção da noção de espaço na criança, Piaget e Inhelder (1993) distinguem o espaço perceptual do espaço representativo. A abstração de uma figura não é uma abstração perceptual de uma propriedade física, mas é resultado de uma coordenação das ações da criança, sejam ações sensório-motoras ou operações mentais. Fazer um desenho é uma ação de representação, não de percepção. Se a representação, em um certo sentido, prolonga a percepção, ela também introduz um sistema de significações . É a partir do momento em que aparece a função simbólica, isto é, em que os “significantes” (símbolos = imagens, signos = palavras) se diferenciam dos “significados” (sob a forma de relações) que a representação é associada à atividade sensório-motriz e se desenvolve o espaço representativo (Piaget&Inhelder, 1993). Assim, uma coisa seria perceber um círculo ou um quadrado; outra coisa seria reconstruir uma imagem visual para poder desenhá-los. Piaget alega que desenhos imprecisos refletem a inadequação de ferramentas para representação espacial. Realmente, a inabilidade de crianças jovens em desenhar uma cópia de um simples desenho é levada como um indicativo de que o fundamento do desenvolvimento conceptual do espaço consiste na coordenação das ações e não em uma percepção passiva.

O reconhecimento e a representação de formas

Na construção do espaço perceptivo ou sensório-motor, a criança estabelece as relações topológicas mais elementares: de vizinhança, separação, ordem, circunscrição e continuidade. Quando começa a manipular objetos, essa ação conduz à análise das formas. Há construções simultâneas das relações euclidianas (caracterizadas pela constância das dimensões atribuídas aos objetos) e projetivas (caracterizadas pela coordenação dos pontos de vista sobre o objeto, isto é, das perspectivas). Quando a criança reconhece um objeto quadrado feito de madeira visto em perspectiva, ela coordena uma correspondência projetiva entre duas perspectivas distintas (de frente, de lado), com uma correspondência euclidiana que garante o reconhecimento dos lados iguais do quadrado. Da mesma forma, reconhecer o objeto à distância é reconstituir uma grandeza métrica (euclidiana) de uma figura diminuída pela perspectiva (projetiva). Portanto, o espaço perceptivo é construído segundo uma ordem de sucessão que vai de relações topológicas iniciais a relações projetivas e métricas, depois finalmente a relações de conjuntos ligadas aos deslocamentos dos objetos, uns em relação aos outros.

Para estudar a passagem da percepção à representação, Piaget e Inhelder (1993) discutiram a questão da imagem através de uma experiência chamada “percepção estereognóstica”, isto é, o reconhecimento tátil (relativo a objetos não-visíveis) dos objetos sólidos. Utilizando-se um anteparo, as crianças manipulavam objetos familiares e formas geométricas em madeira, e deviam nomeá-los, ou reconhecê-los entre outros modelos diversos e visíveis, ou desenhá-los. Tratava-se, portanto, de traduzir a percepção tátil-cinestésica do objeto invisível em uma imagem espacial de caráter visual. Como resultado dos estudos sobre a intuição das crianças quanto às formas, os autores afirmam que, em média, as crianças entre dois e três anos só reconheceram as formas dos objetos familiares (como bala, pente, colher, tesoura), sendo que essas formas foram apreendidas como um todo. Depois, passaram a reconhecer as formas topológicas, isto é, as que envolvem fechamento ou abertura, separação, enlaçamento, figuras com furos etc (por exemplo, distinguiram um anel de um círculo, mas não distinguiram um quadrado de um triângulo). No processo, foram estabelecidas as

relações euclidianas, quando se iniciou então um processo de diferenciação entre figuras curvas e com retas - sendo que as retas foram distinguidas pelos ângulos – de igualdade ou desigualdade entre os lados das figuras e de paralelismo e não paralelismo. O desenho permaneceu em atraso em relação ao reconhecimento, mas nesse estágio a criança desenhou, por exemplo, quadrados, retângulos e triângulos, e apresentou dificuldade em desenhar um losango e, principalmente, uma cruz gamada. Apenas ao nível das operações concretas, as figuras foram exploradas sistematicamente, os elementos percebidos em função de um ponto de referência em uma coordenação reversível. A cruz foi, então, possível de ser desenhada. Essas experiências mostram a oposição e simultaneamente a continuidade entre as formas perceptivas e a representação figurada dessas formas, sendo que nesse processo o sujeito reconstrói as relações já adquiridas no plano perceptivo.

Estudando, então, a construção do espaço representativo, Piaget procurou investigar se essa construção passava pelas mesmas fases, embora alegando que existiria um intervalo de alguns anos entre a construção do espaço perceptivo e a do representativo.

Uma das maneiras de fazer essa pesquisa foi analisar os desenhos que as crianças faziam de certos modelos, incluindo-se aqui algumas figuras geométricas planas sozinhas, ligadas com outras, sobrepostas etc. Em um primeiro estágio, a criança desenhou garatujas, depois ela conseguiu representar figuras abertas e fechadas (relações topológicas) depois distinguiu formas retilíneas de curvilíneas (relações euclidianas). Na sequência, houve a representação de ângulos e de medidas, de linhas oblíquas e composição progressiva de figuras encaixadas.

De acordo com Piaget, o espaço geométrico não é um puro decalque do espaço físico. A reconstrução das formas não consiste simplesmente em isolar qualidades perceptivas do objeto, mas é decorrente de um relacionamento ativo que implica uma abstração a partir das ações do sujeito e de suas coordenações progressivas. A construção das formas geométricas implica em uma acomodação do sujeito aos objetos de tais ações e também na assimilação do objeto às coordenações das ações.

Além das relações topológicas – mais ligadas ao objeto em si - Piaget e Inhelder (1993) pesquisaram a construção das relações projetivas e euclidianas do espaço

representativo, isto é, das relações que permitiriam à criança diferenciar, em um desenho, perspectivas, ângulos, medidas etc. Alguns desses estudos serão citados a seguir, quando se pretende localizar a questão dos desenhos de planificações de figuras espaciais.

As habilidades visual e gráfica a partir da planificação de figuras

Usando as definições de Hoffer (1981), um aluno teria habilidade visual se reconhecesse informações rotuladas em uma figura e se percebesse as propriedades de uma figura como parte de uma figura maior. No caso da geometria espacial, uma maneira de verificar essa habilidade é analisar, através dos desenhos das planificações de figuras, se o sujeito percebe as informações rotuladas na figura. Essas informações devem ser as diferentes superfícies (planas ou não) que são sugeridas pelo desenho em perspectiva. No entanto, ao perceber as partes, o aluno precisa analisar como essas superfícies (cujas formas são desenhadas no plano) vão formar novamente a figura tridimensional, ou, em outras palavras, como as partes vão formar o todo.

Como habilidade gráfica, Hoffer (1981) cita a capacidade de traduzir em uma figura (desenhando) uma informação obtida, seja de maneira verbal ou visual. Nos desenhos da planificação de figuras espaciais, os conhecimentos prévios de geometria plana devem ser considerados, mas não apenas eles. A disposição, por exemplo, das faces de um poliedro exige não somente conhecimento de polígonos, sendo necessário, também, que o aluno analise as partes do poliedro (visíveis e não - visíveis) e uma possível conexão de faces. Assim, para desenhar a planificação do cubo, além de saber desenhar quadrados (quatro lados de igual comprimento e quatro ângulos retos), os alunos devem desenhar os quadrados congruentes e a disposição das faces deve permitir uma movimentação adequada para formar a figura tridimensional. A figura a seguir sugere planificações possíveis e não - possíveis do cubo.

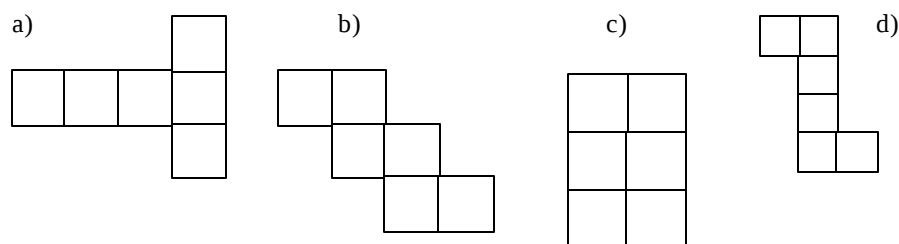


Figura 6. Planificações possíveis (a),(b),(d) e não possível (c) para o cubo

Portanto, além da percepção da configuração total, o desenho da planificação parece requerer do aluno a análise de atributos, mas essa análise deve permitir a organização desses atributos em um todo. Para essa análise, parecem estar presentes a habilidade de percepção de figuras em campos (para destacar os quadrados), de constância da percepção ou constância de forma e tamanho (para deixar todas as faces quadradas, apesar da deformação proposital na figura apresentada para dar noção de perspectiva), percepção de relações espaciais (para girar a figura e verificar as seis faces e entender quais e como os quadrados podem ficar unidos na planificação). No entanto, parece que todas as habilidades anteriores se apoiam na antecipação de ações possíveis com o objeto tridimensional.

Piaget e Inhelder (1993) afirmam que o indivíduo percebe os objetos tridimensionais com uma visão simultaneamente euclidiana e projetiva. No entanto, embora as relações projetivas e euclidianas apareçam desde a percepção, elas não são reconstruídas pela representação antes do período que vai dos 7 aos 10 anos. Uma das maneiras de os autores estudarem as representações das crianças, foi através de análises dos desenhos de planificação de figuras, à qual chamaram de “rebatimentos de volumes” (no caso dos poliedros) e de “desenvolvimento” (no caso do cilindro e cone) e que serão rapidamente descritas a seguir.

Num estágio inicial (antes dos 4 anos) não é possível interrogar a criança sobre como seria o desenho de um cubo planificado, por exemplo. O início do estágio II é caracterizado por uma indiferenciação completa ou parcial dos pontos de vista, onde o

desenho do objeto tridimensional e a sua planificação permanecem idênticos. O cilindro é reduzido a um retângulo ligado por elipses, o cone a um círculo, o cubo a um quadrado, a pirâmide a um triângulo. Evoluindo nesse estágio, a criança começa a diferenciar pontos de vista, marcando, por exemplo, no retângulo do desenho do cilindro, uma linha para indicar que ele deve ser desdobrado para formar o cilindro. A criança não consegue se desligar de sua visão atual do sólido para imaginar as planificações, mas demonstra intenção de desdobramento.

O estágio III inicia-se com a representação de fases do desdobramento. Assim, começa a desenhar alguns quadrados como planificação do cubo. Os resultados são parciais, como se as faces estivessem entreabertas. Os cilindros são desenhados na forma dois círculos reunidos por retas paralelas fechadas por arcos. O sujeito tem um conjunto de percepções correspondente a vários pontos de vista mas, não conseguindo rebater todos os planos, mostra que sua representação ainda não é projetiva, mas atende ainda a uma característica topológica. Nas pesquisas de Piaget&Inhelder (1993) o cilindro e o cone são desdobrados, isto é, planificados antes dos poliedros.

Embora existam pesquisas que discordem³ das idéias de Piaget sobre a construção das relações topológicas, projetivas e euclidianas (nessa ordem), optou-se por aceitar sua teoria sobre a percepção das formas, sobre a diferenciação de espaço perceptivo e representativo e sobre o desenvolvimento das relações espaciais de acordo com os estágios propostos. No entanto, verifica-se que a geometria ensinada nas escolas - mesmo no Ensino Fundamental - requer do aluno a formação de muitos conceitos considerados essenciais para que este avance no estudo da própria geometria, ou da Matemática ou de outras disciplinas. Para a construção desses conceitos é necessária a instrução sistematizada. Pode-se imaginar que, sozinho, sem nenhum tipo de mediação, o sujeito talvez seja capaz de analisar os lados e ângulos do triângulo equilátero e agrupá-lo com outras figuras formadas por segmentos de retas, mas dificilmente iria classificá-lo como polígono regular. Isto quer dizer que, embora aceitando que a percepção e a representação de figuras estejam ligadas ao desenvolvimento da criança – tendo, portanto, um caráter individual e espontâneo de

³ Alguns desses autores são Darke(1982), Kapadia(1974), Martin(1976), Liben(1978), Rosser, Horan, Mattson, & Mazzeo(1984), citados por Clementes e Batista (1992) e por Clements e colaboradores(1999).

construção - os significados para a formação dos conceitos geométricos são adquiridos em contextos interpessoais de instrução. Contextos esses que refletem a intenção de dar significado ao que é culturalmente aceito. Os conteúdos geométricos ensinados nas escolas têm a clara intenção de formalizar a geometria no sistema euclidiano. Assim, o triângulo “tem que ser percebido e representado” como uma figura formada por três lados (segmentos de reta), por três vértices (pontos), num plano etc... e é esse processo que, segundo Van Hiele, se dá através dos níveis de pensamento em geometria.

A HABILIDADE VERBAL EM GEOMETRIA

A habilidade verbal é entendida como constituindo as diferentes maneiras de o aluno nomear as figuras, descrever as suas características e propriedades e interpretar sentenças que descrevam tanto as propriedades como as relações entre as propriedades das figuras. Incluem-se aqui a interpretação dos dados de um problema e a distinção entre postulados e teoremas. Assim como outras habilidades, a verbal está relacionada com a formação dos conceitos geométricos e, segundo Van Hiele, o indivíduo não alcança níveis mais altos de conceituação sem dominar a linguagem própria de cada nível.

Para entender o papel da linguagem nos diferentes níveis de formação de conceitos, pode-se utilizar as idéias de Vygotsky (1995). Para esse autor, a ação do sujeito sobre o objeto do conhecimento é mediada socialmente pelo outro e através de signos. Os sujeitos então se apropriam das diferentes atividades práticas e simbólicas compartilhadas no âmbito social e as internalizam para se transformarem em modos de ação próprios. Essa reelaboração no plano individual do que era externo, social, baseia-se na mediação semiótica, em especial a linguagem. As funções mentais superiores constituem, dessa forma, relações sociais interiorizadas. A elaboração de um conceito - que necessita de funções elementares superiores - é um modo culturalmente desenvolvido de o sujeito refletir cognitivamente suas experiências, sendo esse

processo constituído dos movimentos de análise/síntese, abstração dos dados sensoriais, mediado pela palavra (Rossi, 1993).

O significado da palavra é proposto por Vygotsky como uma espécie de molécula do pensamento verbal. De acordo com Tunes (1995), a palavra nem produz, nem expressa o pensamento: ela o mediatiza. Como signo mediador na relação do homem com o mundo, a palavra é em si uma generalização, e sua utilização favorece os processos de abstrair e generalizar.

A linguagem tem, então, duas funções básicas: a de intercâmbio social - que serve para a comunicação entre os indivíduos - e a de pensamento generalizante - que simplifica e generaliza a experiência (Oliveira, 1992). Quando está formando os conceitos cotidianos, a criança descobre que cada coisa tem seu nome, e assim a palavra funciona como meio para a formação do conceito; no entanto, ao atingir formas de pensamento mais elaboradas, a palavra passa a ser o símbolo para o conceito. Na formação (ou assimilação, utilizando a terminologia de Ausubel) dos conceitos científicos, há a necessidade da palavra como ancoradouro. Os conceitos cotidianos dizem respeito às relações da palavra com os objetos a que se referem. Já os científicos, às relações das palavras com outras palavras, pois não há como compreender tais conceitos sem ligá-los a outros. Assim o indivíduo só daria significado a uma palavra que designa um conceito científico se desse significado às outras palavras que representam os outros conceitos aos quais o primeiro está relacionado.

Para que um indivíduo entenda toda a teia de relações que envolvem os conceitos referentes às figuras espaciais, é necessário que ele se aproprie, via instrução, da linguagem própria dessa disciplina, dos seus códigos, dos seus significados. Embora cada palavra (cada nome, cada definição) tenha seu significado em geometria, o sentido dessas palavras pode não ser o mesmo para todos os alunos. Assim, se a palavra *retângulo* significa *ângulo reto* e pode ser aplicada a triângulos, o sentido de retângulo para um aluno pode ser limitado a um tipo de figura que ele aprendeu a nomear dessa maneira. Assim também podem diferir os significados e os sentidos de *regularidade*, *congruência* e *semelhança de figuras*.

Os exemplos do parágrafo anterior dizem respeito à distinção entre significado e sentido entendida pelos autores da corrente sócio-histórica, entre eles Vygotsky.

Significado seria a significação convencional atribuída aos signos pela sociedade. No caso da geometria, a sociedade seria formada pelos matemáticos. Sentido seria a significação que esses signos têm para cada uma das pessoas e que se relacionam com a história de sua vida pessoal (Pino, 1992). Na história de vida dos alunos sujeitos dessa pesquisa, provavelmente devem ter aparecido os termos específicos da geometria, na escola ou fora dela, com significados e sentidos variados.

Portanto, no processo de formação dos conceitos, não se pode deixar de perceber as formas de utilização da linguagem escrita já apropriada pelos alunos, seja essa linguagem natural, seja referente à geometria plana. Essas formas de utilização da linguagem podem ser definidas como habilidade verbal. Na evolução dos níveis de pensamento propostos por Van Hiele, essa habilidade deve apresentar diferenças entre os alunos.

CAPÍTULO V

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

- **Um resumo da teoria de Van Hiele: aspectos gerais já levantados**

Nasser (1992) e Clements e Battista (1992) fizeram um levantamento dos vários projetos que foram desenvolvidos desde o final da década de 70 até 1991 para investigar diversos aspectos da Teoria de Van Hiele.¹

A análise desses trabalhos mostra os pontos em comum:

- a) Os níveis de pensamento realmente parecem formar uma hierarquia, embora existam pesquisas que evidenciam algumas exceções;
- b) O desenvolvimento nos níveis não parece estar relacionado estritamente à série ou à idade, mas é influenciado por um processo de ensino-aprendizagem;
- c) O modelo de Van Hiele pode ser utilizado – seja na forma de entrevista ou de avaliação escrita - para descrever o desempenho dos alunos e, portanto, é útil para orientar professores na elaboração do seu plano de ensino;
- d) É possível que o mesmo aluno esteja raciocinando em diferentes níveis em conceitos distintos da Geometria. Os níveis têm uma natureza mais dinâmica do que estática, e não existe uma globalidade dos níveis. Pesquisas mostram que um aluno, estando em um nível *potencial*, ao estudar um conceito novo, começaria a raciocinar no Nível 1, mas passaria rapidamente para níveis mais altos, até alcançar o *potencial*.
- e) Em geral, os alunos que iniciam o curso sistemático de geometria no curso secundário raciocinam nos níveis Básico ou 1 (Estados Unidos) ou mesmo antes do Básico (Brasil);
- f) Em geral os professores primários portugueses em formação raciocinam no primeiro ou no segundo nível de Van Hiele;
- g) Há evidências de que exista um nível abaixo do nível 1, porém não há acordo entre os pesquisadores.

¹ Uma classificação das pesquisas e dos referidos autores encontra-se no Anexo 1.

- h) Não existe acordo quanto à natureza dos níveis, ou seja, se eles são contínuos ou discretos. Há casos onde há dificuldade em classificar alunos em níveis, pois parecem estar em transição, raciocinando em dois níveis consecutivos ao mesmo tempo.
- i) O quinto nível não existe ou não pode ser testado;
- j) Ao final do primeiro ano de um curso sistemático de Geometria, apenas 30% dos alunos conseguem compreender totalmente as demonstrações e exercícios típicos do livro didático;
- k) Apenas 36% dos estudantes americanos testados após o curso sistemático de Geometria no curso secundário alcançaram o estágio das operações formais (conforme Piaget) raciocinando no terceiro nível de Van Hiele;
- l) A vivência de atividades com a linguagem LOGO facilita a formação de conceitos geométricos do primeiro para o segundo nível de Van Hiele
- m) Os livros didáticos tradicionais americanos e soviéticos que foram usados segundo o modelo de Van Hiele mostram-se deficientes em vários aspectos, a maior parte das questões pertencendo ao Nível 1. Encontraram-se saltos nos níveis, (por exemplo, as explicações num nível mais alto do que os exercícios), tópicos sendo repetidos em várias séries no mesmo nível e trabalhos sendo desenvolvidos nos três primeiros níveis simultaneamente.

- **A medida dos níveis de Van Hiele: descrição de um método**

Jaime e Gutierrez (1990-a) descreveram um método para avaliar o grau de aquisição de cada nível de pensamento pelos alunos de uma escola secundária. Sua suposição é de que, para uma avaliação mais precisa do nível, é necessário observar como o aluno se situa em cada nível. Um teste de geometria plana, tipo lápis e papel, com nove questões sobre polígonos, foi aplicado a 19 alunos de escola secundária, com idades entre 15 e 16 anos. Para cada questão foi apontado qual(s) o(s) nível(s) necessário para respondê-la corretamente. As respostas dos alunos foram categorizadas com números chamados “tipo” de 0 a 7, sendo que os tipos 0 e 1 indicaram não aquisição do nível, tipos 2 e 3 indicaram baixa aquisição no nível; tipo 4

indicou uma aquisição intermediária; tipos 5 e 6 uma alta aquisição e tipo 7 indicou uma aquisição completa. Assim, um vetor (n,t) foi atribuído a cada resposta, sendo n o nível considerado e t o tipo de resposta. Foi feita a porcentagem para t (de 0% a 100%) considerando todas as questões e assim cada aluno foi classificado num grau. Embora os resultados não possam ser generalizados, os autores encontraram seis classificações: classe A (nível 1 completo e nível 2 intermediário), B (nível 1 completo e nível 2 baixo), C (nível 1 completo), D (nível 1 intermediário e nível 2 baixo), E (nível 1 intermediário) e F(nível 1 baixo). Os números encontrados para cada classe foram, respectivamente, de 3, 9, 2, 2, 1 e 2 alunos.

- **Os artigos teóricos**

Encontram-se, a partir de 1990, vários artigos teóricos que pretendem esclarecer o modelo de Van Hiele, seja relacionando-o com outras teorias, seja propondo maneiras para avaliar os níveis, ou então sugerindo atividades para serem desenvolvidas no intuito de elevar os níveis das crianças.

Com o objetivo de auxiliar o professor na identificação dos níveis, Pegg e Davey (1991) descreveram três atividades sugeridas para avaliação do entendimento de crianças de 5 a 10 anos. As atividades consistiam em desenhar e descrever figuras (por exemplo, quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos); descrever propriedades mínimas, isto é, identificar figuras utilizando o menor número de propriedades) e incluir classes, isto é, descrever figuras utilizando outras figuras (por exemplo, descrever quadrado como um retângulo que possui certas características). Os autores sugeriram que os alunos fornecem diferentes descrições e que elas evoluem na medida que aumenta o entendimento das propriedades das figuras. Essa evolução, no entanto, levaria tempo e a atividade de inclusão de classes apresentaria dificuldades para a maioria dos alunos por representar uma nova e importante maneira de organizar o pensamento dos estudantes. Os autores alertaram para o fato de que fazer os alunos decorarem certas definições e relações como “todo quadrado é retângulo” impede que o real nível de entendimento seja diagnosticado. Concluíram que as três atividades por

eles descritas podem tornar-se um instrumento para ajudar o professor a analisar o processo de aprendizagem dos seus alunos e assim elaborar melhor sua prática.

Davey e Holliday (1992) levantaram as habilidades geométricas citadas por Hoffer (1981): visual, verbal, desenho, lógica e aplicações, relacionando-as com os níveis 1, 2 e 3 de Van Hiele e também ampliaram o estudo fornecendo várias séries de atividades para cada habilidade. Para desenvolver as habilidades visuais foram sugeridas atividades de reconhecimento de objetos, interpretação de diagramas, imaginação de figuras após transformações etc. Atividades onde os alunos usem linguagem oral e escrita para definir figuras, para descrever propriedades ou a localização de objetos, desenvolveriam a habilidade verbal. Sugestões para habilidades gráficas foram a construção de diagramas e modelos, desenhos em rede pontilhada, desenhos em perspectiva etc. Encontrar semelhanças e diferenças, conservar uma figura independente de sua localização ou posição, incluir classes de figuras, formular e testar hipóteses fizeram parte das habilidades lógicas. Criar desenhos para decoração, mapear ruas, construir pipas desenvolveriam as habilidades de aplicar a geometria no cotidiano. Tais atividades foram sugeridas para serem desenvolvidas até o nível 3 de Van Hiele.

Propondo uma discussão teórica, Nunokawa (1992) apresentou um princípio para reconstruir os níveis de Van Hiele. Analisou o conceito de símbolo, que é um dos mais importantes conceitos da teoria, e aplicou esse conceito no reconhecimento de figuras. Mostrou, então, que há três caminhos diferentes para as pessoas reconhecerem figuras: no primeiro, elas veriam a figura totalmente, como uma espécie de imagem visual, o que corresponderia ao nível 1 de Van Hiele. Posteriormente a figura seria reconhecida como uma forma que tem certas características (Nível 2). Finalmente seria reconhecida pela sua definição, ou seja, como um encadeamento de conceitos de um sistema geométrico (Nível 3). Tomando o sistema geométrico como um novo objeto do pensamento e aplicando o mesmo argumento para ele, é possível obter três caminhos de reconhecimento de um sistema geométrico. A pessoa o reconheceria como uma rede de conceitos, porém seria indiferente às características (Nível 3). Então ela passaria a reconhecer as propriedades de um sistema geométrico (Nível 4) e só depois o reconheceria como um sistema pela sua definição.

O mesmo autor relacionou a teoria de Van Hiele com a teoria sobre conhecimento informal (Nunokawa, 1993), encontrando o seguinte: (a) reconhecimento de figuras no primeiro nível pode ser tomado como conhecimento informal das figuras, (b) transição do primeiro para o terceiro nível pode ser vista como transição do conhecimento informal para o formal. Baseado nisso, o autor analisou a relação entre a teoria de Van Hiele e a de Vygotsky; encontrando que (a) reconhecimento de figuras no segundo nível corresponderia ao pseudoconceito ou conceito potencial, (b) transições entre os níveis corresponderiam ao desenvolvimento dos conceitos científicos baseados nos conceitos cotidianos, (c) o espaço entre o primeiro e o terceiro nível poderia ser considerado para generalizar a zona de desenvolvimento proximal com respeito ao conhecimento geométrico. O autor caracterizou, então, a teoria de Van Hiele como sendo a que se ocupa com o ensino de geometria usando a zona de desenvolvimento proximal das crianças possibilitando aos alunos o acesso ao conhecimento

Levando em consideração a recomendação dada pelo N.C.T.M (1989) de relacionar Matemática com o conteúdo de outras disciplinas, Usnick e colaboradores (1993), descreveram um série de atividades que envolviam geometria e arte. Essas atividades relacionavam os níveis do pensamento geométrico de Van Hiele com os estágios do pensamento que foram descritos pelos educadores da área de artes. Esses cinco estágios, usados para descrever o desenvolvimento da compreensão da criança e da sua habilidade em representar o seu mundo, foram nomeados como: rabiscos, pré-esquemático, esquemático, *gang* e pseudonaturalístico. No primeiro estágio, as atividades teriam como objetivo desenvolver vocabulário relacionado a conceitos espaciais (embaixo, ao lado, sobre) e reconhecer e manipular figuras. No segundo estágio, identificar figuras geométricas planas baseadas em pistas e perguntas. O terceiro envolveria atividades que têm por objetivo explorar o uso de figuras geométricas para representar os desenhos de objetos reais, por exemplo contornando as formas existentes em fotos de jornal. No quarto estágio foram propostas atividades de transformações geométricas como reflexão, rotação e translação. Por fim, a descrição de atividade de reconhecimento de figuras geométricas como parte de objetos do cotidiano.

Um relato de experiência foi apresentado por Galindo (1996) onde constaram os aspectos gerais de um projeto de ensino-aprendizagem da geometria baseado no quadro das habilidades básicas de Hoffer (1981) e relacionadas com os níveis de Van Hiele. Foi aplicado um programa para alunos de sexta série com o objetivo de dominar transformações geométricas e aplicá-las na construção de mosaicos. Foram levados em conta os temas: primeiros conceitos de geometria euclidiana, conceito e classificação de ângulos, paralelismo e perpendicularismo, polígonos, translação, rotação, reflexão e aplicações das transformações nos mosaicos de M.C.Escher. Apesar de apontar falhas e dificuldades durante a realização do projeto, a autora afirmou que os alunos participantes se mostraram bastante motivados e que os objetivos foram alcançados.

Tendo a teoria de Van Hiele como suporte teórico, o Projeto Fundação da UFRJ deu continuidade ao seu trabalho com a organização de atividades seguidas de orientações ao professor, abrangendo tópicos como quadriláteros, congruência, semelhança e teorema de Pitágoras (Nasser & Sant'Anna, 1995).

Com todas as atividades testadas em sala de aula e reformuladas com base nas sugestões dos professores, o Projeto Fundação lançou, em 1997, um livro com o objetivo de auxiliar o professor no seu trabalho. Partindo do fato de que o aluno constrói seu conhecimento, Lopes e Nasser (1997) sugeriram atividades desde a exploração de sólidos geométricos até transformações isométricas no plano, que foram aplicadas no estudo da congruência de figuras.

- **As pesquisas sobre a teoria de Van Hiele**

Algumas pesquisas envolvendo a teoria de Van Hiele realizadas na última década, além de aplicar testes para classificar os níveis de raciocínio em geometria, também tiveram como objetivo sugerir trabalhos para melhorar o desempenho de alunos.

Este é o caso da pesquisa realizada por Nasser (1992) cujo objetivo foi investigar se as dificuldades normalmente encontradas por estudantes brasileiros do Ensino Fundamental poderiam ser superadas por uma instrução apropriada, baseadas na teoria de Van Hiele. O tópico escolhido foi congruência de figuras planas porque ele

ilustraria a não adequação existente entre o nível do aluno e o nível no qual a instrução é dada. A amostra foi formada por 317 alunos da 7ª série do Ensino Fundamental, com idades entre 13 e 15 anos, de quatro escolas do Rio de Janeiro. Os níveis de Van Hiele alcançados pela amostra foram identificados no início do período letivo, através de testes especialmente elaborados para esse fim. Verificou-se que a metade dos alunos estava abaixo do Nível 1. Os sujeitos foram, então, submetidos, durante seis meses, a várias atividades baseadas em Van Hiele. Verificou-se que, no segundo teste, metade dos alunos da amostra tiveram seus níveis elevados. O experimento relativo ao tópico congruência foi realizado em duas das escolas, com 75 alunos no grupo experimental e com 42 no grupo de controle. O material de instrução para o grupo experimental foi desenvolvido no Nível 2 de Van Hiele, para se adequar melhor ao nível dos alunos. Transformações foram usadas para justificar a congruência de figuras, adiando assim as provas usando os casos de congruência de triângulos. Os alunos dos dois grupos responderam a um pré-teste e a um pós-teste, com questões comuns em sete categorias. Os alunos Nível 1 do grupo experimental tiveram desempenho melhor que os do grupo de controle em todas as categorias. Os alunos Nível 2 do grupo experimental tiveram melhor desempenho nas categorias Prova Formal e Informal e Definição. A diferença foi significativa nas categorias Prova Informal, Prova Formal (para alunos tanto do Nível 1 como do Nível 2) e Reconhecimento (alunos do Nível 2).

Nasser (1992) descreveu também o estudo realizado com alunos universitários da UFRJ em abril/89 com objetivo de obter algumas informações sobre o tipo de geometria aprendido no ensino médio, se gostavam de estudar geometria e em que níveis de Van Hiele estes estudantes estariam. A amostra era composta de 263 estudantes universitários e os instrumentos utilizados foram um questionário e um teste. Os resultados mostraram que, embora os estudantes tivessem aprendido deduções e provas geométricas, apenas um terço deles estava no nível de dedução de Van Hiele. Os estudantes demonstraram não relacionar geometria Euclidiana com a geometria plana; a maioria afirmou gostar tanto de Matemática quanto de geometria e mais da metade deles achou que a aplicação da geometria é no próprio curso e não no trabalho ou na vida. No entanto, afirmaram a necessidade de mais aulas de geometria e melhor preparo de professores.

Com o objetivo de verificar a possibilidade de se elevar o nível de raciocínio dos alunos em geometria, Rubinstein (1994) realizou uma pesquisa na qual foram aplicados testes diagnósticos para verificar o nível dos alunos e, após os resultados obtidos, os sujeitos, divididos em grupos, realizaram atividades específicas para cada nível. Após a realização dessas, outro teste foi aplicado com o objetivo de verificar se os alunos progrediram nos níveis propostos por Van Hiele. O trabalho teve prosseguimento quando se propôs a um grupo de 11 alunos, que tinham alcançado o Nível 3, que fizessem a dedução da fórmula para identificação do número de diagonais de um polígono, o que foi conseguido por oito alunos, mostrando que o tipo de atividade influencia na evolução dos níveis.

Os modelos de formação de conceitos de Klausmeier e de Van Hiele serviram como base teórica para a pesquisa realizada por Pirola (1995) com 137 alunos de 5ª a 8ª séries da rede oficial de SP. O objetivo da pesquisa foi verificar se alunos em séries mais adiantadas conseguiriam identificar o conceito de triângulo e de paralelogramo em termos dos seus atributos definidores, exemplos e não-exemplos de maneira mais completa do que alunos de séries menos adiantadas. Os dados foram obtidos através de questionário, prova de atributos definidores e prova de exemplos e não-exemplos. Os resultados indicaram que os alunos da 7ª série apresentaram desempenho melhor do que os das outras séries sendo que a ordem de classificação das séries foi: 7ª, 6ª, 8ª e 5ª.

Tendo como fundamento o modelo teórico de Van Hiele e apoiando-se na psicologia genética de Piaget, Lujan (1997) realizou uma pesquisa onde foram aplicadas atividades geométricas de modo a melhorar o desempenho dos alunos. Foram sujeitos 44 crianças da primeira série do ensino fundamental de uma escola da rede oficial do Estado, que constituíram os grupos experimental e de controle; foram submetidos ao pré-teste, intervenção pedagógica e pós-teste. Os resultados indicaram que os sujeitos do grupo experimental, que foram submetidos a um trabalho de intervenção pedagógica, apresentaram um desempenho significativamente melhor no pós-teste do que o grupo de controle que não participou do trabalho de intervenção pedagógica. Além disso, a pesquisa também mostrou que os alunos da 1ª série podem

adquirir conceitos geométricos se a proposta de trabalho pedagógico for condizente com o nível cognitivo dos alunos.

Mason (1997) realizou um estudo para investigar se o modelo teórico de Van Hiele descreveria o pensamento geométrico de alunos habilidosos de 6ª série num curso formal de geometria e fez comparações com o que foi encontrado em outras populações. Foram analisados os resultados de 120 estudantes que completaram uma prova com 25 questões tipo múltipla escolha desenvolvida pelo Cognitive and Achievement in Secondary School Geometry Project, e de 64 estudantes que participaram de uma entrevista individual de 30 a 45 minutos. Embora as respostas dos estudantes que realizaram os testes tivessem a forma de uma hierarquia total, 35,8 % dos alunos habilidosos testados saltaram níveis no modelo Van Hiele. Análises das entrevistas clínicas confirmaram que indivíduos não demonstraram o mesmo nível de pensamento em todas as áreas da geometria. Muitos dos estudantes não deram definições corretas de conceitos básicos como congruência e semelhança, mas eles tentaram deduzir as conclusões vindas de indícios dentro de um contexto. Muitos estudantes raciocinaram coerentemente para chegar a uma conclusão, correta ou incorreta. Embora raciocínio tenha sido o forte da maioria dos sujeitos, eles não souberam como construir uma prova geométrica formal e aceitável.

Carroll (1998) realizou estudo longitudinal comparando o conhecimento de alunos usando o currículo tradicional de matemática com o UCSPM - Projeto de Matemática da Universidade de Chicago. Nesse currículo, a geometria é trabalhada desde a pré-escola, com ênfase nas relações entre geometria e outros tópicos da matemática, nas atividades com material, nas atividades de raciocínio, solução de problemas, discussão em grupos, etc. Foram sujeitos do grupo experimental 76 alunos da quinta e 109 da sexta série, que foram testados no começo e no final do ano letivo. Seis classes usaram uma versão do teste elaborado por UCSMP para a sexta série e quatro classes usaram o teste da quinta série. Seis escolas de diferentes distritos foram representantes da sexta série e quatro da quinta série. Foram selecionadas dez classes para o grupo de controle, nas mesmas condições do experimental, sendo 91 alunos da quinta e 137 da sexta série. Os pré-testes e pós-testes foram construídos usando o modelo de Van Hiele e foram compostos por 27 questões, sendo 21 questões divididas nos três primeiros

níveis (7 questões para cada nível). Para o aluno ser considerado como pertencente a um determinado nível, deveria obter um mínimo de cinco acertos. Tanto no pré-teste como no pós-teste, os alunos submetidos ao programa tiveram desempenho melhor que os não submetidos e as diferenças foram significativas. Quanto aos níveis de Van Hiele, apenas 10% dos alunos no pré-teste e 5% no pós-teste não estiveram de acordo com o modelo, resultado que sugere que o teste define uma hierarquia consistente com a teoria de Van Hiele. Todos os grupos mostraram progresso nos níveis. No entanto, na quinta e na sexta série do grupo de comparação, mais da metade dos alunos se situou abaixo do Nível 1 no pós-teste. Ao contrário, pelo menos metade dos alunos submetidos ao UCSPM teve resultados pertencentes aos Níveis 1 e 2 para ambas as séries, no pós-teste. Testes estatísticos mostraram que os alunos da quinta série experimental tiveram resultados melhores do que os de sexta série do grupo de comparação. Foi também solicitado aos alunos que explicassem o raciocínio utilizado em duas questões. Nessa prova, um total máximo de 7 pontos foi atribuído, e os resultados mostraram uma melhor pontuação para os alunos de sexta série do grupo experimental, seguido do de quinta e depois pelos alunos do grupo de comparação. Esse estudo sugeriu, portanto, que o estudo da geometria a partir da pré-escola, onde o aluno pudesse construir e classificar figuras baseando-se em propriedades, sem memorização de nomes e fórmulas apenas, favoreceria a obtenção de níveis mais altos na hierarquia de Van Hiele.

Embora existam muitas propostas sugerindo que a geometria seja ensinada a partir da pré-escola, com objetos tridimensionais, a grande maioria dos estudos que se apoiam na teoria de Van Hiele diz respeito apenas à geometria plana. No entanto, foi possível localizar as investigações de Saads e Davis (1997) sobre os níveis de Van Hiele na geometria tridimensional; sobre o uso da linguagem na identificação de propriedades de poliedros e sobre as habilidades de percepção espacial baseadas em Del Grande. Foram sujeitos da pesquisa 25 professores que responderam a um teste que tinha o objetivo de classificá-los nos níveis de Van Hiele e estimar a sua percepção espacial. A classificação dentro dos níveis obedeceu ao critério proposto por Gutierrez (1991). Entre os sujeitos, sete professores foram voluntários para participar, em grupo, da discussão na identificação de propriedades de figuras tridimensionais, sendo que um

sujeito não via a figura, mas tinha a tarefa de identificá-la após fazer várias perguntas aos colegas. Concluiu-se que a classificação dos sujeitos nos níveis segue a natureza hierárquica, ao contrário das categorias propostas por Del Grande para habilidade de percepção espacial, onde não se constatou hierarquia. Concluiu-se também que a descrição oral de figuras dependeu da combinação do nível de raciocínio em geometria, sua habilidade espacial e sua habilidade em expressar as propriedades usando a linguagem específica.

- **Outras pesquisas envolvendo conceitos em geometria**

Trabalhando com futuros professores ao ensinar os tópicos referentes a conceitos e princípios; formação e assimilação de conceitos e ensino de conceitos, Brito (1996) apresentou um estudo que descreve as maneiras como os estudantes formam um conceito artificial, e cita vários autores que trataram desse tema (Krutetskii, 1976; Pozo, 1994; Ausubel, 1978; Klausmeier&Googwin, 1977 e Sowder, 1980, apud Brito, 1996). Participaram desse estudo 22 estudantes universitários de cursos de Licenciatura. Após terem recebido cartela com desenhos de exemplos e não-exemplos de um conceito, os sujeitos foram solicitados a responder quais os atributos relevantes e irrelevantes e a definição do conceito. A análise dos protocolos revelou que os sujeitos consideraram o desenho como uma figura geométrica; que se referiram ao conceito a partir de suas experiências anteriores; que empregaram termos da área de conhecimento de onde eram originários; que a generalização pareceu estar afetada pela quantidade dos exemplos e não-exemplos e dos atributos relevantes e irrelevantes presentes. Concluiu-se que os sujeitos que se saíram melhor na assimilação do conceito foram aqueles que receberam uma informação que continha quantidades semelhantes de exemplos e não-exemplos. Isso pode mostrar que a qualidade e a quantidade de exemplos utilizados pelo professor é importante para a formação de conceitos em sala de aula.

Também com o objetivo de promover a aprendizagem em geometria, Jalles (1997) buscou o desenvolvimento de estratégias metacognitivas de crianças pré-escolares.

Foram sujeitos 30 crianças de escola de Educação Infantil, distribuídos aleatoriamente em dois grupos: experimental e de controle, sendo que por dois meses os dois grupos participaram de atividades lúdicas de exploração das características de um cubo. O grupo experimental recebeu instruções específicas de estratégias cognitivas, que se caracterizam por intervenção verbal e de procedimento do pesquisador, visando despertar no aprendiz atenção seletiva e dirigida, e consciência de seu processo de raciocínio e aprendizagem; além disso, as estratégias procuraram definir objetivos e metas nas atividades, verbalização dos alunos, avaliação da aprendizagem etc. Os dois grupos foram submetidos a pré e pós teste e os resultados foram comparados estatisticamente, sendo encontrada diferença significativa no desempenho do grupo experimental. Acrescenta-se ainda que cinco alunos do grupo experimental acertaram a planificação do cubo.

- **Pesquisas envolvendo habilidade espacial e habilidade verbal**

Na execução de certas atividades em geometria é possível perceber as habilidades espaciais que são requisitadas. Um estudo permitindo uma melhor compreensão desse processo foi realizado por Oliveira (1998) que identificou e analisou a percepção espacial envolvida nos procedimentos utilizados para solução de problemas de discriminação e composição de figuras geométricas. Foram sujeitos da pesquisa nove estudantes do ensino fundamental, distribuídos em três grupos, conforme os instrumentos oferecidos para a solução dos problemas: apenas peças do Tangram em papel cartão, apenas o sistema computacional Tegan ou ambos os instrumentos, sendo que as sessões foram gravadas e filmadas. Utilizou-se o conceito de habilidade de acordo com os trabalhos de Krutetskii (1976) e Del Grande (1990), sendo que este último foi utilizado para estabelecer as categorias de análise referentes à percepção espacial. A análise dos dados mostrou que nas atividades de discriminação o tempo gasto foi menor e o número de acertos foi maior enquanto que na atividade que envolvia composição de figuras (talvez pelo fato de tal atividade envolver muitas transformações como translação, rotação e reflexão) o tempo gasto foi

maior e os sujeitos necessitaram de um maior número de intervenções da pesquisadora.

Tendo como eixo o desenvolvimento da elaboração conceitual na Matemática e a explícita participação da linguagem natural nesse processo, Rossi (1993), a partir de pressupostos da teoria sócio-histórica, analisou e discutiu a constituição de operações realizadas com recursos mediadores, nas situações de elaboração de um conceito artificial e de conceitos relativos às figuras geométricas básicas. Foram sujeitos da pesquisa estudantes de diversos níveis escolares e com idade variando de 6 a 17 anos. Os dados foram obtidos a partir de situações-tarefa, realizadas em sessões individuais, em que os sujeitos eram solicitados a desenvolver atividades de elaboração conceitual. Os resultados indicaram que frente a um conceito matemático desconhecido, os sujeitos buscaram significá-lo através de seu relacionamento com outros signos de linguagem natural já elaborados, evidenciando movimentos em direção a diferentes níveis de abrangência no processo de generalização. Apontaram também que o funcionamento da linguagem natural na constituição dos significados na Matemática contemplaram dois níveis inter-relacionados: o nível da palavra que designa e significa o conceito, e o plano das trocas dialógicas, no qual a palavra está imersa. Nessa análise, ficaram delineadas algumas implicações pedagógicas e contribuições da perspectiva sócio-histórica para a discussão metodológica relativa ao desenvolvimento categorial.

- **As críticas ao modelo de Van Hiele**

Alguns autores propuseram uma discussão teórica apresentando críticas ao modelo de Van Hiele. Apontaram as limitações da teoria e dos testes padronizados, e indicaram a necessidade de investigação para esclarecimento de vários aspectos do modelo.

Um desses autores foi Hoffer (1983), que afirmou que o valor do modelo Van Hiele não estaria na estratificação do pensamento no aluno, mas sim em interpretar

cada assunto que se quer que o aluno aprenda em termos do modelo. Para isso seria necessário identificar explicitamente quais são os objetos de cada um dos níveis.

Esse autor afirmou também que testes padronizados para identificar os níveis não levariam a um resultado exato, quando se tratasse de analisar o modo como as pessoas pensam. O Projeto Chicago descobriu, por exemplo, que algumas crianças respondiam corretamente perguntas de Nível 4 e davam respostas erradas a perguntas de nível mais baixo. Sugeriu, portanto, que fossem feitos estudos de caso para determinar claramente como os alunos perceberiam os objetos em diferentes níveis e como eles seriam influenciados por essas percepções. Só então uma seqüência de aprendizado poderia ser feita de modo eficaz.

Outra questão a ser investigada seria a referente às relações que o aluno faz em cada nível. Em suas pesquisas Hoffer observou os fenômenos :

Idealização - O aluno interpreta uma palavra ou objeto e o transforma num caso especial. Por exemplo, relaciona a palavra triângulo à figura de um triângulo equilátero na posição do livro; o quadrado é descrito como quadrilátero perfeito.

Não-variação - O aluno conserva o mesmo nome para a figura não obstante ela seja transformada. Assim, um retângulo é um quadrado esticado.

Hoffer sugeriu, então, que, como nas doenças, esses fenômenos deveriam ser investigados antes de dar tratamento adequado. Esses padrões de raciocínio estariam ligados com o sistema de relações que o aluno forma, e poderiam ser investigados por “clínicas de entrevistas”.

Quanto às fases de aprendizagem, o autor citou programas de ensino realizados por Brown & Walter (1982, apud Hoffer, 1983) que utilizaram problemas e auto-avaliação e sugeriu que haveria necessidade de outras experiências nesse sentido. Finalmente, em relação ao ambiente de aprendizagem, Hoffer colocou em questão o que traria à tona a formação do conceito e o desenvolvimento da compreensão.

Matos (1992), entre algumas críticas que fez da teoria de Van Hiele, afirmou que a mesma não trataria de áreas cruciais da aprendizagem da geometria como orientação espacial, representação bidimensional de objetos tridimensionais, medições, trigonometria e geometria analítica.

O mesmo autor afirmou que a teoria não explicaria as diferenças individuais, pois os alunos sempre foram considerados como um grupo homogêneo; os estilos cognitivos e as preferências de aprendizagem não teriam sido abordadas. Além disso, como o Nível 1 estaria baseado nas estruturas espontâneas do material, esse fato não permitia que os alunos pudessem desenvolver um conhecimento matemático autônomo.

Quanto ao papel do professor, este seria considerado como a fonte do conhecimento em aula, ajudando os alunos a estabelecer relações entre os símbolos lingüísticos e informando os termos técnicos. No entanto, esse procedimento anularia o papel do conhecimento anterior dos alunos e não conseguiria explicar porque alguns alunos pareciam construir conceitos matemáticos não convencionais.

Entre esses conceitos não convencionais, Matos levantou o fenômeno chamado de modelo metafórico verificado por pesquisadores como Burger (1985, apud Matos, 1992). Relatou que os alunos, em algumas situações, distinguiriam triângulos por apontarem para cima, para o lado, ou para baixo.

Outra questão levantada por Matos foi a classificação. Pesquisas indicaram que a classificação hierárquica dos quadriláteros estaria num nível acima do descrito por Van Hiele. (Shaughnessy, 1986, Fuys, 1985, Mason, 1989, Usiskin, 1982 apud Matos, 1992). Outros autores tentaram investigar a fonte de tais dificuldades e concluíram que as causas poderiam ser “interferência de dificuldades anteriores”, ou práticas de ensino inadequadas. (Fuys, Geddes e Tischer, 1985 apud Matos, 1992). No entanto, Matos questionou o que haveria de mais específico na classificação de quadriláteros que a tornaria mais difícil de entender do que a classificação de figuras em quadriláteros, triângulos e círculos.

Essa mesma questão foi levantada por Clements e Batista (1992) quando relataram os estudos de Kay (1986, apud Clements e Batista, 1992) sobre classificação de figuras. Nesses estudos, Kay afirmou que os alunos discriminavam algumas características das figuras baseado nos modelos visuais que foram utilizados para conceituá-las, e talvez isso explicaria a dificuldade em incluir classes de figuras. Utilizando uma instrução onde os alunos aprenderam primeiramente as propriedades dos quadriláteros, depois dos retângulos e só então dos quadrados, muitos alunos conseguiram estabelecer as relações hierárquicas entre essas figuras. Sendo assim, a

crítica que se fez da teoria de Van Hiele é que ela não explicaria a ampla complexidade de como as crianças formariam os conceitos geométricos.

Uma questão que foi levantada por pesquisadores que utilizaram uma perspectiva piagetiana é a existência de um nível inferior ao do reconhecimento, provavelmente pré-requisito ao Nível 1. Segundo Clements e Batista (1992), neste nível de pré-reconhecimento as crianças perceberiam figuras geométricas, mas seriam incapazes de identificar as figuras geométricas mais comuns. Elas poderiam até distinguir as figuras formadas por linhas retas ou curvas, mas não saberiam distinguir figuras numa mesma classe.

Levando-se em consideração a revisão bibliográfica que pôde ser feita, é possível formar a opinião que classificar alunos em níveis não é mais importante do que aprofundar o estudo das características de pensamento próprias de cada nível. Em se tratando de futuros professores das séries iniciais, o resultado do levantamento de algumas dessas características pode indicar qual é o conhecimento geométrico acumulado por esses alunos ao longo de, no mínimo, oito anos de escolaridade, e assim fazer uma avaliação parcial do ensino de geometria que eles tiveram. Além disso, esse levantamento pode, conforme sugerido por Hoffer (1983), indicar como interpretar cada objeto de ensino da geometria em função do modelo. Para o referido levantamento, acredita-se que os níveis de conceitos sobre as diversas figuras espaciais devem ser avaliados através de habilidades que os alunos demonstrem ter para responder a certas questões.

CAPÍTULO VI

OS CONCEITOS GEOMÉTRICOS INVESTIGADOS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil,1997) descreveram como uma das finalidades do ensino de Matemática levar o aluno a fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos do conhecimento e estabelecer o maior número de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático sob várias perspectivas, entre elas a geométrica. Entre os conteúdos conceituais e procedimentos, no item espaço e forma, são destacados: (a) reconhecimento de semelhanças e diferenças entre corpos redondos como a esfera, o cone e o cilindro; (b) reconhecimento de semelhanças e diferenças entre poliedros (como os prismas, as pirâmides e outros) e identificação dos elementos como faces, vértices e arestas; (c) composição e decomposição de figuras tridimensionais, identificando diferentes possibilidades; (d) exploração das planificações de algumas figuras tridimensionais.

Para acompanhar as primeiras atividades do AM - Atividades Matemáticas (São Paulo, 1991-b) o professor deveria reconhecer as principais formas tridimensionais que estão presentes nos objetos do cotidiano, pois, naquelas atividades, são apresentadas à criança figuras em papel que devem ser comparadas a objetos.

Para confeccionar material manipulável para as crianças, o professor deve ser capaz de projetar uma planificação em um papel (cartolina, por exemplo) para a confecção dos chamados “sólidos geométricos”. Sem analisar propriedades das figuras, o professor não obtém autonomia em realizar esse trabalho, ou seja, acaba tendo que recorrer aos moldes das figuras conhecidas. Além disso, algumas atividades da Proposta da CENP (São Paulo, 1991-a) sugeriam que as crianças analisassem planificações e as relacionasse com o objeto tridimensional.

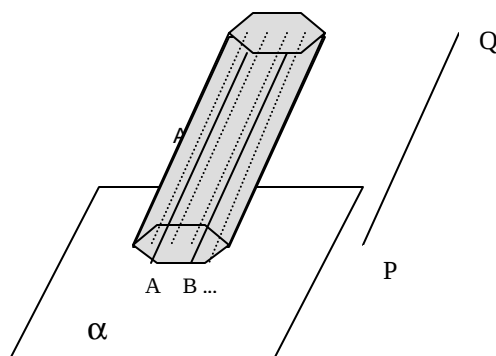
Assim, foi considerado importante investigar os conceitos de prisma (incluindo paralelepípedos e cubos), pirâmide, cilindro, cone e esfera. A seguir, são apresentados os referidos conceitos conforme definições apresentadas em livro didático¹ de Ensino Médio. Acrescente-se que essas definições podem ser chamadas de conceitos como

¹ Dolce&Pompeo (1985). *Geometria Espacial. Posição e Métrica*. In IEZZI G. *Fundamentos da Matemática*.v.10.São Paulo:Atual

entidades públicas, como nomeou Klausmeier (1977), pois são aquelas aceitas pelos especialistas da área.

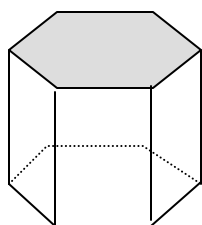
Definição de prisma:

Considerem-se um polígono convexo (região poligonal convexa) $ABCD...MN$ situado em um plano α e um segmento de reta PQ , cuja reta suporte intercepta o plano α . Chama-se prisma (ou prisma convexo) à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a PQ , com uma extremidade nos pontos do polígono e situados em um mesmo semi-plano determinado por α .

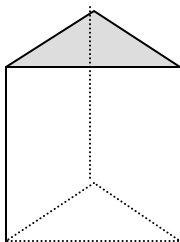


Um prisma pode ser reto (se as arestas laterais forem perpendiculares à base), oblíquo (se as arestas laterais são oblíquas ao plano da base), regular (se a base for um polígono regular).

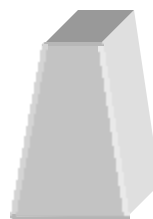
Alguns exemplos de prismas:



(a)



(b)

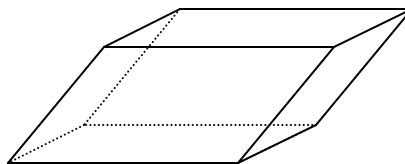


(c)

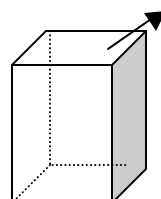
O prisma (a) é reto e tem base hexagonal. Como a base aparece em perspectiva, é necessária a indicação se a base é um hexágono regular. O mesmo acontece em (b) que é um prisma reto de base triangular. Observe-se que em (c) o prisma tem base trapezoidal mas não está apoiado na base.

Tipos especiais de prismas:

Paralelepípedo é um prisma cujas bases são paralelogramos.

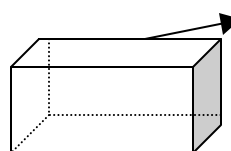


Paralelepípedo reto é um prisma reto cujas bases são paralelogramos.



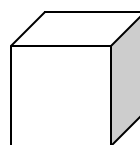
Paralelogramo

Paralelepípedo reto-retângulo ou paralelepípedo retângulo ou ortoedro é um prisma reto cujas bases são retângulos.



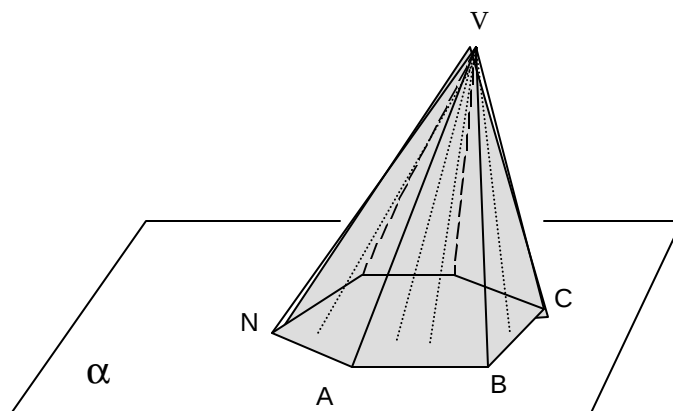
Retângulo

Cubo é um paralelepípedo retângulo cujas arestas são congruentes.

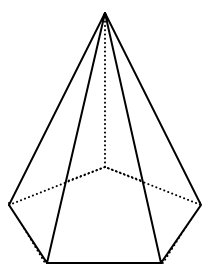


Definição de pirâmide:

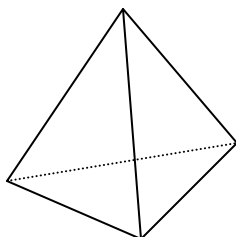
Considerem-se um polígono convexo (região poligonal convexa) $ABC...MN$ situado em um plano α e um ponto V fora de α . Chama-se pirâmide (ou pirâmide convexa) à reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra extremidade nos pontos do polígono.



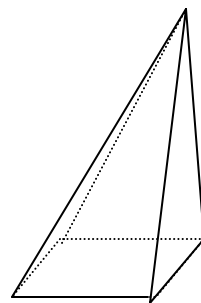
Exemplos de pirâmide:



(a)



(b)

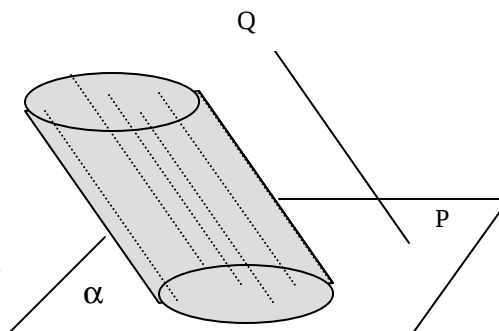


(c)

Nos casos (a) e (b) tem-se pirâmides retas de bases pentagonal e triangular, respectivamente. A pirâmide (c) tem base quadrangular e é oblíqua.

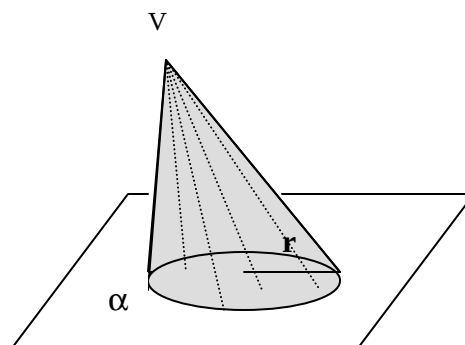
Definição de cilindro:

Considerem-se um círculo (região circular) de centro O e raio r situado em um plano α , e um segmento PQ , não nulo, não paralelo nem contido em α . Chama-se cilindro circular ou cilindro à reunião dos Segmentos congruentes e paralelos a PQ , com uma extremidade nos pontos do círculo e situados em um mesmo semi-espço dos determinados por α .



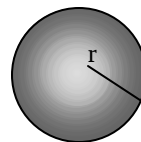
Definição de cone:

Considerem-se um círculo (região circular) de centro O e raio r situado em um plano α e um ponto V fora de α . Chama-se cone circular ou cone à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra nos pontos do círculo.

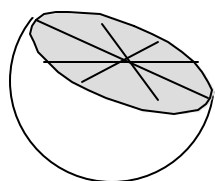


Definição de esfera:

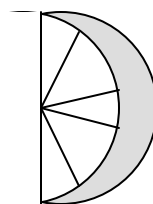
Considerem-se um ponto O e um segmento de medida r . Chama-se esfera de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância OP seja menor ou igual a r .



Secções da esfera e sólidos resultantes:



(a) Secção circular obtida por um plano e o sólido resultante

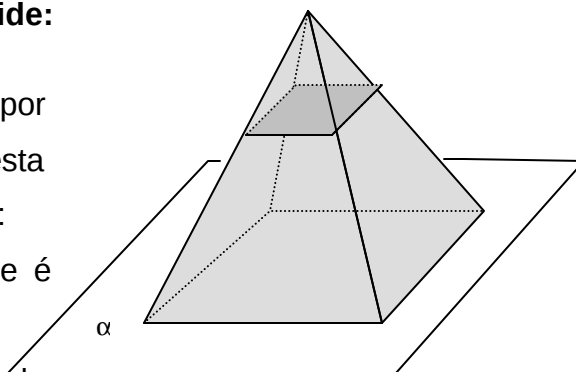


(b) Cunha: sólido resultante dos cortes feitos por dois planos que se interceptam em um diâmetro.

Definição de tronco de pirâmide:

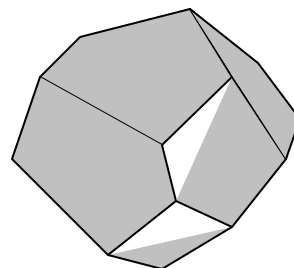
Quando se secciona uma pirâmide por um plano paralelo à base, esta pirâmide é separada em dois sólidos:

- o sólido que contém o vértice e é uma nova pirâmide e
- o sólido que contém a base da pirâmide e que é um tronco de pirâmide de bases paralelas.



Definição de poliedro

Considere-se um número finito n ($n > 4$) de polígonos convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que: a) dois polígonos não estão num mesmo plano; b) cada lado do polígono é comum a dois e somente dois polígonos; c) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semi-espaço. Nestas condições ficam determinados dois semi-espaços, cada um dos quais tem origem no plano e contém os restantes. A intersecção destes semi-espaços é chamado poliedro convexo.



Essas definições partem de lugares geométricos onde são usados os elementos primitivos da geometria: o ponto, a reta e o plano. Pode-se imaginar, então, que para chegar a esses conceitos, o aluno deveria ter aprendido toda a geometria plana e a geometria espacial de posição, para só então dominar a linguagem necessária para entendimento das definições. No entanto, essa não é a tendência da Proposta Curricular para o Ensino da Matemática do Ensino Fundamental (São Paulo, 1991) ou a dos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997). Nestas, o aluno das séries iniciais já entraria em contato com todos esses conceitos, manipulando material, fazendo comparações, estabelecendo relações, de modo a analisar propriedades geométricas das figuras espaciais e, no decalque das faces, das figuras planas.

Admite-se, pois, que os conceitos relativos às figuras geométricas se desenvolvam segundo a hierarquia de Van Hiele. Assim, mesmo sem definir um cilindro como uma reunião de segmentos paralelos e congruentes, é possível que as pessoas saibam reconhecer a figura, fazer sua construção no papel e analisar algumas de suas propriedades (tem duas bases circulares etc).

Admite-se, ainda, que o professor das séries iniciais deva estar pelo menos no Nível 3 de Van Hiele, já que deverá reconhecer e nomear figuras, analisar suas principais propriedades e estabelecer relações entre as propriedades. Deve ter

desenvolvido certas habilidades que permitam a construção do seu próprio material de trabalho, como desenhar em perspectiva, fazer planificações, visualizar cortes e simetrias etc.

Sendo assim, procurou-se hierarquizar cada um dos conceitos tratados nesse capítulo de modo a avaliar o nível de raciocínio em geometria dos alunos futuros professores do Ensino Fundamental.

CAPÍTULO VII

OBJETIVOS, SUJEITOS, MATERIAIS E PROCEDIMENTOS

Considerando que conhecimento sobre figuras espaciais é necessário para que os futuros professores possam ensinar geometria nas primeiras séries do Ensino Fundamental e considerando também os aspectos teóricos levantados quanto ao conhecimento, em especial os relativos à formação de conceitos, ao modelo de Van Hiele e ao desenvolvimento de habilidades, além das questões relativas à aplicação e aos limites do modelo de Van Hiele, foram elaboradas algumas questões, apresentadas a seguir:

Como os conceitos de geometria espacial, em especial aqueles referentes às figuras, podem ser classificados quando são empregados os níveis propostos por Van Hiele?

Como os futuros professores se relacionam com a geometria quando são considerados aspectos como gostar desse conteúdo, avaliação do ensino, conhecimento dos objetos de estudo, atribuição de sua importância e auto-percepção da competência para ensinar esse conteúdo, e como algumas dessas variáveis influenciam em seu desempenho?

Como os futuros professores reconhecem e denominam as figuras geométricas espaciais a partir de objetos do cotidiano? Como planificam, descrevem as propriedades dessas figuras e relacionam as propriedades?

Em que nível de conceituação em geometria espacial – de acordo com Van Hiele - estão esses futuros professores? Qual é o grau de aquisição dentro de cada nível?

É possível, a partir dos resultados das questões anteriores, interpretar os níveis levando-se em consideração as habilidades visual/gráfica e verbal?

OBJETIVO DA PESQUISA:

De acordo com as questões propostas, o presente trabalho tem por objetivos:

- 1) Analisar o desempenho dos alunos das quatro séries do Cefam em geometria espacial e classificá-los quanto aos graus de aquisição dos níveis de conceitos, segundo o modelo de Van Hiele, através de instrumento adequado.
- 2) Relacionar as categorias de análise das habilidades visual/gráfica e verbal com os níveis de conceito, interpretando, assim, o modelo.

Sujeitos

Foram sujeitos do presente estudo 377 alunos do Cefam 1 de Mogi das Cruzes.

O projeto Cefam¹ – Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério – conta com cerca de cinquenta unidades no Estado de São Paulo e sua implementação teve início em 1988. Na época de sua implementação tinha-se por objetivo que esse projeto fosse um Curso de Magistério de boa qualidade – habilitando o professor de 1^a à 4^a séries do Ensino Fundamental – e uma boa escola de Ensino Médio – proporcionando condições para que o aluno pudesse prosseguir seus estudos em Nível Superior. Além disso, pretendia-se que o Cefam fosse um Centro onde se desenvolvessem ações (como cursos, oficinas, orientações etc) para que os professores da rede estadual pudessem se aperfeiçoar. Esperava-se, assim, que o Cefam fosse “um polo irradiador” de idéias que tivessem como meta a melhoria do ensino público.

A presente pesquisa escolheu como amostra conveniente os alunos da unidade vinculada a EESG Plínio Boucault, na cidade de Mogi das Cruzes – SP, que

¹ Esses centros foram criados pelo Decreto 28.089, de 13 de janeiro de 1988. A parte mais importante do Projeto, tal como concebido inicialmente pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo pode ser encontrada no Parecer CEE nº 352/88. Acrescenta-se que os alunos são admitidos no curso através de exame de seleção, estudam em período integral e são bolsistas.

compreende quatro séries com três classes em cada série, sendo formados os seguintes sub- grupos:

GRUPO 1 : alunos das 1^{as} séries (N=102)

GRUPO 2: alunos das 2^{as} séries (N=97)

GRUPO 3: alunos das 3^{as} séries (N=97)

GRUPO 4: alunos das 4^{as} séries (N=81)

Procedimento e Instrumento

A coleta de dados foi realizada dentro da escola mediante autorização do diretor e dos professores das salas; o instrumento foi aplicado ao mesmo tempo a todos os alunos (individualmente), no transcorrer da aula, na presença do professor daquela aula.

O instrumento (Anexo 2), tipo lápis e papel, foi composto de duas partes. Na primeira delas, o Questionário procurou colher dados sobre os sujeitos e fazer um levantamento das opiniões sobre o ensino de geometria. A segunda parte foi composta da Prova de Conhecimentos, formada por questões elaboradas com a finalidade de coletar dados que permitissem verificar quais eram os níveis de raciocínio dos alunos em relação às figuras espaciais.

As questões tiveram por base algumas questões do teste elaborado por Usiskin (1982) que foram adaptadas para a geometria espacial. Convém acrescentar que, para responder às questões, os alunos tiveram que demonstrar habilidades como desenhar figuras e suas planificações e aplicar os conceitos na solução de problemas. Os desenhos foram feitos à mão livre ou com régua e compasso.

As capacidades referentes a cada nível podem ser inferidas a partir da resposta do sujeito para executar as ações solicitadas para cada um dos níveis. São elas:

- Nível 1 - Nomear a forma geométrica referente a cada objeto representado por um desenho em perspectiva ou então a partir do nome do objeto.
- Nível 2 - Desenhar a planificação de uma figura tridimensional a partir de seu desenho em perspectiva.
- Desenhar a figura em perspectiva a partir de sua planificação
 - Reconhecer forma geométrica a partir de descrição de propriedades.
 - Descrever propriedades de uma figura.
- Nível 3 - Classificar sentenças sobre propriedades das figuras (em verdadeiras ou falsas) e justificar por escrito ou com desenho.
- Classificar sentenças sobre inclusão de classes de figuras (em verdadeiras ou falsas).
 - Resolver problema onde se faz necessária a relação entre área e volume de paralelepípedos.

Com o objetivo de testar os instrumentos que seriam utilizados, foi realizado, com trinta e um alunos da terceira série do Ensino Médio de uma escola particular, um estudo preliminar.

A análise de dados

As questões da prova de Conhecimentos foram pontuadas e a média de acertos refletiu o desempenho de cada aluno. As questões foram também agrupadas em três blocos, cada um deles referindo-se a um dos níveis 1, 2 e 3 do modelo. Para classificar os alunos nos níveis, e depois dentro dos graus de aquisição dos níveis, foram utilizados os critérios adotados anteriormente por Carrol (1998) e por Jaime e Gutierrez (1990-a), respectivamente.

Para verificar a normalidade dos dados referentes ao desempenho dos alunos na Prova de Conhecimentos, foi utilizado o teste de Lilliefors (Norusis, 1993).

Para analisar a interferência das variáveis levantadas no desempenho dos alunos na prova foi aplicado o teste de Krustall Wallis (Siegel, 1975), que é um teste não paramétrico², que analisa a hipótese de nulidade de que as médias dos grupos são iguais, ou seja, se elas vem de uma mesma população; é um teste equivalente ao teste F (ANOVA), quando a variável segue uma distribuição normal.

Para analisar a relação entre as variáveis categóricas (qualitativas) foi utilizado o teste Qui-quadrado (χ^2), também não-paramétrico, que analisa o grau de associação entre duas variáveis categóricas.

Para estudar a relação entre os níveis foi utilizada a análise de correlação, através do coeficiente de correlação de Pearson. Para modelar a relação entre os níveis foi utilizada a análise de regressão, que estima os parâmetros envolvidos na relação.

Para a realização dos testes e elaboração dos gráficos foi utilizado o pacote estatístico Statistical Package for Social Science – SPSS e o nível de significância foi estabelecido em 0,05.

² Testes não paramétricos são aqueles testes que não precisam da suposição de normalidade para a variável dependente.

CAPÍTULO VIII

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

1ª PARTE : RESULTADOS QUANTO ÀS OPINIÕES E DESEMPENHO DOS SUJEITOS

Caracterização dos sujeitos

Os 377 sujeitos da pesquisa, alunos do Cefam 1 de Mogi das Cruzes, estavam distribuídos nas quatro séries, conforme se verifica na tabela a seguir.

Tabela 1. Distribuição dos alunos de acordo com série e turma

Turma	A		B		C		Total	
	Nºde alunos	%	Nºde alunos	%	Nºde alunos	%	Nºde alunos	%
Série								
1ª	29	7,7	37	9,8	36	9,5	102	27,1
2ª	30	8,0	36	9,5	31	8,2	97	25,7
3ª	33	8,8	32	8,5	32	8,5	97	25,7
4ª	30	8,0	22	5,8	29	7,7	81	21,5
Total	122	32,4	128	34,0	127	33,7	377	100,0

Do total de alunos, apenas 4,5% pertencia ao gênero masculino, sendo que as idades variavam entre 14 e 24 anos (média= 16,7, desvio padrão = 1,7).

Do total, apenas 21 alunos haviam cursado a oitava série em escola particular, confirmando, no caso dessa unidade, que o projeto Cefam estava atendendo especialmente aos alunos egressos da rede pública.

Os alunos foram solicitados a emitir opinião sobre como percebiam o ensino de geometria e conforme pode ser verificado na Tabela 2, o ensino de geometria até a oitava série foi considerado ruim por 40,3% dos alunos. No Cefam, 37,7% dos alunos afirmaram que não tinham, até o momento, estudado geometria.

Tabela 2. Distribuição dos alunos quanto à opinião em relação ao ensino de geometria

Opinião	Na oitava		No Cefam	
	Nºde sujeitos	%	Nºde sujeitos	%
Excelente	0	0,0	12	3,2
Bom	43	11,4	100	26,5
Regular	106	28,1	71	18,8
Ruim	152	40,3	28	7,4
Nunca lhe ensinaram geometria	67	17,8	142	37,7
Não respondeu	9	2,4	24	6,4
Total	377	100	377	100

Foi verificado que existem diferenças de avaliação em relação às séries. Agrupando-se na mesma categoria as opiniões excelente e bom, verificou-se que os alunos da 4ª série, seguidos dos de 2ª série, são os que avaliam para melhor o ensino de geometria, enquanto que os de 1ª série alegam nunca tê-la estudado no Cefam. [$\chi^2(9, N = 353) = 265,85692$; $p = 0,0000$].

Tabela 3. Distribuição dos alunos por série segundo opinião em relação ao ensino de geometria no Cefam.

Opinião	1 ^a		2 ^a		3 ^a		4 ^a	
	Nºde alunos	%	Nºde alunos	%	Nºde alunos	%	Nºde alunos	%
Excelente	0	0	8	8,2	0	0,0	4	4,9
Bom	0	0	41	42,3	6	6,2	53	65,4
Regular	1	1,0	16	16,5	39	40,2	15	18,5
Ruim	1	1,0	13	13,4	10	10,3	4	4,9
Nunca ensinaram	85	83,3	16	16,5	41	42,3	0	0,0
Não respondeu	15	14,7	3	3,1	1	1,0	5	6,3
Total	102	100,0	97	100,0	97	100,0	81	100,0

Quando perguntados a respeito das definições de geometria, foi verificado que 42,7% dos alunos associaram a geometria ao estudo das formas e figuras; 18,8% deles afirmaram que é o estudo das formas e medidas e 9% que é o estudo das medidas. Alguns citaram que é o estudo das áreas (2%) e dois alunos disseram que é o estudo do ponto, reta e plano. Embora 20% dos alunos não tenham respondido, pode ser constatado que os alunos tiveram idéia de alguns objetos de estudo da geometria, entre eles as formas e as medidas das figuras. O instrumento usado no presente trabalho apresentava vários desenhos de figuras, e talvez isso tenha influenciado nas respostas.

Embora nada se possa afirmar que isto se deva ao ensino que tiveram, os alunos afirmaram que o estudo da geometria é importante, pois 66,8% deles responderam afirmativamente a questão ; 9,3% atribuíram uma importância relativa a mesma, isto é, seu estudo seria importante apenas para exercer algumas profissões; 2,7% não consideraram importante e 21,2% não responderam à questão. No geral, pode-se afirmar que os alunos consideraram ser importante o estudo da geometria.

Verificou-se que essa opinião diferiu em relação à série, conforme mostra a tabela a seguir.

Tabela 4. Distribuição dos alunos quanto à opinião em relação à importância de estudar geometria.

Opinião	1 ^a		2 ^a		3 ^a		4 ^a		Geral	
	Nºde alunos	%	Nºde alunos	%	Nºde alunos	%	Nºde alunos	%	Nºde alunos	%
É importante	48	47,0	65	67,0	64	66,0	75	92,6	252	66,8
Importância relativa	11	10,8	11	11,3	9	9,3	4	4,9	35	9,3
Não é importante	2	2,0	5	5,2	2	2,1	1	1,2	10	2,7
Não respondeu	41	40,2	16	16,5	22	22,7	1	1,2	80	21,2
Total	102	100,0	97	100,0	97	100,0	81	100,0	377	100,0

Agrupando-se na mesma categoria as opiniões que não consideram importante o estudo da geometria e as que atribuíram importância relativa, verificou-se que os alunos das primeiras séries tenderam a não emitir suas opiniões nessa questão, enquanto os alunos das quartas séries atribuíram maior importância à geometria que os alunos das outras séries. [$\chi^2(6, N = 377) = 51,71933$; $p = 0,0000$].

Foi indagado o motivo pelo qual os alunos atribuiriam importância à geometria e os resultados foram categorizados conforme mostra a tabela seguinte. Por aspectos utilitários entende-se a utilização da geometria no cotidiano, como por exemplo no cálculo de medidas de áreas, perímetros, volumes, confecção de caixas, descrição de formas de objetos etc. A aplicação na escola deve ser entendida como utilização de conceitos geométricos na própria matemática (geometria analítica, funções, estudo de geometria espacial) assim como em outras disciplinas, por exemplo, a geografia e o uso escalas em mapas; a física e o estudo de vetores e planos inclinados, etc. Alguns alunos fizeram referência à importância de se estudar geometria mais profundamente para poder ensinar os conceitos básicos para as crianças das séries iniciais. Outros realçaram a importância da utilização da geometria em profissões como engenharia e arquitetura. Poucos alegaram que ela desenvolve o raciocínio e alguns justificaram que ela deveria ser estudada pois seria cobrada no vestibular. Entre os alunos que disseram que geometria não é importante, a maioria não justificou sua opinião.

Tabela 5. Distribuição dos alunos quanto aos motivos pelos quais julgam a importância da geometria

Opinião	Nº de alunos	%
Aspectos utilitários	127	33,7
Aplicações na escola	48	12,7
Aplicações quando professor	40	10,6
Uso em profissões	12	3,2
Desenvolvimento do raciocínio	4	1,1
Cobrança do vestibular	4	1,1
Outras	22	5,8
Não responderam	120	31,8
Total	377	100,0

Procurou-se saber se os alunos distinguiriam os objetos de estudo da geometria plana e da espacial. Apesar de variarem bastante, as respostas foram categorizadas conforme se pode verificar nas tabelas seguintes.

Tabela 6. Distribuição dos alunos quanto aos objetos de estudo da geometria plana.

Objetos de estudo da geometria plana	Nº de alunos	%
Figuras planas (ou de duas dimensões)	56	14,8
Áreas e perímetros	29	7,6
Planos	18	4,8
Exemplos de figuras (Quadrado, triângulo)	14	3,7
Retas	7	1,8
Medidas no plano, medidas planas	5	1,3
Outras	68	18,9
Não responderam	180	47,7
Total	377	100,0

Tabela 7. Distribuição dos alunos quanto aos objetos de estudo da geometria espacial.

Objetos de estudo da geometria espacial	Nº de alunos	%
O espaço, a ocupação do espaço	40	10,6
Formas tridimensionais	40	10,6
Volumes	9	2,4
Elementos com profundidade, espessura	4	1,1
Dá exemplos de figuras (cubos, pirâmides)	4	1,1
Outras	25	6,6
Não responderam	255	67,6
Total	377	100,0

Muitos alunos não responderam às questões e muitas opiniões foram agrupadas na categoria "outras", onde apareceram respostas consideradas confusas como: "coisas planas", "coisas sem dimensão", "sem relevo", "coisas como chão, carteira"; para os objetos de estudo da geometria plana, e "o espaço dentro da figura", "coisas com profundidade", "assuntos complexos", para os objetos da geometria espacial. Mais da metade dos alunos não conseguiu dar um exemplo do que se estuda em geometria espacial, o que pode ser consequência da falta do estudo dessa área no Ensino Fundamental e mesmo no Cefam.

A relação do aluno com a matemática e depois com a geometria foram outras questões investigadas. Foi perguntado ao aluno se ele gostava de matemática. A maioria deles alegou gostar, seguida de muitos alunos que disseram gostar mais ou menos dessa disciplina. Também puderam ser verificadas diferenças de opinião nas séries [$\chi^2(9, N = 377) = 19,96326$; $p = 0,01814$], sendo que os alunos das primeiras séries tenderam a não opinar. Se forem levados em consideração apenas os alunos que opinaram nessa questão, então não houve diferenças significativas entre as séries quanto ao gosto pela matemática [$\chi^2(6, N = 354) = 4,97566$; $p = 0,54694$]. A tabela a seguir mostra os resultados obtidos nessa questão.

Tabela 8. Distribuição dos alunos por série quanto ao gosto pela matemática

Opinião	1 ^a		2 ^a		3 ^a		4 ^a		Total	
	Nºde Alunos	%	Nºde Alunos	%	Nºde alunos	%	Nºde Alunos	%	Nºde Alunos	%
Gosto	42	41,4	42	43,3	53	54,6	38	46,9	175	46,4
Mais ou menos	38	37,7	38	39,2	28	28,9	31	38,3	135	35,8
Não gosto	8	7,8	13	13,4	12	12,4	11	13,6	44	11,7
Não respondeu	14	13,7	4	4,1	4	4,1	1	1,2	23	6,1
Total	102	100,0	97	100,0	97	100,0	81	100,0	377	100,0

Para saber a relação dos alunos com a geometria, que é uma parte específica da matemática e de interesse nessa pesquisa, procurou-se saber se os alunos gostavam ou não de geometria. A maioria preferiu demonstrar uma atitude aparentemente neutra em relação a geometria, conforme se verifica na tabela a seguir.

Tabela 9. Distribuição dos alunos quanto ao gosto pela geometria

Opinião	1 ^a		2 ^a		3 ^a		4 ^a		Total	
	Nºde Alunos	%	Nºde Alunos	%	Nºde Alunos	%	Nºde Alunos	%	Nºde Alunos	%
Gosto	9	8,9	13	13,4	7	7,2	21	25,9	50	13,3
Mais ou menos	46	45,1	47	48,5	49	50,5	40	49,4	182	48,3
Não gosto	23	22,5	35	36,1	21	21,7	18	22,2	97	25,7
Não respondeu	24	23,5	2	2,0	20	20,6	2	2,5	48	12,7
Total	102	100,0	97	100,0	97	100,0	81	100,0	377	100,0

Houve relação entre a série e o fato de gostar de geometria, sendo que os alunos das primeiras séries tenderam a não dar sua opinião e os das quartas séries pareceram

gostar mais de geometria do que os alunos de outras séries[$\chi^2(9, N = 377) = 45,83824$; $p = 0,0000$].

Foi indagado o motivo pelo qual os alunos gostariam ou não de matemática e geometria. As respostas foram incluídas nas seguintes categorias:

1.Características negativas da disciplina¹.

O aluno avaliou a disciplina, ou seja, os objetos de estudo da mesma, como sendo complicados, “chatos”, desinteressantes, cansativos.

2.Características negativas do aluno.

O aluno avaliou seu desempenho na disciplina, como tendo dificuldades, não conseguindo aprender, não sendo bom em cálculos.

3.Características do ensino.

O aluno fez uma avaliação do modo de ensinar a disciplina, destacou que teve “professores tradicionais” que “ensinavam de uma maneira mecânica”, “repetitiva”, “desinteressante.”

4.Características positivas da disciplina.

O aluno fez uma avaliação da disciplina, realçando seus aspectos positivos, como a “utilização em quase tudo na vida”, como sendo “fundamental”, “interessante”, “desafiadora”, “legal”.

5.Características positivas do aluno.

A avaliação que o aluno fez de si mesmo incluiu frases do tipo: “sou bom nisso”, “tenho facilidade”, “ adoro desafios”.

¹ No currículo do Cefam, a geometria não é uma disciplina, sendo que seu ensino faz parte do ensino da matemática. Mas, para efeito de apresentação dos resultados, algumas vezes se usará o termo disciplina para se referir à geometria.

6. Características positivas do ensino.

O aluno atribuiu o fato de gostar da disciplina aos bons professores que tiveram e realçaram a importância de uma boa metodologia.

7. Sem condições de justificar

No caso da geometria, alguns alunos alegaram não poder opinar por terem tido pouco contato com a geometria no ensino fundamental e no Cefam.

As tabelas a seguir mostram como os alunos responderam a essas questões.

Tabela 10. Distribuição dos alunos que afirmaram *não gostar* de geometria quanto aos motivos alegados.

Motivos	Nº de alunos	%
Características negativas da disciplina	27	27,8
Características negativas do aluno	22	22,7
Características negativas do ensino	20	20,6
Sem condições de justificar	18	18,6
Não respondeu	9	9,3
Outras	1	1,0
Total	97	100,0

Tabela 11. Distribuição dos alunos que afirmaram *gostar* de geometria quanto aos motivos alegados.

Motivos	Nº de alunos	%
Características positivas da disciplina	31	62,0
Características positivas do aluno	9	18,0
Características positivas do ensino	3	6,0
Não respondeu	7	14,0
Total	50	100,0

Tabela 12. Distribuição dos alunos que afirmaram *gostar mais ou menos* de geometria quanto aos motivos alegados.

Motivos	Nº de alunos	%
Sem condições de justificar	54	29,7
Características negativas do aluno	37	20,3
Características negativas do ensino	32	17,6
Características negativas da disciplina	21	11,5
Não respondeu	22	12,1
Outras	16	8,8
Total	182	100,0

Os alunos que tiveram uma opinião neutra quanto ao gosto pela geometria destacaram aspectos negativos, o que sugere que eles não gostem dessa área de conhecimento.

Tabela 13. Distribuição dos alunos que afirmaram *gostar* de matemática quanto aos motivos alegados.

Motivos	Nº de alunos	%
Características positivas da disciplina	102	59,6
Características positivas do aluno	41	24,0
Características positivas do ensino	8	4,7
Não respondeu	20	11,7
Total	171	100,0

Tabela 14. Distribuição dos alunos que afirmaram *não gostar de matemática* quanto aos motivos alegados.

Motivos	Nº de alunos	%
Características negativas do aluno	22	51,2
Características negativas do ensino	12	27,9
Características negativas da disciplina	8	18,6
Não respondeu	1	2,3
Total	43	100,0

Tabela 15. Distribuição dos alunos que afirmaram *gostar mais ou menos de matemática* quanto aos motivos alegados.

Motivos	Nº de alunos	%
Características negativas do aluno	52	37,7
Características negativas da disciplina	30	21,7
Características negativas do ensino	29	21,0
Características positivas da disciplina	8	6,0
Não respondeu	19	13,6
Total	138	100,0

Da mesma forma como aconteceu com geometria, os alunos que alegaram gostar mais ou menos da matemática realçaram aspectos negativos, o que sugere que eles não gostem dessa disciplina.

Reagrupando os dados de outra maneira, foram verificados os aspectos (positivos ou negativos) mais realçados em matemática e em geometria.

Tabela 16. Distribuição dos alunos quanto aos aspectos positivos e negativos em geometria e matemática

Aspectos		Geometria		Matemática	
		Nºde alunos	%	Nºde alunos	%
Positivos	Da disciplina	43	11,4	113	30,0
	Do aluno	11	2,9	42	11,1
	Do ensino	3	0,8	8	2,1
	Total parcial	57	15,1	163	43,2
Negativos	Da disciplina	45	11,9	42	11,1
	Do aluno	58	15,4	76	20,2
	Do ensino	51	13,5	41	10,9
	Total parcial	154	40,8	159	42,2
Não respondeu / outros		166	44,0	55	14,6
Total		377	100,0	377	100,0

Observando a tabela anterior, verificou-se que, quanto à geometria, os alunos tenderam a realçar seus aspectos negativos ou a não responder a pergunta. Quanto à matemática, a maioria dos alunos justificou suas opiniões e houve equivalência entre o número de alunos que apontaram os aspectos positivos e os que apontaram aspectos negativos da disciplina.

Verificou-se que existem diferenças de opiniões sobre geometria em relação às séries. Os alunos das primeiras séries tenderam a não responder às perguntas, enquanto que os das quartas séries foram os que mais opinaram, e apresentaram tanto os aspectos positivos como os negativos da geometria. [$\chi^2(6, N = 377) = 51,70571$; $p = 0,00000$].

Em relação aos aspectos da matemática, os alunos das primeiras séries foram os que menos responderam, e os das segundas séries os que mais apresentaram aspectos positivos dessa disciplina [$\chi^2(6, N = 377) = 20,80505$; $p = 0,00199$].

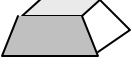
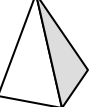
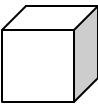
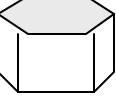
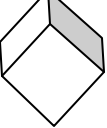
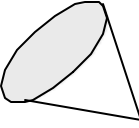
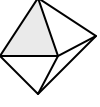
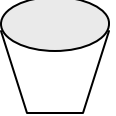
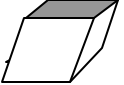
Foi solicitado aos alunos que citassem alguns assuntos aprendidos em geometria no Cefam. Muitos alunos (42%) não citaram nenhum assunto, 19% dos alunos citaram assuntos relacionados às séries finais do ensino fundamental, como Teorema de Pitágoras, Semelhança de triângulos, Teorema de Tales e Trigonometria. Áreas e perímetros e figuras geométricas foram assuntos citados por 20% dos alunos, mas não se pode dizer se esses assuntos foram ensinados utilizando-se conceitos que constam do programa do Ensino Fundamental ou do Médio. Oito alunos, 2% do total, citaram geometria analítica, assunto referente a Ensino Médio. Verificou-se, portanto, que todos os assuntos citados pertenciam ao estudo da geometria plana; os alunos não fizeram referência a nenhum conceito normalmente trabalhado em geometria espacial.

A maioria dos alunos (90%) admitiu não saber o que é geometria espacial e não estar preparada para ensinar conceitos às crianças das primeiras séries do ensino fundamental. Justificando essa resposta, 74% dos alunos afirmaram que sem conhecimento é impossível ensinar às crianças e 8% dos alunos disseram que além do conhecimento específico, era necessário saber uma metodologia para poder ensinar.

Desempenho no reconhecimento e nomeação de figuras – Questão N.º 1

Na Questão n.º 1, elaborada para se avaliar o Nível 1 da hierarquia de Van Hiele, foi solicitado aos alunos que identificassem as figuras com um nome correto e, se conhecessem outro nome para a mesma figura, que o escrevessem também. Praticamente todos os alunos que responderam à questão limitaram-se a escrever apenas um nome. As figuras com maior índice de acertos foram o cone (c) com 83,3% seguido do cilindro (a) com 70,6%, e do cubo (k) com 61%. As figuras com menor índice foram o tronco de cone (r) com 0% e o octaedro (q) com 0,5% de acertos. A tabela a seguir indica a porcentagem de acertos para cada figura.

Tabela 17. Número de alunos e porcentagem dos que nomearam corretamente as figuras (N=377)

Figura	Nº de alunos	%	Figura	Nº de alunos	%
a) 	266	70,6	b) 	42	11,1
c) 	314	83,3	d) 	11	2,9
e) 	23	6,1	f) 	0	0,0
g) 	37	9,8	h) 	15	4,0
i) 	196	52,0	j) 	150	39,8
k) 	229	60,7	l) 	10	2,7
m) 	7	1,9	n) 	130	34,5
o) 	12	3,2	p) 	161	42,7
q) 	3	0,8	r) 	0	0,0
s) 	116	30,8	t) 	21	5,6
u) Bola de ping-pong	153	40,6	v) sala de aula	8	2,1
w) moeda	11	2,9	x) geladeira	18	4,8

O total de figuras a serem nomeadas era de 24, tendo sido obtida uma média de acertos igual a 21,4% do total de questões; mínimo e máximo de acertos de 0 e 75% do total, respectivamente, e desvio padrão igual a 13,9%.

Aplicando-se o teste de Kruskal-Wallis observou-se que houve diferenças de desempenho nessa questão em relação à série [$\chi^2(3, N = 377) = 58,9512$; $p = 0,0000$], sendo a 1ª série a que apresentou o pior desempenho, o que pode ser verificado na tabela a seguir.

Tabela 18. Distribuição da porcentagem de acertos no reconhecimento de figuras por série.¹

Série	n	Porcentagem de acertos			
		Mínimo	Máximo	Média	Desvio Padrão
1ª	102	0	38	13	10
2ª	97	0	62	21	11
3ª	97	0	67	25	15
4ª	81	0	75	28	14
Geral	377	0	75	21	14

¹ A questão continha 24 figuras

Essa questão era formada por oito corpos redondos (esfera, cilindros, cones, e tronco de cone) e por dezesseis poliedros (prismas, pirâmides e outros). Com o objetivo de saber se os alunos reconheceriam melhor os corpos redondos do que os poliedros foi feita a porcentagem de acertos em cada categoria, verificando-se que os alunos nomeiam os corpos redondos melhor do que nomeiam os poliedros [$t(550,03) = -18,81$; $p = 0,000$] conforme é mostrado na tabela.

Tabela 19. Distribuição da porcentagem de acertos no reconhecimento de figuras, segundo o tipo de figura.(N=377)

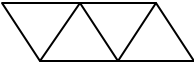
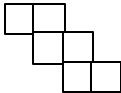
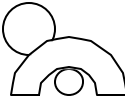
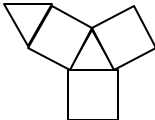
Tipo de Figura	Nº de figuras	Máximo de acertos	Mínimo de acertos	Média de acertos	Desvio padrão
Poliedros	16	69	0	12	12
Corpos redondos	8	88	0	39	24
No total de figuras	24	75	0	22	14

Desempenho na planificação de figuras- Questão N.º 2

Na Questão n.º 2 eram apresentadas duas situações: na primeira os alunos tinham que desenhar a planificação de uma figura e na segunda, desenhar a figura correspondente à planificação apresentada. Foi atribuído valor um (1,0) aos desenhos corretos e valor zero (0,0) a desenhos incorretos, incompletos ou em branco. O valor meio (0,5) foi atribuído aos desenhos, quando estes apresentavam irregularidades (linhas não-retas e/ou ausência de proporcionalidade e congruência) porém garantiam o número de faces e o número de arestas para cada face (no caso dos poliedros) e apresentavam retângulo/círculo e setor/círculo para o cilindro e cone, respectivamente. Também foi atribuído 0,5 para os desenhos em perspectiva que deixavam dúvidas quanto ao número de faces (no caso de poliedros) ou ausência de proporcionalidade (no caso do tronco de cone e do cilindro). A Tabela 20 mostra o desempenho dos alunos.

Nota-se, pela tabela, que os maiores índices de acertos foram, entre as figuras a serem planificadas, o paralelepípedo (a) e entre as figuras a serem desenhadas em perspectiva o tronco de cone (i). Observando-se a tabela dos resultados da Questão n.º 1, nota-se que tanto o paralelepípedo quanto o tronco de cone não foram nomeados corretamente pela maioria dos alunos, no entanto muitos alunos souberam analisar suas partes, já que acertaram sua planificação. Por outro lado, verifica-se que, embora o cone e o cilindro tenham sido nomeados corretamente pela maioria dos alunos, os mesmos não foram planificados corretamente.

Tabela 20 . Desempenho de alunos¹ na planificação de figuras

	Figura/planificação	Valor (*)	N.º de alunos	%
a)		0,0	170	45
		0,5	16	4
		1,0	191	51
b)		0,0	311	83
		0,5	9	2
		1,0	57	15
c)		0,0	285	76
		0,5	20	5
		1,0	72	19
d)		0,0	339	90
		0,5	10	3
		1,0	28	7
e)		0,0	292	78
		0,5	27	7
		1,0	58	15
f)		0,0	313	83
		0,5	0	0
		1,0	64	17
g)		0,0	274	73
		0,5	49	13
		1,0	54	14
h)		0,0	253	67
		0,5	4	1
		1,0	120	32
i)		0,0	225	60
		0,5	7	2
		1,0	145	38
j)		0,0	261	69
		0,5	12	3
		1,0	104	28

¹ N = 377 . (*) Valor 0,0: desenhos incorretos ou respostas em branco; 0,5: desenhos com irregularidades; 1,0: desenhos corretos.

Somando-se os pontos obtidos nessa questão, verificou-se o desempenho dos alunos, geral e por série, sendo que o teste de Krustall-Wallis indicou que existiram

diferenças em relação às séries [$\chi^2(3, N=377)=38,6913$; $p =0,0000$], com a 1ª apresentando o pior desempenho.

Tabela 21. Distribuição da porcentagem de acertos na planificação de figuras por série.¹

Série	n	Porcentagem de acertos			
		Mínimo	Máximo	Média	Desvio Padrão
1ª	102	0	100	22	29
2ª	97	0	100	48	37
3ª	97	0	100	40	38
4ª	81	0	100	53	36
Geral	377	0	100	40	37

¹ A questão continha 10 figuras

Desempenho na descrição de características e propriedades das figuras- Questões N° 3, 4, 5, 6, 7 e 8.

As Questões N.º 3, N.º 4, N.º 5, n.º 6, N.º 7 e n.º 8 solicitavam que os alunos citassem duas características ou propriedades das figuras. Foram consideradas como características as descrições onde apareceram termos não geométricos. Por exemplo, quando o aluno citou “é comprido”, “parece pedras de ruas”, “lembra as pirâmides do Egito”, tais expressões foram entendidas como características e não foram computadas para o desempenho (a análise qualitativa dessas respostas será feita mais adiante). Como propriedades foram consideradas as afirmações onde apareceram terminologia geométrica coerente com os conceitos avaliados, por exemplo: “ tem seis faces”, “as faces são retangulares” etc. A tabela a seguir mostra como os alunos descreveram cada uma das figuras, isto é, se apenas citaram características ou se foram capazes de citar pelo menos uma propriedade.

Tabela 22. Distribuição dos alunos de acordo com o tipo de descrição dada para cada uma das figuras

Questão Nº	Figura	Tipo de descrição					
		Não responderam		Citaram apenas características		Citaram propriedades	
		N.º de alunos	%	N.º de alunos	%	N.º de alunos	%
3	Prisma	310	82	53	14	14	4
4	Paralelepípedo	290	77	50	13	37	10
5	Cubo	258	69	84	22	35	9
6	Pirâmide	283	75	79	21	15	4
7	Cone	294	78	60	16	23	6
8	Cilindro	302	80	45	12	30	8

Para avaliar o desempenho de cada aluno na questão, tomou-se o seguinte critério: para cada figura foi atribuído valor 0,0 (zero) para ausência de propriedade e o valor 1,0 (um) para a descrição de pelo menos uma propriedade. No total, se o aluno citasse uma propriedade para cada figura, teria citado seis propriedades e foi esse o total considerado para se calcular a porcentagem de acertos no grupo de questões de N.º 3 a N.º 8, chamado de Propriedades das figuras. A tabela a seguir mostra o desempenho dos alunos em Propriedades das figuras. O teste de Krustall-Wallis indica que houve diferenças no desempenho de acordo com a série, sendo que os alunos das quartas séries tiveram o melhor desempenho. [$\chi^2(3, N=377) = 17,9573$; $p = 0,0000$].

Tabela 23. Distribuição da porcentagem de acertos nas Propriedades¹ das figuras

Série	n	Porcentagem de acertos			
		Mínimo	Máximo	Média	Desvio Padrão
1^a	102	0	67	4	11
2^a	97	0	100	4	14
3^a	97	0	83	9	21
4^a	81	0	75	17	24
Geral	377	0	100	8	19

¹ As propriedades referem-se às Questões N.º 3,4,5,6,7 e 8.

Desempenho na identificação de figuras através de propriedades – Questão N.º 9 e Questão N.º 10.

A Questão N.º 9 era formada por oito frases que poderiam ser completadas por nomes de figuras que possuísem as propriedades citadas. Os nomes completados serão analisados mais adiante, em outro capítulo, mas o desempenho dos alunos nas frases da questão é mostrado na tabela a seguir.

Tabela 24. Distribuição dos alunos de acordo com o desempenho nas frases da questão N.º 9 -Completar frases.

Frases	Nº de alunos	
	acertaram	
a) Sólidos geométricos cujas faces são polígonos recebem o nome de.....	8	2,1
b) Tem seis faces, todas paralelogramos. Seu nome é.....	27	7,2
c) Uma de suas faces (chamada base) é um polígono qualquer. Todos os seus vértices pertencem ao plano da base, exceto um. Seu nome é.....	16	4,2
d) É formado por seis quadrados. Seu nome	134	35,5
e) Para construí-lo, usando cartolina, são necessárias duas bases circulares e a superfície lateral é obtida por meio de um retângulo. Seu nome é.....	120	31,8
f) Para construí-lo, usando cartolina, é necessária uma base circular e a superfície lateral é obtida por meio de um setor circular. Seu nome é.....	92	24,5
g) Ele é um poliedro que tem as duas faces paralelas e congruentes e todas as outras faces laterais são paralelogramos. Seu nome é.....	4	1,1
h) É poliedro regular de seis faces. Seu nome é.....	16	4,2

Ainda com relação à questão N.º 9, que era formada por oito frases, a frase que apresentou maior número de acertos foi a que se referiu ao cubo formado por seis quadrados. Foi possível avaliar também o desempenho geral dos alunos nessa questão, calculando-se a porcentagem de questões corretas. O máximo de acertos foi de 88%, no entanto a média de acertos ficou em 14% com desvio padrão igual a 19%. O teste de Krustall-Wallis indica que o desempenho foi diferenciado nas séries, sendo que a quarta série apresentou o melhor desempenho. [$\chi^2(3, N = 377) = 47,84007$ $p = 0,0000$].

A questão n.º 10 era formada por quatro perguntas, onde era solicitado aos alunos que imaginassem posições e cortes em objetos, no intuito de avaliar o conhecimento de algumas propriedades dos sólidos geométricos. A tabela a seguir mostra o número de alunos que acertaram as respostas, observando que foi considerada certa a resposta que não contraria a afirmação, mesmo que ela fosse incompleta. Assim, as perguntas b) e c) tinham mais de uma resposta correta, mas ao assinalar uma figura correta, a resposta já foi considerada correta.

Tabela 25 . Distribuição dos alunos de acordo com o desempenho na Questão n.º 10.

Perguntas	N.º de alunos acertaram	%
a)Qual(ou quais)dessas, ao ser colocada sobre a mesa, em qualquer posição, sempre tocaria a mesa em um ponto?	58	15
b)Qual (ou quais) dessas, ao ser seccionada (cortada) por um plano, em alguma posição, poderia deixar a secção na forma de um quadrado?	150	40
c) Qual (ou quais) dessas, ao ser seccionada por um plano, em alguma posição, poderia deixar a secção na forma de um círculo?	199	53
d) Qual (ou quais) dessas, ao ser seccionada por um plano, em qualquer posição, sempre deixaria a secção na forma de um círculo?	90	24

Verificou-se que 38% dos alunos não acertaram nenhuma resposta; 19%, 22%, 17% e 4% dos alunos acertaram uma, duas, três e quatro respostas respectivamente; a média de acertos para essas perguntas foi de 32% com desvio padrão 26%. O teste de Krustall-Wallis indicou que os desempenhos na terceira e na quarta séries foram melhores do que os da segunda e primeira série. [$\chi^2(3, N = 377) = 34,7366; p = 0,0000$]

Desempenho nas relações entre propriedades das figuras – Questões N.º 11 a 17

As questões N.º 11 a N.º 17 tiveram um baixo número de acertos e foram agrupadas conforme a tabela a seguir. A Questão N.º 12 e a Questão N.º 15 só foram consideradas certas quando o aluno justificou por escrito ou com um desenho, mostrando entendimento do que era solicitado. A Questão N.º 16, que se referia a inclusão de classes, era formada por dez itens e só foi considerada correta quando pelo menos oito desses itens foram respondidos corretamente.

Tabela 26 . Distribuição dos alunos de acordo com o desempenho em Relações entre Propriedades.

Questão	Nºde alunos		Questão	Nºde alunos	
	acertaram	%		acertaram	%
N.º 11	55	14,6	N.º 12 f)	5	1,3
N.º 12 a)	11	2,9	N.º 12 g)	2	0,5
N.º 12 b)	4	1,1	N.º 13	2	0,5
N.º 12 c)	0	0,0	N.º 14	7	1,9
N.º 12 d)	0	0,0	N.º 15	2	0,5
N.º 12 e)	4	1,1	N.º 16	2	0,5

A Questão N.º 17 a) pedia que os alunos relacionassem área total e volume a fim de concluírem qual embalagem seria melhor. Apenas 12 alunos (3%) calcularam o volume, mas apenas um aluno relacionou com a área e concluiu corretamente que a embalagem A era a melhor. Nenhum aluno acertou a Questão N.º 17 b) que pedia para dar as medidas de um paralelepípedo ideal.

Desempenho geral

Para avaliar o desempenho geral dos alunos, as questões da Prova de Conhecimentos foram agrupadas de acordo com quatro critérios. O primeiro critério foi relativo ao reconhecimento e nomeação de figuras; o segundo à planificação de figuras; o terceiro à descrição de propriedades e identificação de figuras através das propriedades. O último critério foi relativo às relações entre propriedades das figuras. A tabela a seguir mostra como as questões foram agrupadas.

Tabela 27. Distribuição das questões de acordo com o critério estabelecido para a determinação do desempenho.

Critério	Questões
Reconhecimento e nomeação de figuras	N.º 1
Planificação de figuras	N.º 2
Descrição de propriedades e identificação a partir de propriedades	N.º 3,4,5,6,7,8,9 e 10
Relações entre propriedades	N.º 11,12,13,14,15,16,17

Calculou-se a percentagem de acertos em cada critério e, em seguida a média das percentagens. Ao resultado final, multiplicado por 100, foi dado o nome de Desempenho. Constatou-se que o Desempenho variou entre 0 e 85, sendo a média 20 e desvio padrão 15.

Pode-se afirmar que existiram diferenças com relação ao Desempenho entre as séries, o que pode ser verificado na tabela a seguir.

Tabela 28. Distribuição dos alunos por série quanto ao Desempenho ¹.

Série	n	Mínimo	Máximo	Média	Desvio Padrão
1^a	102	0	40	11	10
2^a	97	0	45	21	13
3^a	97	0	58	22	16
4^a	81	0	85	28	15
Geral	377	0	85	20	15

¹ As notas variam de 0 a 100.

A figura¹ a seguir e o teste de Krustall-Wallis indicam diferença de desempenho nas séries, sendo que o melhor desempenho foi o da 4ª série. [$\chi^2(3, N = 377) = 64,4459$; $p = 0,0000$].

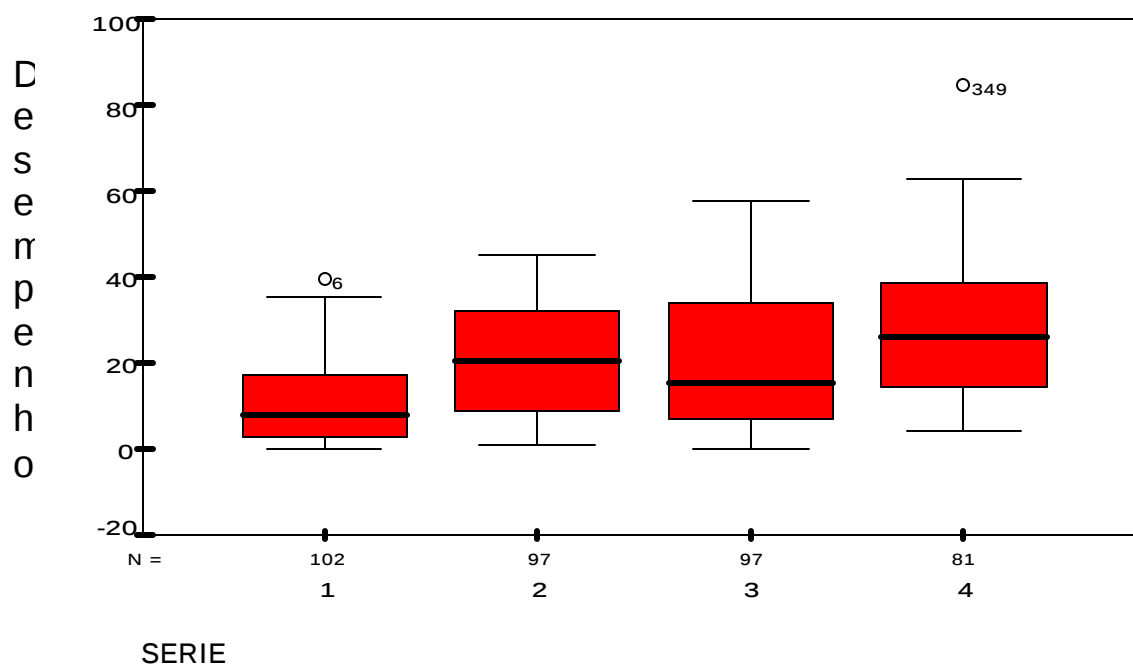


Figura 7. Distribuição dos alunos quanto à série e ao Desempenho.

¹ A figura é chamada Boxplot e resume os dados agrupados da amostra baseado na mediana, quartis e valores extremos. É formado por uma “caixa” limitada pelos percentis 25 e 75 e um traço interno que simboliza a mediana. A caixa contém 50% dos dados e possui dois “wiskers”, linhas que limitam o mais alto e o mais baixo valor, excluindo o “outlier” que é um valor maior que 1,5 vezes o comprimento da caixa, simbolizado por uma circunferência. (Norusis, 1993, p. 186).

Foi possível verificar também o desempenho dos alunos em relação a cada turma, o que é mostrado na tabela seguinte. Verificou-se que o desempenho melhor foi o da 4ª A [$\chi^2(11, N = 377) = 122,3083$; $p = 0,0000$].

Tabela 29. Distribuição dos alunos por série e turma quanto ao Desempenho¹.

Série /turma	n	Desempenho			
		Mínimo	Máximo	Média	Desvio padrão
1ªA	29	0	40	14	12
1ªB	37	0	36	15	9
1ªC	36	0	25	5	7
2ªA	30	0	45	17	14
2ªB	36	6	44	25	11
2ªC	31	2	43	20	12
3ªA	33	1	58	32	15
3ªB	32	0	48	13	12
3ªC	32	0	55	19	14
4ªA	30	4	63	35	16
4ªB	22	10	42	24	10
4ªC	29	6	85	23	16
Geral	377	0	85	20	15

¹ As notas variam de 0 a 100.

Através do teste de Krustall-Wallis, verificaram-se, para esses alunos, relações entre o Desempenho e algumas variáveis. Foram verificadas diferenças de Desempenho em relação à procedência do aluno, isto é, alunos que fizeram a oitava série em escola particular tiveram um Desempenho melhor do que os que vieram de

escola pública, conforme pode ser verificado na tabela a seguir. [$\chi^2(1, N = 377) = 11,1580$; $p = 0,0008$].

Tabela 30. Distribuição das médias do Desempenho quanto à procedência.

Procedência	n	Desempenho			
		Mínimo	Máximo	Média	Desvio padrão
Escola pública	356	0,0	63	19	14
Escola particular	21	1,0	85	32	20

O Desempenho teve relação com a avaliação que os alunos do Cefam fizeram do ensino de geometria, pois os que consideraram o ensino de geometria na oitava série como bom ou excelente tiveram um Desempenho melhor do que os que tiveram outra opinião sobre esse ensino [$\chi^2(3, N = 368) = 17,5208$; $p = 0,0006$]. Os alunos que afirmaram não ter aprendido geometria no Cefam tiveram um Desempenho pior do que os que tiveram outra opinião sobre esse ensino. [$\chi^2(3, N = 353) = 44,4305$; $p = 0,0000$].

Tabela 31. Distribuição das médias do Desempenho quanto à avaliação do ensino de geometria

Avaliação	Na oitava série		No Cefam	
	n	Média	n	Média
Nunca ensinaram	67	15	142	14
Ruim	152	20	28	21
Regular	106	20	71	25
Bom/ excelente	43	29	112	25

O fato de gostar de geometria e de matemática teve influências no Desempenho, pois os alunos que afirmaram gostar de geometria tiveram um Desempenho melhor do que os que tiveram outra opinião [$\chi^2(3, N = 377) = 53,7788$; $p = 0,0008$]. Da mesma forma, houve diferenças no Desempenho quanto ao fato de gostar de matemática, pois os alunos que afirmaram gostar dessa disciplina tiveram um Desempenho melhor do que os que tiveram outra opinião. [$\chi^2(3, N = 377) = 24,4581$; $p = 0,0000$]. A tabela a seguir ilustra os resultados obtidos quanto ao fato de gostar de matemática e de geometria.

Tabela 32. Distribuição das médias do Desempenho quanto ao gosto por matemática e geometria.

Opinião	Matemática		Geometria	
	n	Média	n	Média
Não responderam	23	12	48	12
Não gosto	44	18	97	16
Gosto mais ou menos	135	18	182	21
Gosto	175	23	50	30

2ª PARTE: RESULTADOS QUANTO À COMPARAÇÃO ENTRE OS CONCEITOS

O reconhecimento de figuras

Algumas figuras foram apresentadas com certas modificações. Procurou-se investigar se os alunos reconheceriam o conceito apesar das modificações. A primeira figura escolhida para essa análise foi o cilindro, pois havia quatro variações na Questão N° 1 da Prova de Conhecimentos, conforme se verifica na tabela a seguir.

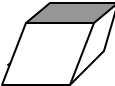
Tabela 33. Distribuição dos alunos de acordo com os acertos na nomeação dos cilindros

Figura/objeto				Moeda
Nºde alunos que nomearam corretamente(%)	266 (71%)	150 (40%)	116 (31%)	11 (3%)

Parece, de acordo com a porcentagem de acertos, que a primeira figura coincidiu com a representação que os alunos tinham de cilindro. A segunda figura possui, aproximadamente, a mesma razão entre as medidas do raio e da altura existente na primeira, porém é um cilindro oblíquo. Na terceira figura, o raio é diminuído em relação a altura, e a figura não aparece apoiada na sua base. Essas transformações fizeram diminuir muito o número de acertos. A forma da moeda seria a de um cilindro onde a altura é muito menor que o raio da base e tal característica sugere uma figura que só foi reconhecida como cilindro por apenas 11 alunos.

Outro conceito investigado foi o de paralelepípedo. A Questão N.º 1 continha, além dos dois cubos, outras seis figuras que poderiam ter sido nomeadas como paralelepípedos. A tabela a seguir mostra os resultados na nomeação dessas figuras.

Tabela 34. Distribuição dos alunos de acordo com o reconhecimento de paralelepípedos

Figura/objeto					Sala de aula	Geladeira
N.º de alunos que nomearam corretamente(%)	35 (9%)	22 (6%)	9 (2%)	32 (8%)	8 (2%)	18 (5%)

Verificou-se, pelo baixo índice de acertos, que poucos alunos demonstraram conceituar paralelepípedo, mesmo no nível do reconhecimento. A figura que lembra uma embalagem de CD e a sala de aula tiveram o menor número de acertos. Talvez, assim como aconteceu com a moeda, a acentuada diminuição de uma das dimensões² em relação as outras duas tenha descaracterizado, para os alunos, o paralelepípedo no primeiro caso. No segundo caso, pareceu ser difícil reconhecer um paralelepípedo em uma sala de aula, talvez porque o sujeito, dentro dela, não conseguisse perceber as faces organizadas, uma vez que não conseguia visualizar a figura como um todo.

Com o objetivo de investigar a nomeação dos vários prismas da Prova, organizaram-se os resultados na tabela a seguir, lembrando que todos os paralelepípedos poderiam também ter sido nomeados como prismas, o que não foi verificado nas respostas dos alunos.

Tabela 35. Distribuição dos alunos de acordo com o reconhecimento de prismas

Figura/objeto					
Nº de alunos que nomearam corretamente	11(3%)	23(6%)	12(3%)	9(2%)	3(1%)

Verificou-se que os alunos não reconheceram prismas nas figuras apresentadas. O maior índice de acertos foi referente ao prisma de base triangular talvez porque o objeto usado nas aulas de Ciências para explicar o fenômeno da decomposição da luz

² As dimensões do paralelepípedo podem ser comprimento, largura e altura.

seja um prisma desse tipo, embora não seja semelhante à figura apresentada, conforme pode ser verificado na figura a seguir.



Figura 8. Prisma normalmente utilizado para explicar o fenômeno de decomposição da luz.

Uma comparação entre conceitos

Os dados que se seguem permitiram verificar se o desempenho dos alunos apresentou diferenças quanto à figura analisada e quanto ao tipo de análise feita.

Para isso, consideraram-se as figuras cubo, pirâmide, paralelepípedo, prisma, cone e cilindro. As questões foram escolhidas de acordo com quatro critérios: 1-reconhecimento e nomeação; 2-planificação; 3-descrição de propriedades; 4-reconhecimento e nomeação através de propriedades. Para o reconhecimento e nomeação foram escolhidas, para cálculo do número de acertos, aquelas figuras convencionais, isto é, na forma que normalmente aparecem nos livros didáticos. No caso da planificação, não havia questão solicitando que se planificasse o cubo, mas sim que se reconhecesse uma planificação e essa questão foi escolhida para esse item. A tabela a seguir mostra quais foram as questões escolhidas, da Prova de Conhecimentos, para se realizar essa comparação entre conceitos.

Tabela 36. Distribuição das questões quanto aos critérios formados para comparar conceitos

Critério	Questões escolhidas da Prova de Conhecimentos					
	Cubo	Pirâmide	Paralele	Prisma	Cone	Cilindro
1: Reconhecimento e nomeação	1. k)	1. i)	1. b)	1. e)	1. c)	1. a)
2: Planificação	2. h)	2. e)	2. a)	2. b)	2. d)	2. c)
3: Descrição de propriedades	5.	6.	4.	3.	7.	8.
4: Reconhecimento e nomeação após propriedades	9. d)	9. c)	9. b)	9. g)	9. f)	9. e)

Dessa forma, as porcentagens de alunos que responderam corretamente permitiram verificar que o cone foi reconhecido e nomeado por mais alunos do que o foram as outras figuras e, no entanto, foi a figura que ofereceu maior dificuldade na planificação. O caso contrário aconteceu com o paralelepípedo: foi a figura que menos recebeu nomeação correta e, todavia, foi planificada por mais alunos. Em relação a todas as figuras propostas aos alunos, foi verificado que descrever as propriedades pareceu ser a tarefa mais difícil. Após ter sido apresentada a descrição de uma propriedade da figura, então pareceu ser mais fácil reconhecer e nomear o cubo e o cilindro do que as outras.

Concluiu-se que existiram diferenças quanto à nomeação das figuras, quanto à planificação, quanto à descrição de propriedades e quanto ao reconhecimento através de propriedades, em relação aos conceitos investigados de cubo, pirâmide, paralelepípedo, prisma, cone e cilindro. Essas diferenças foram relacionadas aos diferentes conceitos, implicando que alguns conceitos estavam melhor formados do que outros. Foram relacionadas também ao tipo de análise que os alunos fizeram, sugerindo que, dependendo da habilidade solicitada, os alunos tiveram resultados diferentes, mesmo quando se tratava da mesma figura.

As figuras a seguir ilustram os resultados.

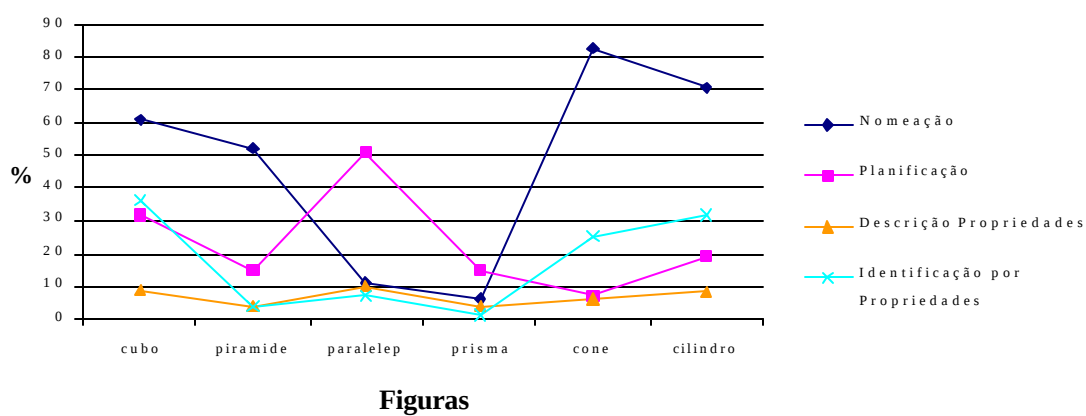


Figura 9. Porcentagem de acerto por figura quanto a critérios.

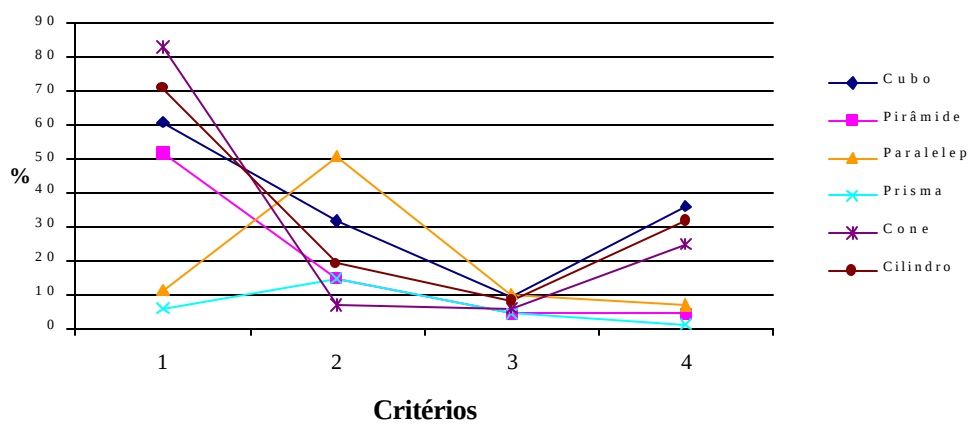


Figura 10. Porcentagem de acerto por critério quanto a figuras.

3º PARTE: DESCRIÇÃO DAS HABILIDADES VERBAL E VISUAL/GRÁFICA

HABILIDADE VERBAL

Para fazer um estudo da habilidade verbal, em relação à geometria espacial, dos alunos do Cefam que foram sujeitos desse trabalho, procurou-se analisar as respostas dadas às questões N.º 1, N.º 3, N.º 4, N.º 5, N.º 6, N.º 7, N.º 8 e N.º 9 da Prova de Conhecimentos. Para esse trabalho, o termo habilidade verbal é entendido como as diferentes maneiras de utilizar a linguagem para nomear e descrever formas geométricas, sendo verificada através das palavras escritas nas respostas ao questionário.

Para verificar como os alunos utilizavam a linguagem para nomear as formas, foi feito um levantamento dos termos mais utilizados na Questão N.º 1, conforme se verifica na tabela a seguir.

Tabela 37. Distribuição dos alunos de acordo com os nomes atribuídos a cada figura (N=377)

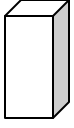
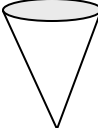
Figura	Nomes	Nº alunos	%	Figura	Nomes	Nº alunos	%
a) 	Cilindro (*)	266	70	b) 	Retângulo	207	55
	Cubo	36	10		Paralelepípedo (*)	35	9
	Outros	6	2		Cubo	22	6
	Não respondeu	69	18		Quadrado	11	3
					Outros	8	2
					Não respondeu	94	25
c) 	Cone (*)	314	83	d) 	Hexágono	73	19
	Cilindro	4	1		Estrela	35	9
	Cubo	3	1		Prisma (*)	11	3
	Outros	5	1		Outros	7	2
	Não respondeu	51	14		Não respondeu	251	67
e) 	Triângulo	244	65	f) 	Trapézio	185	50
	Prisma (*)	23	6		Paralelepípedo	6	2
	Pirâmide	21	5		Outros	20	5
	Não respondeu	89	23		Não respondeu	166	44

Tabela 37. Distribuição dos alunos de acordo com os nomes atribuídos a cada figura (N=377) (continuação)

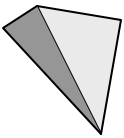
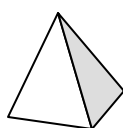
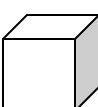
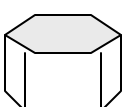
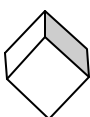
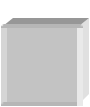
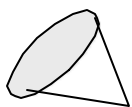
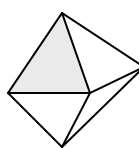
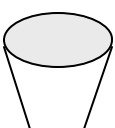
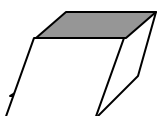
Figura	Nomes	Nº alunos	%	Figura	Nomes	Nº alunos	%
g) 	Paralelogramo	122	32	h) 	Triângulo	41	11
	Paralelepípedo(*)	22	6		Prisma	19	5
	Losango	22	6		Pirâmide(*)	12	3
	Prisma	12	3		Losango	5	11
	Outros	31	8		Outros	16	4
	Não respondeu	168	45		Não respondeu	284	76
i) 	Pirâmide(*)	196	52	j) 	Cilindro(*)	150	40
	Triângulo	58	15		Cubo	14	4
	Prisma	19	5		Outros	4	1
	Outros	7	2		Não respondeu	209	55
	Não respondeu	97	26				
j) 	Cubo (*)	230	61	l) 	Hexágono	94	25
	Quadrado	85	23		Prisma(*)	9	2
	Não respondeu	63	16		Outros	34	9
					Não respondeu	240	64
m) 	Retângulo	17	4	n) 	Cubo	129	34
	Hexágono	6	2		Quadrado	28	8
	Prisma(*)	3	1		Losango	16	4
	Outros	23	6		Outros	17	4
	Não respondeu	328	87		Não respondeu	187	50
o) 	Quadrado	144	39	p) 	Cone(*)	160	43
	Cubo	13	3		Cilindro	7	2
	Quadrilátero	6	2		Círculo	7	2
	Paralelepípedo(*)	9	2		Outros	13	3
	Outros	12	3		Não respondeu	190	50
	Não respondeu	193	51				
q) 	Losango	43	12	s) 	Cilindro	40	10
	Pirâmide	16	4		Cone	21	6
	Quadrilátero	16	4		Círculo	7	2
	Octaedro(*)	2	1		Outros	16	4
	Outros	52	13		Não respondeu	293	78
	Não respondeu	248	66				
s) 	Cilindro (*)	119	32	t) 	Cubo	33	9
	Cubo	5	2		Paralelepípedo(*)	32	9
	Outros	40	10		Losango	19	5
	Não respondeu	213	56		Quadrado	14	4
					Outros	36	10
					Não respondeu	243	63

Tabela 37. Distribuição dos alunos de acordo com os nomes atribuídos a cada figura (N=377) (continuação)

Figura	Nomes	Nº alunos	%	Figura	Nomes	Nº alunos	%
u) bola de ping-pong	Esfera(*)	152	40	v) sala de aula	Quadrado	147	39
	Círculo	71	19		Retângulo	59	16
	Redonda	25	7		Cubo	32	8
	Circunferência	18	5		Paralelepípedo(*)	6	2
	Outros	11	3		Outros	10	3
	Não respondeu	100	26		Não respondeu	123	32
w) moeda	Círculo	169	45	x) geladeira	Retângulo	204	54
	Redonda	21	6		Paralelepípedo(*)	18	5
	Circunferência	32	9		Cubo	14	4
	Esfera	13	3		Quadrado	10	3
	Cilindro(*)	12	3		Outros	5	1
	Outros	9	2		Não respondeu	126	34
	Não respondeu	121	32				

(*) Refere-se ao nome correto.

Observou-se que as figuras (f) e (r) – que podem ser chamadas respectivamente de tronco de pirâmide e de cone – não foram nomeadas corretamente por nenhum aluno. Tais figuras não são estudadas no Ensino Fundamental, mas no Ensino Médio, após o estudo de semelhanças de figuras geométricas espaciais, e são obtidas por secções de pirâmide e de cones.

Em quase todas as figuras, foram utilizados nomes de figuras planas para identificar as figuras geométricas espaciais. A forma da caixinha de leite e a da geladeira foram nomeadas como retângulo por 55% e 54% dos alunos, respectivamente. A palavra retângulo pareceu ser, portanto, muito mais conhecida do que paralelepípedo, ou prisma, ou mesmo poliedro. No entanto, paralelepípedo é um nome comum que aparece nos livros didáticos, inclusive nos de 1ª a 4ª séries do Ensino Fundamental. Poliedro é um dos nomes corretos sugeridos pela Proposta da CENP (1991) logo nas primeiras atividades de classificação dos sólidos geométricos. A figura que lembra um CD de música recebeu a nomeação de quadrado por 39% dos alunos, assim como a moeda, que foi denominada círculo por 45% deles.

Foi possível verificar também que quase não apareceram nomes não geométricos nas respostas dos alunos, com exceção do prisma d) que foi chamado de estrela por 19% dos alunos.

Analisando as respostas a essa questão, foi possível distinguir as seguintes **categorias de linguagem para nomeação** das figuras:

1ª categoria: nome aleatório incorreto da figura espacial, não sendo possível verificar se o nome atribuído tinha alguma relação com a figura (por exemplo: o aluno atribuiu o nome cubo para a esfera).

2ª categoria : nome correto do polígono (geometria plana) que deve se referir a uma das faces visíveis do poliedro. Esse tipo de nomeação sugere que o aluno tinha o conceito da figura plana no nível de reconhecimento, mas não possuía o conceito da figura espacial (exemplo: retângulo para o paralelepípedo).

3ª categoria: nome incorreto de um polígono (geometria plana) que deve se referir a uma das faces visíveis do poliedro. Essa categoria sugere que o aluno não conceituava a figura plana e também não conceituava a espacial (exemplo: losango para o octaedro – no entanto, todas as faces do octaedro são triangulares).

4ª categoria : círculo ou circunferência para os corpos redondos (exemplo: círculo para a esfera)

5ª categoria: nome incorreto da figura espacial, demonstrando não-variação do conceito. Nessa categoria, o aluno manteve o nome da figura apesar de as modificações na figura fazerem com que esta receba outro nome (exemplo: cilindro para o tronco de cone).

6ª categoria: nome correto

O número de alunos que deixou de responder às questões parece indicar que, independentemente de reconhecer ou não as formas geométricas existentes nos objetos, os alunos não conseguiram nomeá-las. Mesmo as formas mais simples deixaram de ser respondidas, mostrando que os alunos sujeitos dessa pesquisa não dominam a habilidade verbal relativa às figuras investigadas.

A Tabela 38 mostra, para cada figura, qual o tipo de erro mais freqüente na nomeação de figuras. A tabela não mostra os acertos, uma vez que estes já apareceram na Tabela 37.

As questões N.º 3, N.º 4, N.º 5, N.º 6, N.º 7 e N.º 8 solicitavam aos alunos que escrevessem características ou propriedades das figuras. Entendem-se como propriedades os atributos referentes à geometria espacial; como características, os não geométricos ou os relacionados à geometria plana utilizados de maneira inadequada. As respostas variaram muito, contudo foi possível formar grupos com as características mais citadas, sendo esses grupos chamados de **categorias de linguagem para a descrição de figuras**, que serão descritas a seguir:

1ª categoria: termos não específicos e combinação de termos.

Nessa categoria, os alunos fizeram uma descrição do objeto físico que eles associaram ao nome do conceito. Alguns alunos usavam termos não específicos da geometria para descrever propriedades físicas, como massa (“é pesado”), material (“é duro”), utilidade (“serve para calçamento”), forma (“inicia fino e acaba grosso”). Foi observada, algumas vezes, uma mistura de termos não específicos da geometria com alguns termos específicos ligados à medida (“base maior que a largura”) ou à forma (“tem raio e é pontiagudo”).

2ª categoria: termos específicos utilizados de maneira incorreta ou incompleta

Nessa categoria, foram incluídos os alunos que utilizaram termos específicos da geometria, porém o fizeram de maneira incorreta (“são quadrados de seis lados”) ou incompleta (são retangulares”).

3ª categoria: termos específicos utilizados para particularizar

Nessa categoria, os termos geométricos corretos caracterizaram um exemplo particular para o conceito em questão. Por exemplo: “tem seis faces, sendo quatro retangulares e duas quadradas” foi a descrição correta para um tipo de paralelepípedo: o reto-retângulo de base quadrada.

4ª categoria: termos específicos corretos (ou propriedades)

Finalmente, nessa categoria, foram incluídos os alunos que utilizaram de forma correta os termos geométricos na descrição das propriedades das figuras.

Portanto, para se avaliar a habilidade verbal dos alunos, foram criados dois conjuntos de categorias: as **categorias de linguagem para nomear figuras** e as **categorias de linguagem para descrever figuras**.

Seguem-se as Tabelas 38, 39 e 40 sendo que, na primeira delas, são apresentadas as frequências quanto às categorias para nomear figuras, e nas seguintes, as frequências quanto às categorias para descrever figuras.

Tabela 38. Distribuição dos alunos de acordo com as categorias de linguagem para nomear figuras¹

Categoria Figura	1ª-Nome incorreto (geometria espacial)	2ª-Nome correto do polígono (face)	3ª-Nome incorreto do polígono (face)	4ª-Círculo ou circunferência para os corpos redondos	5ª - Nome incorreto demonstrando não-variação
	Cubo 36 (10%)				
		Retângulo 207 (55%)			
	Cilindro 7 (2%)				
	Cilindro 7 (2%)				
			Hexágono 73 (19%)		
		Triângulo 244 (65%)			
		Trapézio 185 (65%)			
		Paralelogramo 122 (32%)			
		Triângulo 41 (11%)			
		Triângulo 58 (15%)			
		Quadrado 85 (23%)			
		Hexágono 94 (25%)			
			Losango 43 (12%)		
		Retângulo 17 (4%)			
		Quadrado 28 (8%)			

¹Os números indicam a quantidade de alunos em cada categoria ;entre parênteses indicam a porcentagem.

Tabela 38. Distribuição dos alunos de acordo com as categorias de linguagem para nomear figuras¹
(continuação).

Categoria Figura	1ª-Nome incorreto (geometria espacial)	2ª-Nome correto do polígono (face)	3ª-Nome incorreto do polígono (face)	4ª-Círculo ou circunferência para os corpos redondos	5ª - Nome incorreto demonstrando não-variação
		Quadrado 144 (39%)			
					Cubo 14 (4%)
					Cilindro 40 (10%)
Bola de ping-pong				Círculo 71 (19%)	
Sala de aula		Retângulo 59(16%)			
Moeda				Círculo 169 (45%)	
Geladeira		Retângulo 204 (54%)			

¹Os números indicam a quantidade de alunos em cada categoria; os números entre parênteses indicam a porcentagem

Tabela 39. Distribuição dos termos quanto às categorias de linguagem para descrever cubo, pirâmide, paralelepípedo e prisma

	1ª.Termos não específicos e combinação de termos	2ª.Termos específicos utilizados de maneira incorreta ou incompleta	3ª.Termos específicos utilizados para particularizar	4ª.Termos específicos corretos (propriedades)
Cubo	Parece dado; seis partes; parece com quadrado; altura é igual a largura; serve para medir a quantidade de chuva;	Quadrado; quadrado tridimensional; seis lados do mesmo tamanho; quadriláteros; quatro lados iguais; seis lados iguais; arestas coincidem com vértices; não tem lados;		Tem oito vértices; tem seis faces; faces quadradas; poliedro; poliedro regular; tem ângulos de 90°;
Pirâmide	Tem pontas e quatro lados; ela tem dois lados frente e verso do mesmo tamanho e a parte de cima é diferente da de baixo; 3 ou 4 partes, o fundo pode ser quadrado ou retangular; monumento do Egito; símbolo do Egito; três pontas; parecem funil; é a metade de um quadrado	Triângulo; uma base e três alturas; dois lados triangulares; três lados; quatro lados pares; 5 lados com forma de triângulo; 3 lados tridimensionais; base diferente e alturas iguais; superfície lateral triangular; tem um ponto em comum chamado vértice;	Possui três triângulos e uma base triangular; cinco faces; uma base quadrangular e os outros triangulares; uma base de lados diferentes; soma dos ângulos é 90°;	Poliedro; uma face é um polígono qualquer e as outras são triângulos com um vértice em comum; têm ângulos;
Paralelepípedo	Pesados; serve para colocar nas ruas; nas construções; material rochoso; duros e retangulares; a altura é diferente da largura; pedra retangular; se cortar ao meio tem 3 cubos;	Paralelogramos; cubo retangular; forma de retângulo com 6 lados; oito lados; duas retas que se cruzam; quadriláteros; é retângulo;	Tem duas faces quadradas e quatro retangulares; arestas perpendiculares ou paralelas;	Tem doze arestas; seis faces; poliedro com faces paralelas duas a duas; formado por seis paralelogramos; hexaedro;
Prisma	Serve para decompor a luz; a parte de baixo maior; mudança de cores; tem seis pontas meio retangular; forma triangular e pode refletir	Forma de um quadrado na vertical; triângulo com seis lados; quatro lados; um cubo com seis lados virado ao contrário; 3 lados tridimensionais;.	três faces retangulares e duas triangulares; cinco faces	Poliedro; tem duas faces paralelas e congruentes; a base é um polígono qualquer;

Observando a categoria termos específicos utilizados para particularizar, pode-se supor que os alunos possuíam modelos idealizados para alguns conceitos. Para o prisma, por exemplo, o objeto imaginado seria aquele utilizado para o fenômeno de decomposição da luz; o conceito geométrico, nesse caso, seria o prisma regular de base triangular com a medida da altura maior do que a da aresta da base. Para o paralelepípedo, o modelo idealizado seria o objeto utilizado para calçamento das ruas; o conceito, nesse caso, refere-se ao paralelepípedo reto-retângulo. O cubo, como é um poliedro regular, não possibilita particularização de exemplos. No caso da pirâmide, parece que a forma idealizada foi a pirâmide reta de base quadrada e o objeto citado diz respeito aos monumentos egípcios. O termo *lado* foi utilizado como *face* ou como *aresta*, e isso comprometeu a exatidão da linguagem específica para a geometria espacial.

O quadro a seguir mostra os termos utilizados para cilindro e cone.

Tabela 40. Distribuição dos termos quanto às categorias de linguagem para descrever cone e cilindro

	Termos não específicos e combinação de termos	Termos específicos utilizados de maneira incorreta ou incompleta	Termos específicos corretos (propriedades)
Cone	Inicia fino e acaba grosso; redondo; arredondada e comprida; é como se fossem triângulos, sem lados; possui uma esfera na parte superior que se afunila na inferior; aba de baixo maior que a de cima; redondo e paralelo; pontiagudo e embaixo circular; comprido; tem raio e diâmetro pontiagudo; afunilado; são roliços; boca arredondada e ponta fina;	Retângulo; circular; tem um círculo e um triângulo nele; circunferência seguida de duas paralelas que se encontram; retangular e circular; corpo triangular; superfície lateral circular; cilíndricos; 5 lados; 2 faces, sendo uma circular; não tem lados; círculo e triângulo; são congruentes; as laterais tem a mesma medida; planos	Uma base circular; base circular e superfície lateral setor; superfície cônica fechada, os planos paralelos cortariam as geratrizes;
Cilindro	Parece com uma vara; redondo e larguinho; compridos e redondos; tem na parte de cima um círculo e seu corpo é oco; roliços; finos; faz parte do motor de uma carro; não possuem pontas; mais alto que largo; roliços e largos; pontiagudos; tem as extremidades redondas; canos; alongado e roliço;	Circular; mesmo diâmetro em todo o seu comprimento; triangular; forma circular; tem raio e diâmetro; forma um círculo em cada lado; base cilíndrica; figura irregular; dois lados retos e dois lados circulares	Base circular; duas bases circulares; superfície lateral retangular;

Como no Ensino Médio - e principalmente no Ensino Fundamental - praticamente só são trabalhados os cilindros retos, esses foram considerados como exemplos gerais do conceito de cilindro, e não como uma particularização do conceito. O mesmo aconteceu com o cone, aqui reduzido a cone reto.

No caso do cilindro, as respostas sugeriram que alguns alunos pareciam ter a imagem de um cilindro reto onde a altura é maior do que o diâmetro da base (exemplo: “comprido”), outros pareciam ter a imagem de um cilindro com a altura menor do que o diâmetro da base (exemplo: “largos”). A palavra lado foi utilizada como superfície da base, superfície lateral, ou ainda como aresta.

A tabela a seguir mostra as categorias de linguagem mais usadas pelos alunos.

Tabela 41. Distribuição dos alunos quanto às categorias de linguagem usadas para descrever cada figura.

Categorias de linguagem	Prisma	Paralele.	Cubo	Pirâmide	Cone	Cilindro
	Nº de alunos (%)	Nº de alunos (%)	Nº de alunos (%)	Nº de alunos (%)	Nº de alunos (%)	Nº de alunos (%)
1ª.Termos não específicos e combinação de termos	18 (5%)	14 (4%)	16 (4%)	19 (5%)	31 (8%)	29 (8%)
2ª.Termos específicos utilizados de maneira incorreta ou incompleta	34 (9%)	31 (8%)	40 (11%)	58 (15%)	29 (8%)	17 (4%)
3ª.Termos específicos utiliz. para particularizar (propriedades)	1 (0,3%)	27 (7%)	*	16 (4%)	*	*
4ª.Termos específicos corretos (propriedades)	10 (3%)	14 (4%)	59 (16%)	4 (1%)	21 (6%)	28 (7%)
Não responderam	314(83%)	291(77%)	262(69%)	280(74%)	296(78%)	303(80%)
Total	377(100%)	377(100%)	377(100%)	377(100%)	377(100%)	377(100%)

(*) as descrições para cubo, cone e cilindro não foram classificadas nessa categoria

A Questão n.º 9 solicitava que o aluno completasse cada frase com o nome da figura de tal forma que a tornasse verdadeira. A tabela a seguir mostra os nomes atribuídos às características apresentadas.

Tabela 42. Distribuição dos alunos de acordo com os nomes atribuídos nas frases da questão n.º 9.

Frases	Nomes-	N.º de alunos	(%)
a) Sólidos geométricos cujas faces são polígonos recebem o nome de.....	Prisma	11	(3%)
	Poliedro (*)	8	(2%)
	Pirâmide	2	(1%)
	Outros	11	(3%)
	Não resp.	345	(91%)
b) Tem seis faces, todas paralelogramos. Seu nome é.....	Hexágono	25	(7%)
	Paralelepípedo(*)	25	(7%)
	Cubo	16	(4%)
	Outros	13	(3%)
	Não resp.	298	(79%)
c) Uma de suas faces (chamada base) é um polígono qualquer. Todos os seus vértices pertencem ao plano da base, exceto um. Seu nome é.....	Pirâmide(*)	16	(4%)
	Prisma	9	(2%)
	Triângulo	6	(2%)
	Cone	4	(1%)
	Outros	10	(3%)
	Não resp.	332	(88%)
d) É formado por seis quadrados. Seu nome	Cubo (*)	134	(36%)
	Quadrado	4	(1%)
	Retângulo	4	(1%)
	Hexágono	4	(1%)
	Não resp.	231	(61%)
e) Para construí-lo, usando cartolina, são necessárias duas bases circulares e a superfície lateral é obtida por meio de um retângulo. Seu nome é.....	Cilindro(*)	120	(32%)
	Cubo	12	(3%)
	Cone	6	(2%)
	Não resp.	239	(63%)
f) Para construí-lo, usando cartolina, é necessária uma base circular e a superfície lateral é obtida por meio de um setor circular. Seu nome é.....	Cone(*)	92	(25%)
	Cilindro	11	(3%)
	Outros	4	(1%)
	Não resp.	270	(72%)
g) Ele é um poliedro que tem as duas faces paralelas e congruentes e todas as outras faces laterais são paralelogramos. Seu nome é.....	Paralelepípedo	15	(4%)
	Trapézio	5	(1%)
	Outros	20	(5%)
	Não resp.	337	(89%)
h) É poliedro regular de seis faces. Seu nome é.....	Cubo(*)	17	(5%)
	Hexágono	16	(4%)
	Outros	15	(4%)
	Não resp.	329	(87%)

Foi verificado que a maior porcentagem de acertos referiu-se ao cubo (formado por seis quadrados) que foi reconhecido por 36% dos alunos. No entanto, a frase que descrevia o cubo como sendo um poliedro regular de seis faces só permitiu a nomeação correta de 5% dos mesmos. As respostas dadas a essas frases permitiram verificar a relação entre a linguagem e o conceito. A expressão “seis quadrados” envolvia conceitos já formados pelo aluno, independente da sua formação em geometria espacial, e a resposta correta parecia indicar que esse aluno estaria no nível 2 da hierarquia de Van Hiele, em relação ao conceito de cubo. No entanto, as palavras “poliedro” e “faces” pareceram ter dificultado a identificação da mesma figura, por se tratarem de termos específicos da geometria espacial, embora sugeridos para serem utilizados desde as primeiras séries do Ensino Fundamental pela Proposta da CENP. A palavra “regular” já demandaria uma análise melhor das propriedades do cubo, o que não deve ter sido feito pelos alunos, já que a porcentagem de acertos foi tão baixa.

Observando a grande porcentagem de alunos que não completou as frases, bem como os nomes errados, é possível concluir que a maioria não dominava a linguagem necessária para entendimento da questão. Com exceção do cubo, cone e cilindro, os outros conceitos não foram identificados pela descrição das propriedades.

HABILIDADE VISUAL E GRÁFICA

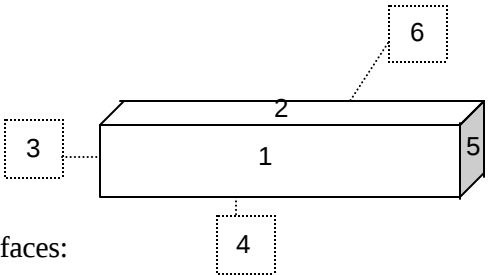
Para fazer um estudo da habilidade visual/gráfica, em relação à geometria espacial, dos alunos sujeitos desse trabalho, foram analisados os desenhos da questão N.º 2 da Prova de Conhecimentos.

A Questão n.º 2 solicitava aos alunos que desenhassem a planificação de uma figura geométrica tridimensional desenhada na perspectiva. Solicitava também que desenhassem em perspectiva a figura possível de se obter com uma planificação apresentada. Analisando os desenhos dos alunos, percebeu-se que a maioria não utilizou instrumentos de desenho geométrico, ou seja, régua e compasso. Por esse

motivo, não se avaliou a exatidão de medidas, nem a retidão dos segmentos, ou a perfeição do círculo. A verificação dos diferentes desenhos baseou-se nas percepções e representações consideradas necessárias para, dada uma figura espacial, desenhar uma planificação correta.

Algumas dessas representações são apresentadas nos exemplos a seguir. Convém acrescentar que as planificações do prisma e da pirâmide apresentadas são apenas dois exemplos entre as várias planificações possíveis.

- Representação do número total de faces: 06
 Face 1 – visível e não deformada
 Faces 2 e 5 – visíveis e deformadas
 Faces 3, 4 e 6 – não visíveis
- Representação do número de arestas por face:
 todas as faces têm 4 arestas
- Representação da congruência e paralelismo de faces:
 Faces 1 e 6; 2 e 4; 3 e 5
- Representação da conexão de faces:
 Faces 1 e 5; 1 e 3; 1 e 4; 2 e 6; 4 e 6; 2 e 6
- Representação da congruência de arestas para ser possível a conexão de faces: as arestas assinaladas em **negrito** na planificação
- Representação da perpendicularidade nas faces:
 todas as faces desenhadas tem arestas perpendiculares ou paralelas



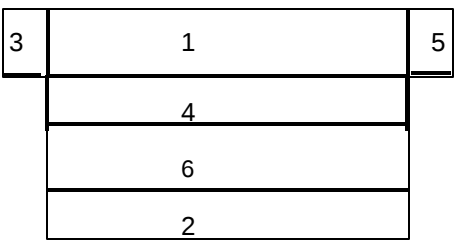


Fig 11. Representações necessárias para a planificação do paralelepípedo reto-retângulo

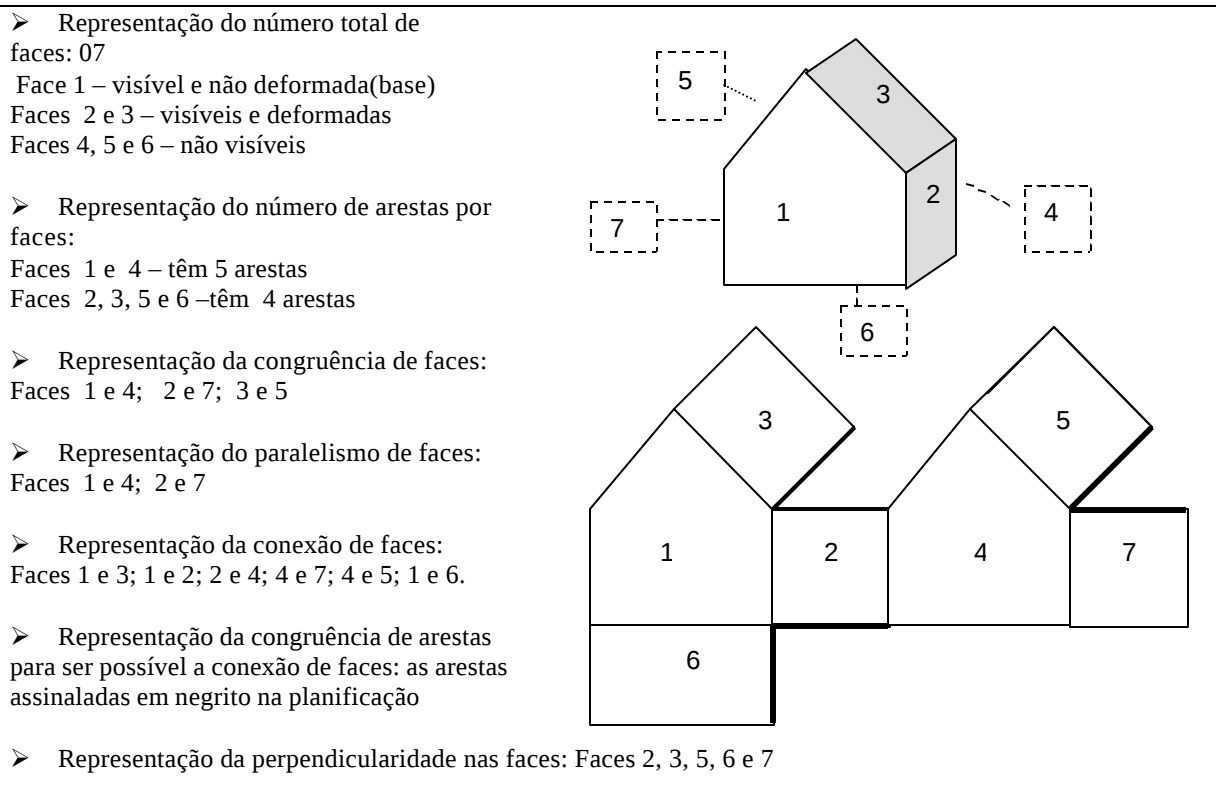


Fig 12. Representações necessárias para a planificação de um prisma

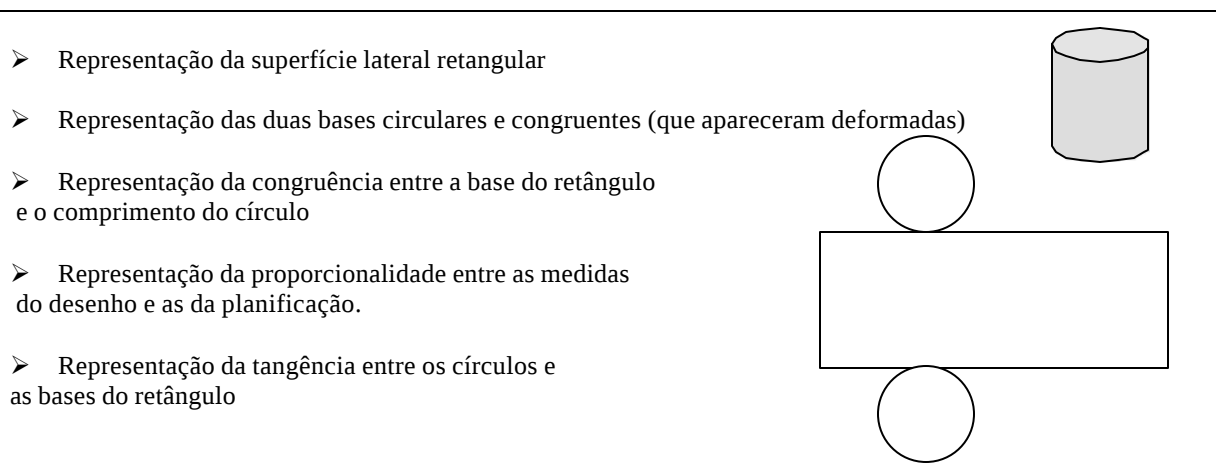


Fig. 13. Representações necessárias para a planificação do cilindro

- Representação do número total de faces: 07

Face 1: visível e deformada

Face 2: visível e não deformada

Faces 3 e 4: visíveis e deformadas

Faces 5, 6 e 7 : não-visíveis

- Representação da congruência das faces:

Faces 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

- Representação das faces 2, 3, 4, 5, 6 e 7

que são triângulos isósceles

- Representação da congruência das arestas: todas as arestas da base são congruentes; todas as arestas laterais são congruentes

- Representação da conexão das faces :

Faces 1 e 2; 1 e 3; 1 e 4; 1 e 5; 1 e 6 ; 1 e 7

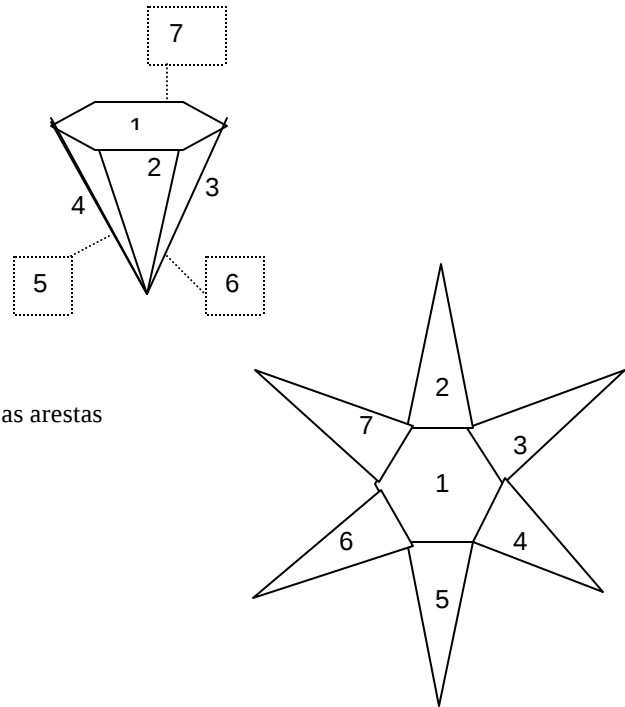


Fig 14. Representações necessárias para a planificação de uma pirâmide

- Representação da superfície lateral: setor circular
- Representação da base circular (que apareceu deformada)
- Representação do ângulo α do setor (nesse caso, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$)
- Representação da congruência entre o comprimento do arco de setor e o comprimento do círculo
- Representação da tangência entre o círculo e o arco do setor.
- Representação da proporcionalidade entre a planificação e o desenho em perspectiva.

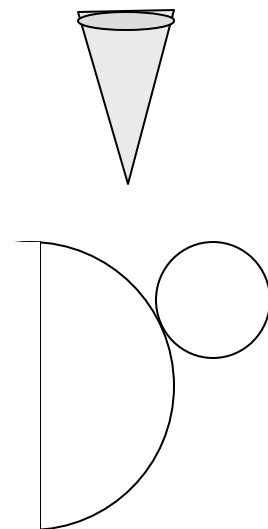


Fig. 15. Representações necessárias para a planificação do cone

Com base nessas análises, os desenhos foram agrupados de acordo com algumas categorias, descritas rapidamente a seguir, e comentadas após a apresentação dos exemplos.

1ª categoria: representações fracas

Nessa categoria, estão os desenhos dos alunos que pareceram confundir o desenho da figura total, em perspectiva, com o desenho das faces (no caso dos poliedros) ou das superfícies (no caso do cilindro e cone). Em outras vezes as faces foram desenhadas, as superfícies foram esboçadas, mas não existe possibilidade de uma movimentação dessas superfícies para se formar a figura.

2ª categoria: representações intermediárias

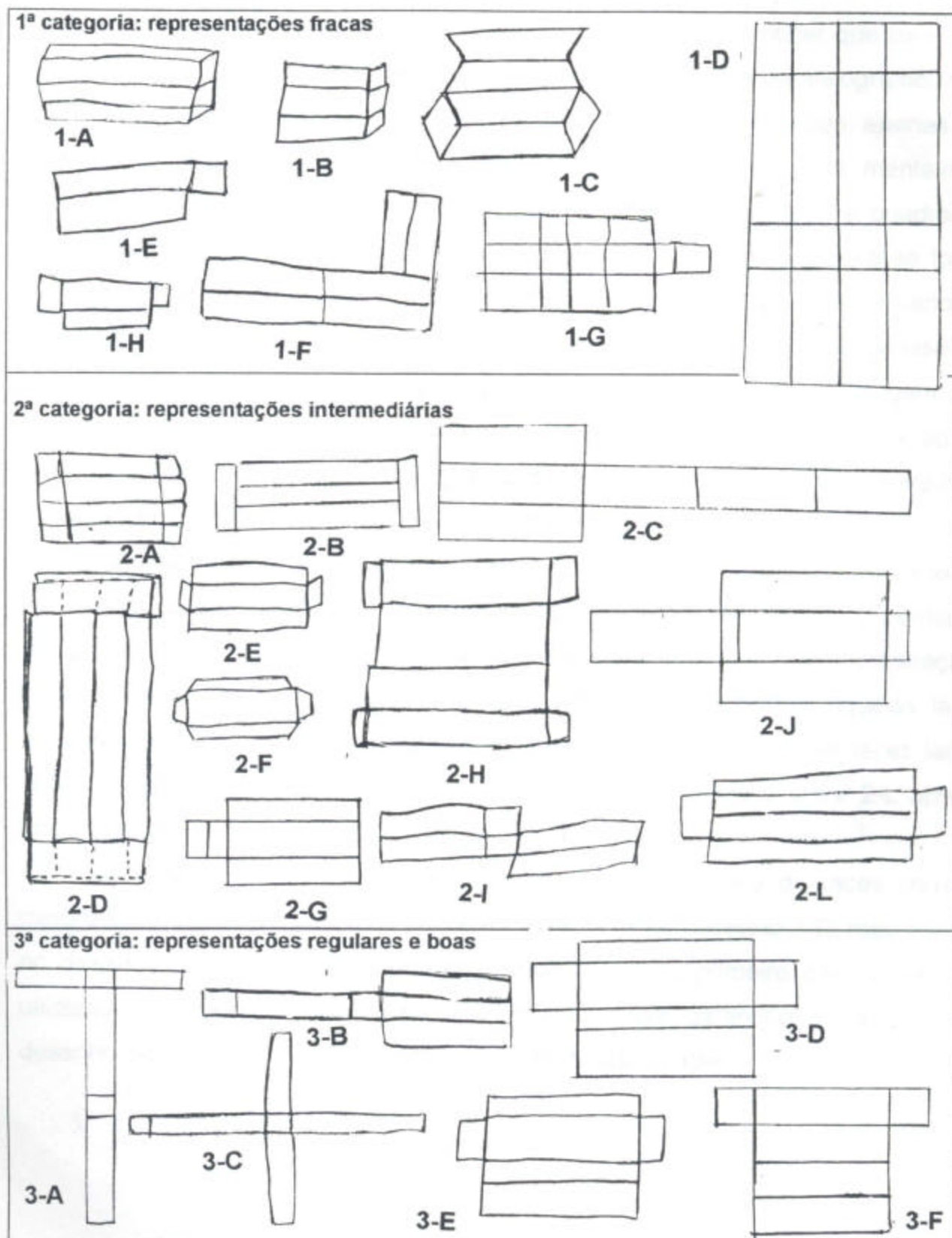
Nessa categoria, as faces dos poliedros são desenhadas, porém são representadas de forma não organizada, ou incompleta, ou com erros acentuados de formas e medidas. As superfícies laterais dos cilindros e cones pareceram ter sido percebidas, mas o aluno não conseguiu decidir quais as formas convenientes, isto é, retângulo e setor, respectivamente.

3ª categoria: representações regulares e boas

Com algumas falhas, as planificações foram esboçadas corretamente.

Dentro de cada categoria, foi possível perceber uma melhora progressiva nos desenhos, e tal fato é, a seguir, mostrado especificamente para cada figura.

Quadro 3. Distribuição de exemplos de planificações do paralelepípedo de acordo com categorias

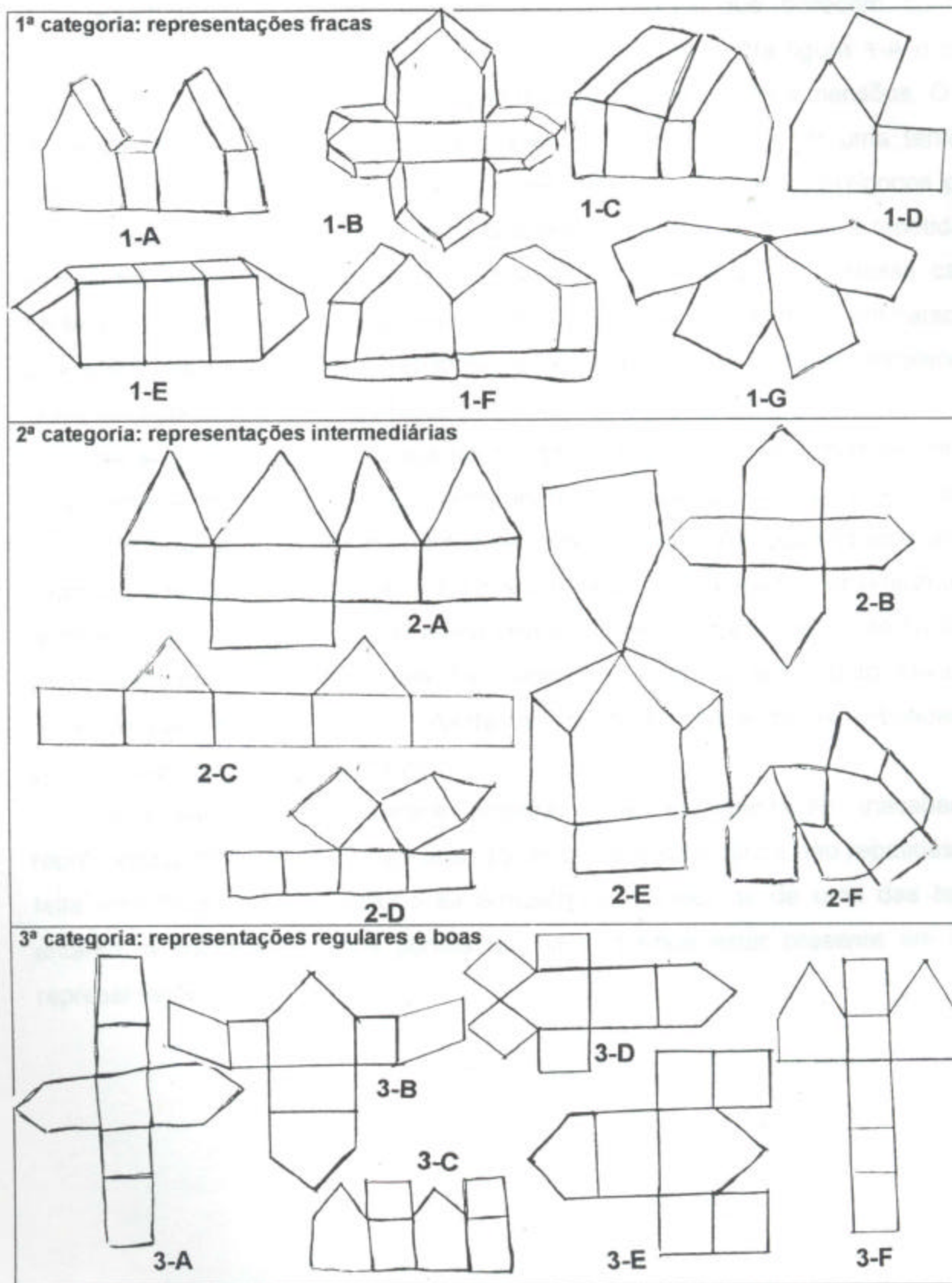


Na primeira categoria, tem-se a impressão de que o aluno confundiu o desenho em perspectiva do paralelepípedo com o desenho de sua planificação. Ele pareceu ter percebido que existem várias faces, mas insistiu em desenhar algumas delas na forma de paralelogramo, e esses desenhos deram a idéia de perspectiva (desenhos 1-A, 1-B e 1-C). Em outras situações, apenas algumas faces foram rebatidas (1-E e 1-H), como se o aluno não girasse mentalmente (e totalmente) a figura. Há casos em que muitas faces (retangulares e quadradas) foram desenhadas, e o desenho não possibilita qualquer movimentação para se formar um paralelepípedo. Parece que, nessa categoria, o aluno conseguiu manter vários pontos de vista sobre o objeto, mas não conseguiu ter coordenação entre eles, como se girasse a figura muitas vezes. Em resumo, nessa categoria, três situações podem ser verificadas: ou o aluno manteve a imagem da figura tridimensional na representação, ou representou dois ou três pontos de vista apenas, ou não teve controle sobre os diversos pontos de vista do objeto e exagerou no número de faces. No entanto, com poucas exceções, manteve o ângulo reto das faces.

Na segunda categoria, ainda foram constatados erros quanto ao número de faces, mas o aluno representou retângulos maiores e menores (com exceção desenho 2-C), demonstrando ter percebido a figura sob vários pontos de vista com alguma coordenação. Os pontilhados na figura 2-D sugeriram uma ação de dobrar aquelas faces. No desenho 2-H seria possível realizar uma movimentação, embora as faces laterais se sobreponham. Com número de faces correto, os desenhos 2-J, 2-I e 2-L apresentaram uma conexão errada das faces.

Na terceira categoria os desenhos apresentaram o número de faces correto. A congruência das faces paralelas não foi representada no desenho 3-D, mas foi verificável no desenho 3-E (apesar de o aluno ter usado régua no primeiro caso e de não a ter utilizado no segundo). As faces laterais quadradas garantiram a simplicidade do desenho 3-F, que conservou as medidas corretas das arestas.

Quadro 4. Distribuição de exemplos de planificações do prisma de acordo com categorias

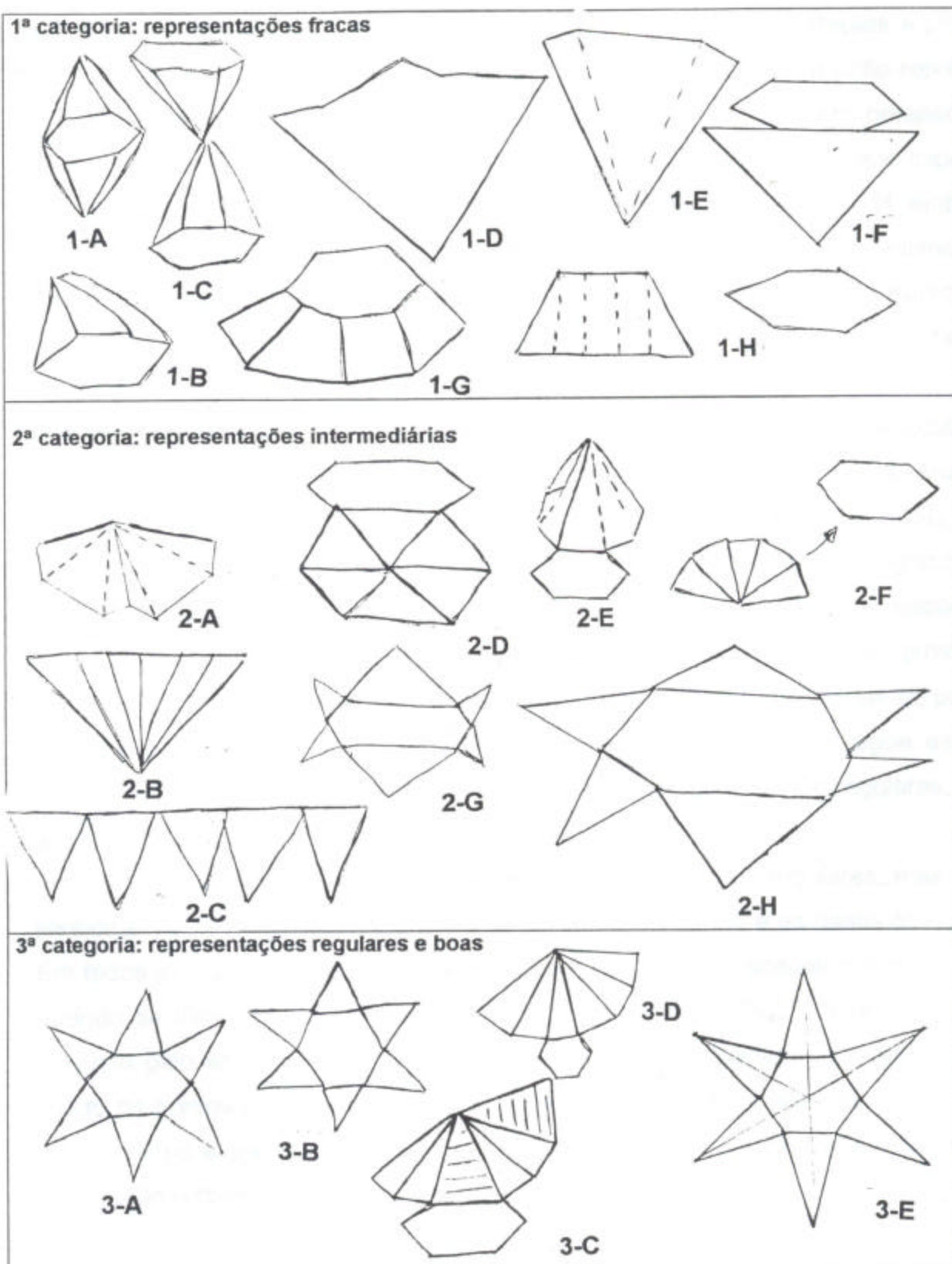


Notam-se, na primeira categoria, desenhos de alunos que pareceram confundir a imagem do prisma em perspectiva com a sua planificação. Na figura 1-A o prisma foi desenhado duas vezes com uma ligação que deu a idéia de três dimensões. O mesmo aconteceu com a figura 1-F, onde a imagem invertida pareceu ser uma tentativa de mostrar a planificação das faces não-visíveis. No desenho 1-C os polígonos pareceram acompanhar a perspectiva inicial. No 1-G apenas uma face, a frontal, foi repetida quatro vezes. Na figura 1-D só apareceu o desenho das faces visíveis. Nessa categoria, portanto, percebem-se três situações: confusão entre a representação em perspectiva e o desenho rebatido no plano; rebatimento de apenas algumas faces, rebatimento em número excessivo de uma das faces.

Na segunda categoria, ainda houve muitos erros, mas os desenhos permitiram uma movimentação que, embora longe de formar o prisma em questão, pareceram demonstrar certa coordenação entre alguns pontos de vista. A figura 2-A produziria um poliedro que lembraria uma “casinha” não prismática, e pareceu que tal forma foi considerada por sua aparência com o prisma dado. O aluno errou em conexões de faces, como na figura 2-D (nota-se também que o pentágono foi dividido em quadrado e triângulo, talvez figuras mais conhecidas pelo aluno). Ainda houve confusão entre faces rebatidas e em perspectivas, como no caso da 2-F.

Uma situação que pareceu registrar uma movimentação inacabada foi a representada na figura 3-B, com duas faces que pareceram ainda não rebatidas. Na 3-D faltou uma face, na 3-E o aluno se atrapalhou nas medidas de uma das bases. No entanto, a coordenação dos pontos de vista pareceu estar presente em todas as representações dessa terceira categoria.

Quadro 5. Distribuição dos exemplos de planificação da pirâmide de acordo com categorias

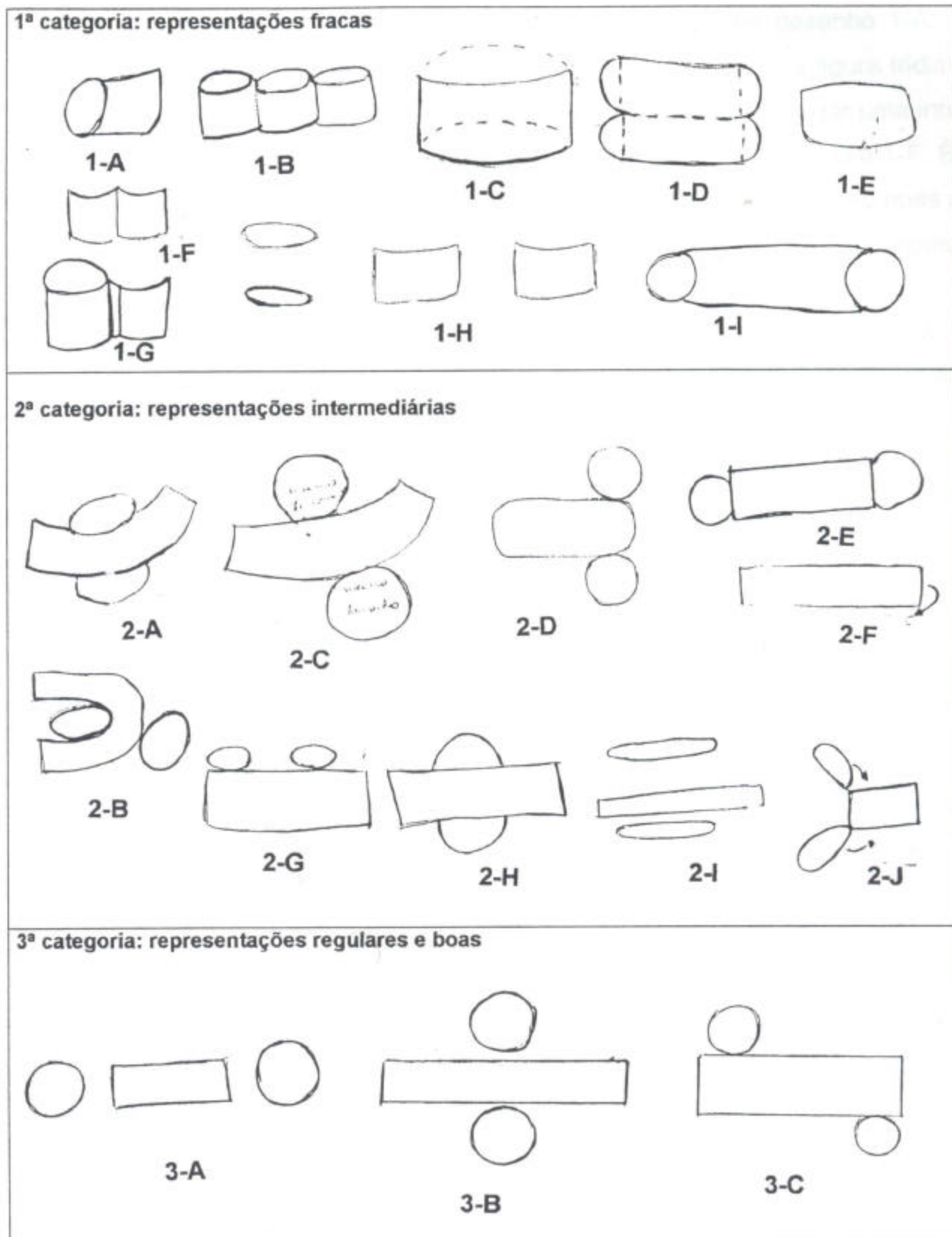


Inverter a pirâmide e inclinar suas faces laterais foi a maneira do aluno representar a planificação, conforme se verifica no desenho 1-B. Repetir a pirâmide, a opção apresentada em 1-A e 1-C. “Cortar” os triângulos laterais, a ação representada pelo 1-G. Percebe-se, nesses casos, a confusão entre a figura em perspectiva e a rebatida. Em 1-D e em 1-E, o aluno concentrou-se na superfície lateral, que supôs poder ser representada por apenas um polígono, assim como em 1-F e em 1-H, embora, nos dois últimos desenhos, a base hexagonal ter sido desenhada e no último caso o trapézio aparecer pontilhado, dando a idéia de possíveis dobras. Não pareceu existir, portanto, nessa categoria, coordenação entre os pontos de vista que o aluno tinha da pirâmide.

Na segunda categoria, o aluno representou as faces laterais triangulares, mas pareceu que ainda se manteve, nos casos de 2-A e 2-E, preso à imagem do tridimensional. Não há possibilidade de movimentação nos triângulos de 2-D, uma vez que apareceram ladrilhando a superfície. A linearidade das bases dos triângulos em 2-B também foi uma tentativa frustrada de rebatimento. Em 2-C há possibilidade de movimentação, mas faltaram um triângulo e o desenho da base. Erros acentuados de medidas de arestas e de ângulos em 2-G e em 2-H, ilustraram que, apesar de perceber a base hexagonal e as faces laterais triangulares, o aluno não conseguiu estabelecer coordenação entre os pontos de vista. Notam-se os hexágonos não regulares, na forma que foi apresentado em perspectiva.

Ainda apareceram, na terceira categoria, hexágonos não regulares, mas, como se verifica em 3-C, houve congruência entre os lados do hexágono e as bases dos triângulos. Em todas as figuras, os alunos tentaram desenhar triângulos isósceles, o que não é fácil quando se trata de ordenar os triângulos como na figura 3-D. Nota-se a estratégia utilizada pelo aluno que fez o desenho 3-E: parece ter partido do hexágono regular, ligado os pontos médios dos lados e, no prolongamentos desses segmentos marcado um ponto para ser os vértices dos triângulos. Para tal estratégia, as habilidades de construção refletiram conceitos de geometria plana.

Quadro 6. Distribuição dos exemplos de planificação do cilindro de acordo com categorias

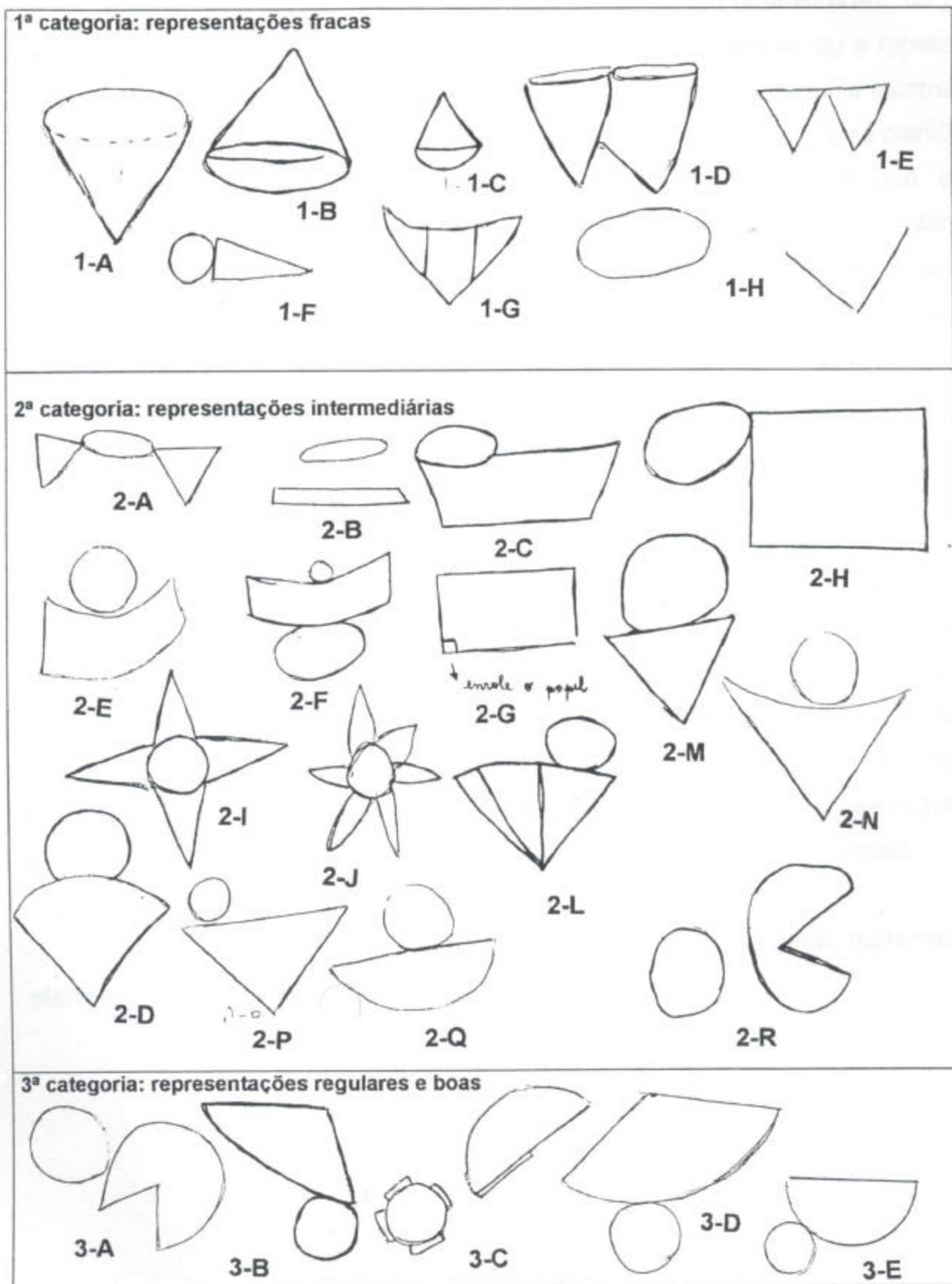


Modificar a posição do cilindro em perspectiva foi, novamente, opção de alguns alunos na tentativa de planificação, como pode ser visto no desenho 1-A. Repetir o desenho, pontilhar linhas, eliminar outras, mas manter-se preso à figura tridimensional, foram características observáveis em 1-B, 1-C, 1-E e 1-G. Pareceu haver uma intenção em “rasgar” o papel para que ele tomasse a forma arredondada, como 1-D e 1-F. É possível notar que o aluno percebeu os dois círculos, ou melhor, representou como duas elipses, e que girou a figura na intenção de perceber e representar pontos de vista, como no caso 1-H. A mesma intenção não se pode verificar em I-I.

Na segunda categoria, notam-se as diferentes formas atribuídas à superfície lateral do cilindro, de um setor de coroa até o retângulo. As bases do cilindro ora foram elípticas, ora semi-circulares, ora tangentes, ora sobrepostas, ora separadas da superfície lateral. Em 2-E, a posição dos círculos frustraram a formação do cilindro, em 2-G as bases coincidiram, em 2-J a intenção de movimentação tornou-se clara pelo desenho das duas flechas.

Enfim, na terceira categoria, embora em 3-A os círculos não apareçam tangenciando o retângulo, a única questão não decidida pelos alunos foi a relacionada aos comprimentos do retângulo e do círculo, que deveriam ser iguais.

Quadro 7. Distribuição dos exemplos de planificação do cone de acordo com categorias



Confirmando o que as planificações das outras figuras já mostraram, na primeira categoria, ou o aluno modificou a posição da figura em perspectiva, ou a repetiu (talvez na tentativa de mostrar a figura sob um ponto de vista diferente daquele mostrado pelo desenho dado), ou esboçou alguns traços que estariam bem distantes de uma planificação.

Na segunda categoria, em quase todos os desenhos, pareceu existir a representação da base (circular ou elíptica) e de uma superfície lateral. Interessante observar as tentativas dos alunos quanto à forma dessa superfície. Triangulares, trapezoidais, retangulares, setores de coroa circular etc. Em 2-G, houve uma indicação de que o retângulo deveria ser movimentado, sendo que esse aluno talvez tenha tido a experiência de fazer um cone de papel enrolando um retângulo. Rasgar a superfície lateral de um cone deve ter sido a intenção dos alunos em 2-I e em 2-J. Os triângulos dispostos em 2-L lembraram um setor circular, assim como os outros desenhos, na seqüência.

Um setor com mais de 270° , como o desenhado na figura 3-A, daria origem a um cone não semelhante ao cone original dado como modelo. Nos outros casos, apesar da imperfeição do desenho 3-B, as planificações foram consideradas como corretas.

Foi possível verificar uma progressiva melhora nos desenhos das planificações do paralelepípedo, prisma, pirâmide, cilindro e cone nas três categorias. Em todos os casos, tentou-se mostrar, através das categorias formadas, que a representação das figuras rebatidas é um produto do desenvolvimento dos alunos quanto à qualidade das relações estabelecidas.

A tabela a seguir mostra como os alunos, de uma forma geral, representaram as planificações das figuras solicitadas.

Tabela 43. Distribuição dos alunos quanto às categorias de planificação para cada figura.

Categorias	Figuras				
	Paralelep.	Prisma	Pirâmide	Cilindro	Cone
	Nº de alunos(%)	Nºde alunos(%)	Nºde alunos(%)	Nºde alunos(%)	Nºde alunos(%)
1ª-Representações fracas	16(4%)	29(8%)	27(7%)	25(7%)	47(12%)
2ª-Representações intermediárias	38(10%)	75(20%)	55(14%)	86(23%)	85(22%)
3ª-Represent.regulares e boas	200(53%)	52(14%)	55(14%)	66(17%)	23(6%)
Não planificaram	123(33%)	221(58%)	240(63%)	200(53%)	222(59%)
Total	377(100%)	377(100%)	377(100%)	377(100%)	377(100%)

Além do fato de ter havido um grande número de alunos que não planificou cada figura, foram verificadas as dificuldades diferenciadas em cada figura. Assim, o paralelepípedo teve maior número de representações regulares e boas, enquanto que, nas outras figuras, parece ter havido muita dificuldade para representação.

4ªPARTE : RESULTADOS QUANTO AOS NÍVEIS DE VAN HIELE

Com o objetivo de verificar a existência de uma hierarquia de conceitos relativos às figuras geométricas espaciais, bem como o de classificar os alunos nessa hierarquia, as questões da Prova de Conhecimentos foram elaboradas segundo características apontadas pela teoria.

Para avaliar o Nível 1, a Questão n.º 1 solicitava ao aluno que nomeasse as figuras que foram apresentadas através de um desenho em perspectiva ou então através do nome do objeto cuja forma geométrica se queria avaliar. Segundo a teoria de Van Hiele, nesse nível o aluno identificaria as formas como um todo e conheceria os nomes das figuras, o que permitiria, portanto, que ele acertasse os itens da questão. Na pesquisa de Carrol (1998) foi adotado o seguinte critério: se o aluno acertasse cinco das sete questões pertencentes a um determinado nível, ele seria considerado como pertencente àquele nível. Na presente pesquisa, se fosse utilizada a mesma razão, porém na forma de porcentagem, ou seja, para o aluno pertencer ao Nível 1 se houvesse a necessidade de acertar no mínimo 60% das figuras da Questão nº1, então apenas sete alunos pertenceriam a esse nível.

Analisando melhor as figuras propostas para serem nomeadas, verifica-se que muitas delas só poderiam ser nomeadas corretamente se o aluno tivesse feito uma análise de suas propriedades. Ao tomar, como exemplo, a pirâmide da Figura 16 percebe-se que ela, além de ter faces triangulares e irregulares, não aparece apoiada sobre sua base. Ela só receberia essa nomeação caso o aluno já identificasse pirâmide como sendo um poliedro onde todos os seus vértices pertencem a um mesmo plano, exceto um. Essa identificação já garantiria as características de pensamento próprias do Nível 2.

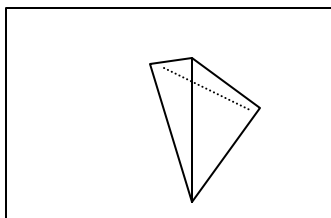
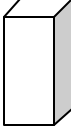
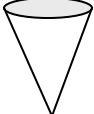
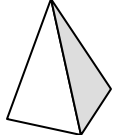
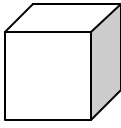
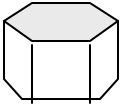
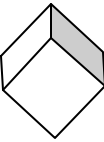
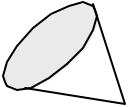


Figura 16. Pirâmide

Algumas figuras, no entanto, não possuem variações na sua forma - como são os cubos e as esferas -, outras são normalmente apresentadas aos alunos (nos livros didáticos, principalmente) sem muitas variações – como os cilindros e cones. Levando-se em consideração esse fato, procurou-se avaliar, nesse Nível 1, se os alunos reconheceriam as formas geométricas espaciais mais comuns, mesmo com o desenho em diferentes posições. Foram incluídas no grupo também dois prismas, pois, embora a identificação de um prisma exija uma análise de propriedades, os prismas escolhidos (um de base triangular e outro de base hexagonal) têm formas consideradas comuns nos livros didáticos e na Proposta Curricular da CENP (São Paulo, 1991). Optou-se, então, pelas figuras (a), (b), (c), (e) (i), (k), (l), (n), (p), (s) e (u), conforme pode ser verificado no Quadro a seguir. Calculou-se, então, para cada aluno a porcentagem de figuras nomeadas corretamente a fim de classificar no Nível 1 os alunos que tivessem no mínimo 60% de acertos.

Quadro n.º 8. Figuras geométricas utilizadas para verificação do Nível 1

(a) 	(b) 	(c) 	(e) 	(i) 
(k) 	(l) 	(n) 	(p) 	(s) 
				(u) bola de ping-pong

Para avaliar o Nível 2 de Van Hiele, foram utilizadas as questões referentes à planificação, descrição e identificação de figuras. Para o Nível 3 foram selecionadas as questões referentes às relações entre as figuras. A tabela a seguir mostra como as questões foram distribuídas nos diferentes níveis.

Tabela 44. Distribuição das questões quanto aos níveis e critérios considerados

Nível	Critério	Questões
Nível 1	Reconhecimento e nomeação de figuras	N.º 1 itens (a), (b), (c), (e), (i), (k), (l), (n), (p), (s), (u)
Nível 2	Planificação de figuras; descrição de propriedades e identificação a partir de propriedades	N.º 2,3,4,5,6,7,8,9 e 10
Nível 3	Relações entre propriedades	N.º 11,12,13,14,15,16,e 17

Foi calculada a porcentagem de acertos em cada nível, o que representou o desempenho dos alunos em cada nível, e os resultados são mostrados na tabela a seguir.

Tabela 45. Distribuição da porcentagem de acertos segundo o nível das questões

Nível	Mínimo(%)	Máximo(%)	Média (%)	Desvio padrão(%)
1	0	100	40	23
2	0	97	24	20
3	0	70	2	6

Verifica-se, pela tabela, que o Nível 1 apresentou o menor grau de dificuldade do que o Nível 2 e este, do que o Nível 3. Foi possível verificar, também, o desempenho nos níveis por série, o que é mostrado na tabela e no gráfico a seguir.

Tabela 46. Média da porcentagem de acerto nos níveis por série

Série	Nível 1	Nível 2	Nível 3
Geral	39,6	23,7	2,1
1^a	26,0	12,7	0,8
2^a	39,4	22,7	2,4
3^a	44,4	26,8	2,2
4^a	51,0	34,8	3,4

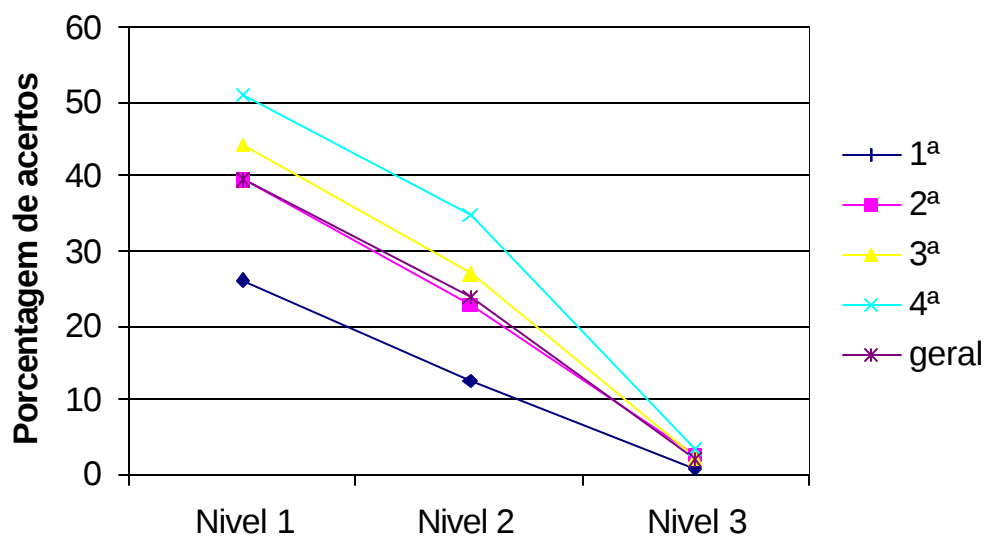


Figura 17. Média de porcentagem de acertos por nível e série.

Como pode ser observado na tabela e no gráfico anteriores, a 4^a série teve um desempenho superior ao da terceira, que por sua vez teve um desempenho superior ao da segunda, enquanto a primeira foi a série com o pior desempenho. O teste de

Kruskal-Wallis indicou que essas diferenças de desempenho foram significativas para o Nível 1 e para o Nível 2.

(Para o Nível 1: $\chi^2(3, N=377)=58,691$; $p=0,000$, para o Nível 2: $\chi^2(3, N=377)=59,8401$; $p=0,000$, para o Nível 3: $\chi^2(3, N=377)=5,6325$; $p=0,1304$).

Relação entre os níveis

A fim de verificar a existência ou não de relação linear entre o Nível 1 e o Nível 2, foi utilizada a porcentagem de acertos em cada nível e feita a análise de correlação, sendo calculado o coeficiente de correlação de Pearson ($r=0,58$). Tal valor indicou uma correlação positiva moderada entre os dois níveis, sugerindo que alunos com um desempenho alto no Nível 2 tiveram também um desempenho alto no Nível 1. Assim também, alunos que apresentaram desempenho fraco no Nível 2 também tiveram desempenho fraco no Nível 1.

A análise de regressão mostra que o Nível 2 pode ser relacionado ao Nível 1 através da equação:

$$\text{Nível 2} = 0,035818 + 0,507734 * \text{Nível 1}$$

$$(F_{(1,375)}=195,39; p = 0,000)$$

Essa análise indicou que cada 10% de acerto a mais de um sujeito desse grupo, considerando as condições em que foi aplicada a prova, nas questões do Nível 1, teria 5,1% de acerto a mais nas questões de Nível 2. O coeficiente de determinação foi $R^2 = 34\%$, indicando que 34% da variação do Nível 2 pode ser explicado pela variação do Nível 1.

Foi possível verificar que essa tendência não se manteve em todas as séries, sendo que a terceira mostrou um índice de correlação¹ maior do que as outras séries, conforme mostrado na tabela a seguir.

¹ As figuras que ilustram essas diferenças encontram-se no Anexo 3.

Tabela 47. Relação entre o Nível 1 e o Nível 2 em cada série

Série	Nível 2 = a + b * Nível 1	F	p-valor	R ² (%)
Geral	Nível 2 = 3,5818 + 0,5077*Nível 1	F _(1,375) =195,39	0,0000	34,3
1^a	Nível 2 = 4,5845 + 0,3104*Nível 1	F _(1,100) =195,39	0,0000	18,3
2^a	Nível 2 = 9,2408 + 0,3438*Nível 1	F _(1,95) = 13,97	0,0003	12,8
3^a	Nível 2 = 4,9379 + 0,4921*Nível 1	F _(1,95) = 55,38	0,0000	36,8
4^a	Nível 2 = 5,0349 + 0,5845*Nível 1	F _(1,79) = 40,88	0,0000	34,1

Foi verificado que a maioria dos alunos da 1^a série estava situada abaixo de 60% para o Nível 1 e abaixo de 40% para o Nível 2, sendo que boa parte deles se situava abaixo da reta da igualdade (Nível 1 = Nível 2). Isso significa que o desempenho no Nível 1 foi quase sempre melhor que o desempenho no Nível 2. No entanto, alguns alunos obtiveram baixa pontuação no Nível 1 e conseguiram pontuação maior no Nível 2. Isto pode explicar a baixa correlação encontrada. Os alunos com razoável desempenho no Nível 1 (acima de 50%) tiveram pontuação bem menor do que essa no Nível 2.

Na 2^a série, o comportamento observado foi diferente do que ocorreu na 1^a série. Verificou-se que o número de alunos com baixa pontuação no Nível 1 e que se superaram no Nível 2 foi menor que na 1^a série. No entanto, vários alunos que se localizaram na faixa de pontuação entre 40% a 60% no Nível 1, conseguiram melhor pontuação no Nível 2. Isso poderia explicar a menor correlação encontrada nessa série.

Foi observado que os dados da terceira e quarta série mostraram um maior grau de relação entre as variáveis. Assim, alunos com baixa pontuação no Nível 1 tenderam a ter baixa pontuação no Nível 2 e alunos com alta pontuação no Nível 1 tenderam a ter alta pontuação no Nível 2. Foi constatada também a existência de maior número de alunos com maiores pontuações nos dois níveis. No caso da 4^a série, observou-se que os pontos se situavam mais próximos da reta de regressão e isso explicaria a maior

correlação nessa série. O coeficiente angular próximo de 0,5 para a terceira e quarta séries mostrou que por dois pontos a mais no Nível 1 foi obtido 1 ponto a mais no Nível 2.

Classificação dos alunos nos níveis

Utilizando o critério já adotado por Carrol (1998), segundo o qual para um sujeito pertencer a um nível era necessário que ele tivesse acertado no mínimo 60% das questões referentes àquele nível, foi feita uma classificação mostrada na tabela a seguir. Classificaram-se no Nível 0 os alunos que não conseguiram aquela porcentagem de acertos no Nível 1. Foi observado que apenas seis alunos não puderam ser classificados, pois acertaram mais de 60% das questões do Nível 2 e não atingiram essa porcentagem no Nível 1, o que não estaria de acordo com a hierarquia.

Tabela 48. Distribuição dos alunos em relação aos Níveis de Van Hiele

Níveis	Nº de alunos	%
Nível 0	285	75,6
Nível 1	64	17,0
Nível 2	21	5,6
Nível 3	1	0,2
Não classificados	6	1,6
Total	377	100,0

Essa tabela mostra, portanto, que a maioria dos alunos sujeitos do presente estudo (75,6%) não conseguiram reconhecer e nomear corretamente as principais figuras geométricas espaciais que são sugeridas para serem trabalhadas com as crianças a partir das primeiras séries. 17% dos alunos reconheceram e nomearam tais figuras; 5,6%, além de nomeá-las, conseguiram analisar suas propriedades. Apenas um aluno conseguiu estabelecer relações entre as propriedades das figuras, tendo sido classificado no Nível 3 de pensamento em geometria.

Uma reclassificação dos alunos nos níveis de Van Hiele

Quando se adota o critério anterior para classificar o aluno em apenas um dos níveis, deixa-se de verificar alguns aspectos, tais como o desempenho desse aluno naquele nível e o desempenho nos demais níveis.

- Desempenho no nível.

Alunos que acertaram 5% ou 55% das questões do Nível 1 foram juntos classificados como não pertencentes a esse nível. Da mesma forma, alunos com 60% ou 100% também foram classificados juntos. Não foram, portanto, verificadas diferenças de desempenho dentro de cada nível.

- Desempenho nos níveis

Alguns alunos só acertaram questões do Nível 1; outros acertaram questões de Níveis 1 e 2, demonstrando raciocinar em níveis diferentes, dependendo do conceito, mas esse fato acabou não aparecendo na classificação dos alunos.

Tentando fazer uma classificação mais precisa, adotou-se, então, o critério utilizado por Jaime e Gutierrez (1990-a), que consideraram graus de aquisição dentro de cada nível. A evolução dentro do nível foi dividida em quatro valores que refletiriam os graus de aquisição. Esses valores corresponderam à porcentagem de acertos no nível, conforme é verificado na figura a seguir.

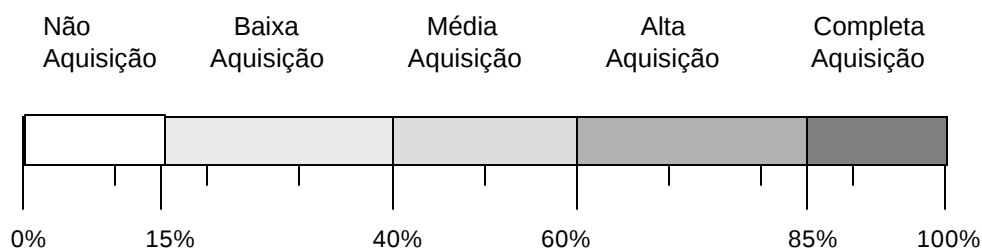


Figura 18. Classificação da aquisição de um nível (adaptado de Jaime&Gutierrez,1990)

Dessa forma, cada aluno pode ser classificado de acordo com o desempenho dentro do nível, e também classificado de acordo com a relação entre os desempenhos

nos diversos níveis. Criaram-se, portanto, categorias – chamadas de categorias de aquisição nos níveis – para classificar os alunos, o que é mostrado na tabela a seguir.

Escolheram-se as nove categorias com maior número de alunos para comporem a Figura 23. Cada categoria foi representada por um gráfico de barras, chamado de modelo de grau de aquisição nos níveis. As barras indicaram a média de desempenho, em porcentagem, dos alunos daquela categoria, em cada nível.

Tabela 49. Distribuição dos alunos de acordo com a classificação nas categorias de aquisição¹ dos níveis

Categorias	Aquisição nos níveis			Nº alunos	%
	Nível 1	Nível 2	Nível 3		
A	---	---	---	44	11,7
B	Baixa	---	---	71	18,8
C	Média	---	---	24	6,4
D	Alta	---	---	9	2,4
E	Completa	---	---	0	0,0
F	Baixa	Baixa	---	56	14,9
G	Média	Baixa	---	40	10,6
H	Alta	Baixa	---	34	9,0
I	Completa	Baixa	---	0	0,0
J	Média	Média	---	21	5,6
K	Alta	Média	---	20	5,3
L	Completa	Média	---	0	0,0
M	Alta	Alta	---	14	3,7
N	Completa	Alta	---	1	0,3
O	Completa	Completa	---	0	0,0
P	Baixa	Baixa	Baixa	2	0,5
Q	Média	Baixa	Baixa	3	0,8
R	Média	Média	Baixa	1	0,3
S	Alta	Baixa	Baixa	0	0,0
T	Alta	Média	Baixa	1	0,3
U	Alta	Alta	Baixa	2	0,5
V	Alta	Alta	Alta	0	0,0
W	Completa	Baixa	---	2	0,5
X	Completa	Alta	Baixa	3	0,8
Y	Completa	Média	Baixa	1	0,3
Z	Completa	Completa	Alta	1	0,3
A ₁	Baixa	Média	---	11	2,9
A ₂	---	Baixa	---	10	2,7
A ₃	Média	Alta	---	2	0,5
A ₄	Média	Alta	Baixa	4	1,1
Total de alunos				377	100,0

¹ --- = não aquisição (0 a 15%)
Média = média aquisição (40 a 60%)
Completa= completa aquisição (85 a 100%)

Baixa =baixa aquisição (15 a 40%)
Alta =alta aquisição (60 a 85%)

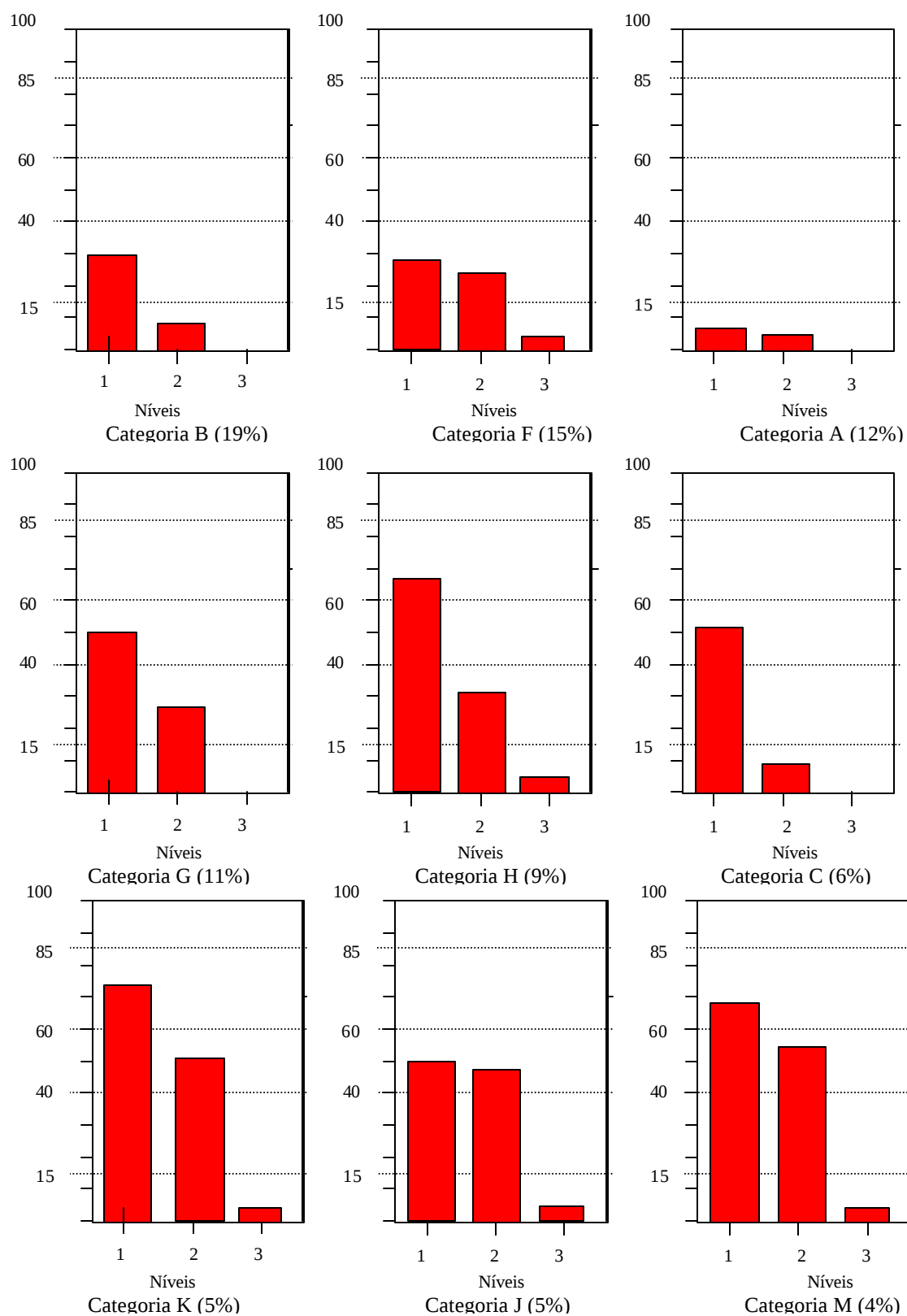


Figura 19. Modelos de grau de aquisição nos níveis nas categorias mais frequentes (os valores entre parênteses indicam a porcentagem de alunos pertencentes à categoria)

Assim como observou Jaime e Gutierrez (1990-a) em suas pesquisas, a classificação feita em categorias através de graus de aquisição dos níveis pode diferenciar melhor os alunos que, na classificação apenas por níveis, estariam todos agrupados.

Convém lembrar que tal classificação em categorias foi baseada nas porcentagens de acertos dentro de cada nível e que em cada nível as questões correspondiam a vários conceitos. Portanto, em uma mesma categoria ainda podem estar sujeitos com modos diferentes de conceituar um cilindro e um cubo, por exemplo. No entanto, é possível inferir que alunos em baixa aquisição no Nível 1 nomearam poucas figuras e alunos em completa aquisição nomearam todas as figuras propostas. No Nível 2, os de baixa aquisição não demonstraram analisar figuras, seja através de planificações, seja descrevendo propriedades ou reconhecendo figuras através de propriedades. Já os de média aquisição, tanto podem ter analisado apenas duas figuras - mas demonstrando habilidade visual/gráfica para planificá-las e verbal para usar e entender a linguagem necessária - como podem ter demonstrado apenas uma habilidade (por exemplo, a visual/gráfica) para todas as figuras propostas.

Pensando em uma possível intervenção do professor, os alunos das categorias A, B e F necessitariam de uma instrução mais básica e efetiva do que os da categoria J, embora todos esses estivessem classificados no nível abaixo de 1.

Foi possível observar também as categorias onde a hierarquia de níveis não foi mantida. A figura a seguir ilustra as categorias encontradas onde os graus de aquisição no Nível 2 foram maiores do que no Nível 1, lembrando que o número total de alunos nessa situação foi vinte e sete, o que corresponde a 7% do total de sujeitos.

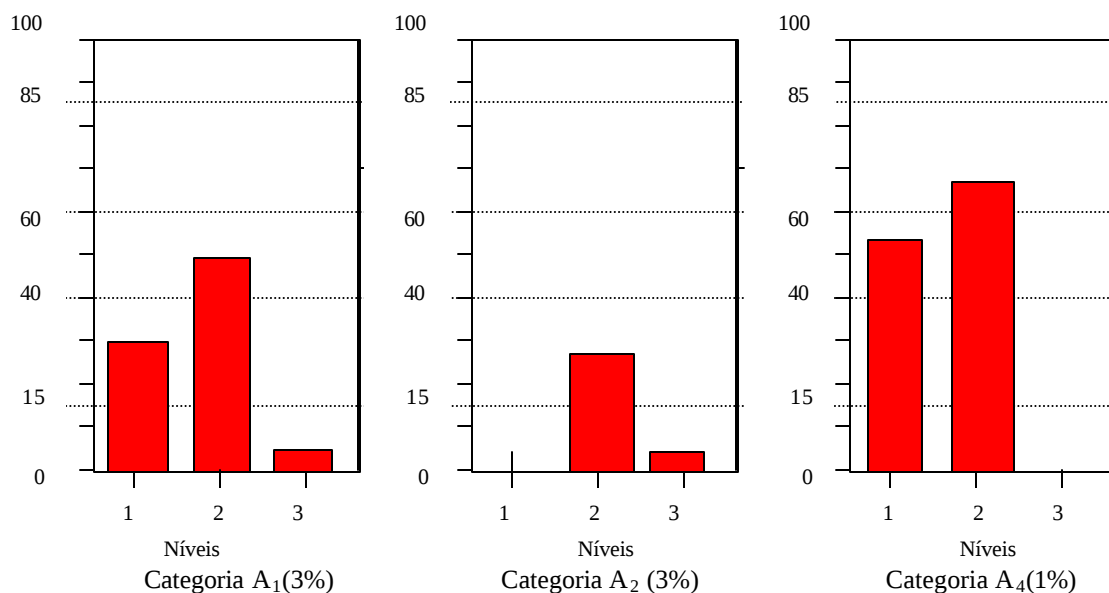


Figura 22. Modelos de grau de aquisição nos níveis nas categorias onde não se manteve hierarquia.(os valores entre parênteses indicam a porcentagem de alunos pertencente à categoria)

Algumas características dos graus de aquisição do Nível 1 e Nível 2

A classificação dos alunos nos graus de aquisição dos níveis deu-se de acordo com a porcentagem de acertos em cada bloco de questões. Pretende-se agora, verificar as características dos alunos dentro de cada um daqueles graus. Para tanto, foram considerados os diferentes conceitos bem como as habilidades estudadas, ou seja, verbal e visual/gráfica.

A habilidade verbal e o Nível 1

Nas primeiras análises a seguir, os alunos aparecem distribuídos de acordo com o grau de aquisição no Nível 1. Assim, pode-se verificar não apenas como foram os acertos na questão do reconhecimento, mas, principalmente, que categoria de linguagem foi utilizada pelos alunos nos diferentes graus para os diferentes conceitos. A

primeira tabela a seguir mostra, por exemplo, que a maioria dos alunos já acertou o nome do cilindro, mesmo estando em baixa aquisição, isto é, mesmo não reconhecendo e nomeando a maior parte das outras figuras.

Tabela 50. Distribuição dos alunos nos graus de aquisição no Nível 1 quanto ao reconhecimento e nomeação corretos das figuras

Figura	Graus de aquisição do Nível 1				
	Não aquisição	Baixa aquisição	Média aquisição	Alta aquisição	Completa aquisição
	Nºalunos que acertou	Nºalunos que acertou(%)	Nºalunos que acertou(%)	Nºalunos que acertou(%)	Nºalunos que acertou(%)
Cubo	5 (9%)	64 (46%)	78 (82%)	77 (95%)	5 (100%)
Pirâmide	4 (7%)	55 (39%)	60 (33%)	72 (89%)	5 (100%)
Paralelep	0 (0%)	5 (4%)	13 (14%)	20 (25%)	4 (80%)
Cone	12 (21%)	123 (88%)	93 (88%)	81 (100%)	5 (100%)
Cilindro	3 (5%)	89 (64%)	90 (95%)	79 (98%)	5 (100%)
Esfera	1 (2%)	30 (21%)	54 (57%)	63 (78%)	5 (100%)
Prisma	0 (0%)	5 (4%)	6 (6%)	10 (12%)	2 (40%)
Total (*)	56(100%)	140(100%)	95(100%)	81(100%)	5(100%)

(*) N° de alunos em cada grau de aquisição

Verificou-se que nem todos os alunos em completa aquisição conseguiram nomear corretamente o paralelepípedo e o prisma.

A tabela a seguir mostra as categorias de linguagem (mais freqüentes) usadas para nomear as figuras. Verificou-se que, para o paralelepípedo, foi a segunda categoria (nome da face) que se manteve em quase todos os graus, indicando que mesmo os alunos com alta aquisição nomearam o paralelepípedo de retângulo. O cone e cilindro foram nomeados aleatoriamente pelos de baixa aquisição. A nomeação correta da esfera já apareceu entre aqueles que não adquiriram o Nível 1 da hierarquia.

Tabela 51. Distribuição dos alunos nos graus de aquisição no Nível 1 quanto às categorias de linguagem mais freqüentes usadas para nomear figuras

	Graus de aquisição do Nível 1				
	Não aquisição	Baixa aquisição	Média aquisição	Alta aquisição	Completa aquisição
Figura	Categoria/ Nºalunos(%)	Categoria/ Nºalunos(%)	Categoria/ Nºalunos(%)	Categoria/ Nºalunos(%)	Categoria/ Nºalunos(%)
Cubo	2ª 20 (38%)	2ª 50 (38%)	6ª 77 (81%)	6ª 77 (95%)	6ª 5 (100%)
Pirâmide	2ª 9 (16%)	2ª 26 (19%)	6ª 59 (62%)	6ª 73 (90%)	6ª 5 (100%)
Paralelep	2ª 19 (34%)	2ª 86 (61%)	2ª 13 (14%)	2ª 41 (51%)	6ª 3 (60%)
Cone	1ª 4 (7%)	1ª 3 (2%)	6ª 90 (95%)	6ª 79 (98%)	6ª 5 (100%)
Cilindro	1ª 14 (25%)	1ª 21 (15%)	6ª 90 (95%)	6ª 79 (98%)	6ª 5 (100%)
Esfera	6ª 11(20%)	4ª 48 (34%)	6ª 54 (57%)	6ª 63 (78%)	6ª 5 (100%)
Prisma	2ª 27 (48%)	2ª 99 (71%)	2ª 68(72%)	6ª 50(62%)	6ª 2 (40%)
Total (*)	56(100%)	140(100%)	95(100%)	81(100%)	5(100%)

1ª- nome geometria espacial incorreto. 2ª- nome correto do polígono(face). 3ª- nome incorreto do polígono(face). 4ª- círculo. 5ª- nome não geométrico. 6ª- nome correto. (*) Nº de alunos em cada grau de aquisição

A habilidade verbal e o Nível 2

Os resultados a seguir dizem respeito a algumas características do Nível 2. A seguinte tabela mostra os acertos, em cada grau de aquisição, na nomeação de figuras após terem sido dadas descrições de algumas de suas propriedades.

Tabela 52. Distribuição dos alunos nos graus de aquisição no Nível 2 quanto à identificação de figuras por propriedades

Figura	Graus de aquisição do Nível 2				
	Não aquisição	Baixa aquisição	Média aquisição	Alta aquisição	Completa aquisição
	Nºalunos que acertou(%)	Nºalunos que acertou(%)	Nºalunos que acertou(%)	Nºalunos que acertou(%)	Nºalunos que acertou(%)
Cubo	7 (5%)	56 (37%)	48 (87%)	22 (92%)	1 (100%)
Pirâmide	0 (0%)	2 (1%)	3 (6%)	10 (42%)	1 (100%)
Paralelep	0 (0%)	6 (4%)	8 (14%)	12 (50%)	1 (100%)
Cone	1 (0%)	36 (24%)	35 (64%)	19 (79%)	1 (100%)
Cilindro	3 (2%)	55 (37%)	39 (71%)	22 (92%)	1 (100%)
Prisma	0 (4%)	2 (1%)	0 (0%)	1(4%)	1 (100%)
Total (*)	147(100%)	150(100%)	55(100%)	24(100%)	1(100%)

(*) Nº de alunos em cada grau de aquisição

Verificou-se que o cubo e o cilindro foram reconhecidos por boa parte dos alunos ainda em média aquisição (quando se apresentou aos alunos uma descrição de suas propriedades). Por outro lado, a descrição apresentada para o prisma não pareceu ter qualquer significado para os alunos, visto o pequeno número de alunos que acertou tal figura, mesmo em graus mais altos.

Descrever propriedades das figuras também demonstrou não ser tarefa fácil para os alunos. As categorias mais utilizadas para mostrar como os alunos responderam a essa questão são mostradas na tabela a seguir, indicando que, para diferentes figuras, várias foram as formas de descrevê-las. Pirâmide e paralelepípedo só alcançaram a 4ª categoria por aquele aluno em completa aquisição do Nível 2.

Tabela 53. Distribuição dos alunos nos graus de aquisição no Nível 2 quanto às categorias de linguagem mais frequentes para descrever propriedades

	Graus de aquisição do Nível 2				
	Não aquisição	Baixa aquisição	Média aquisição	Alta aquisição	Completa aquisição
Figura	Categoria/ Nºalunos(%)	Categoria/ Nºalunos(%)	Categoria/ Nºalunos(%)	Categoria/ Nºalunos(%)	Categoria/ Nºalunos(%)
Cubo	2ª 2 (8%)	2ª 22 (15%)	4ª 19 (34%)	4ª 4 (19%)	4ª 1 (100%)
Pirâmide	2ª 7 (5%)	2ª 32 (21%)	2ª 16 (29%)	3ª 5 (21%)	4ª 1 (100%)
Paralelep	2ª 2 (1%)	2ª 18 (12%)	3ª 9 (16%)	3ª 8 (33%)	4ª 1 (100%)
Cone	1ª 3 (2%)	1ª 19 (13%)	1ª 9 (16%)	4ª 11 (46%)	4ª 1 (100%)
Cilindro	1ª 3 (2%)	1ª 21 (79%)	4ª 11 (20%)	4ª 13 (54%)	4ª 1 (100%)
Prisma	2ª 4 (3%)	2ª 15 (10%)	2ª 11 (20%)	4ª 7 (29%)	4ª 1 (100%)
Total (*)	147(100%)	150(100%)	55(100%)	24(100%)	1(100%)

1ª- termos não específicos e combinação de termos; 2ª- termos específicos utilizados de maneira incorreta ou incompleta; 3ª- termos específicos utilizados para particularizar; 4ª- termos específicos corretos. (*) N° de alunos em cada grau de aquisição

A habilidade visual/gráfica e o Nível 2

Os acertos na planificação das figuras analisadas no capítulo anterior foram, na primeira tabela a seguir, relacionados com os graus de aquisição do Nível 2. Verificou-

se que o paralelepípedo apresentou uma alta porcentagem de acertos, mesmo nos graus mais baixos de aquisição. No entanto, o cone ainda ofereceu dificuldades para os alunos classificados em maior grau. O único aluno classificado no grau de completa aquisição, curiosamente, não acertou a planificação da pirâmide e do prisma.

Tabela 54. Distribuição dos alunos nos graus de aquisição no Nível 2 quanto à planificação correta

	Graus de aquisição do Nível 2				
	Não aquisição	Baixa aquisição	Média aquisição	Alta aquisição	Completa aquisição
Figura	Nºalunos que acertou(%)	Nºalunos que acertou(%)	Nºalunos que acertou(%)	Nºalunos que acertou(%)	Nºalunos que acertou(%)
Cubo	6 (4%)	54 (37%)	42 (76%)	20 (83%)	1 (100%)
Pirâmide	5 (3%)	35 (23%)	29 (53%)	16 (68%)	0 (0%)
Paralelep	35 (24%)	99 (66%)	49 (89%)	23 (96%)	1 (100%)
Cone	0 (0%)	15 (10%)	15 (27%)	7 (29%)	1 (100%)
Cilindro	6 (4%)	40 (27%)	27 (49%)	18 (67%)	1 (100%)
Prisma	6 (4%)	32 (21%)	16 (29%)	12 (50%)	0 (0%)
Total (*)	147(100%)	150(100%)	55(100%)	24(100%)	1(100%)

(*) N° de alunos em cada grau de aquisição

A tabela a seguir mostra como evoluíram as representações nos diversos graus de aquisição do Nível 2.

Tabela 55. Distribuição dos alunos nos graus de aquisição do Nível 2 quanto às categorias de planificação

Figura	Graus de aquisição do Nível 2				
	Não aquisição	Baixa aquisição	Média aquisição	Alta aquisição	Completa aquisição
	Categoria/ Nºalunos(%)	Categoria/ Nºalunos(%)	Categoria/ Nºalunos(%)	Categoria/ Nºalunos(%)	Categoria/ Nºalunos(%)
Paralelepípedo	3ª 32 (22%)	3ª 95 (63%)	3ª 49 (89%)	3ª 23 (96%)	3ª 1 (100%)
Prisma	2ª 8 (5%)	2ª 38 (25%)	2ª 21 (38%)	3ª 12 (50%)	2ª 1 (100%)
Pirâmide	2ª 4 (3%)	2ª 26 (17%)	2ª 20 (36%)	3ª 14 (58%)	2ª 1 (100%)
Cilindro	2ª 11 (8%)	2ª 42 (27%)	2ª 23(42%)	3ª 12 (50%)	3ª 1 (100%)
Cone	1ª 10 (7%)	2ª 44 (29%)	2ª 23 (42%)	2ª 14 (58%)	2ª 1 (100%)
Total (*)	147(100%)	150(100%)	55(100%)	24(100%)	1(100%)

1ª- representações fracas; 2ª-representações intermediárias; 3ª- representações regulares e boas; (*) Nº de alunos em cada grau de aquisição

A tabela anterior mostra como a evolução nas representações das planificações aconteceram nos diferentes graus de aquisição. Verificou-se que a 1ª categoria – representações fracas – foi a mais freqüente para o cone no grau mais baixo de Nível 2 e que, mesmo aumentando o grau, isto é, mesmo acertando mais questões desse nível, os alunos continuaram com representações intermediárias para essa figura.

Finalizando a apresentação dos resultados, a tabela a seguir mostra a distribuição dos alunos das quatro séries quanto aos graus de aquisição dos níveis.

Tabela 56. Distribuição dos alunos nas séries quanto aos graus de aquisição dos níveis.

Nível	Grau de aquisição	Séries			
		1ª	2ª	3ª	4ª
		Nºalunos(%)	Nºalunos(%)	Nºalunos(%)	Nºalunos(%)
1	Não-aquisição	28(28%)	8(8%)	17(18%)	3(4%)
	Baixa aquisição	51(50%)	45(46%)	23(24%)	21(26%)
	Média aquisição	17(17%)	30(31%)	25(26%)	23(28%)
	Alta aquisição	6(6%)	13(13%)	31(32%)	31(38%)
	Completa aquisição	0(0%)	1(1%)	1(1%)	3(4%)
2	Não- aquisição	60(59%)	41(42%)	32(33%)	14(17%)
	Baixa aquisição	37(36%)	39(40%)	37(38%)	37(48%)
	Média aquisição	5(5%)	14(14%)	20(21%)	16(20%)
	Alta aquisição	0(0%)	3(3%)	8(8%)	13(16%)
	Completa aquisição	0(0%)	0(0%)	0(0%)	1(1%)
3	Não- aquisição	101(99%)	91(94%)	92(95%)	78(96%)
	Baixa aquisição	1(1%)	6(6%)	5(5%)	2(2,5%)
	Média aquisição	0(0%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)
	Alta aquisição	0(0%)	0(0%)	0(0%)	1(1%)
	Completa aquisição	0(0%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)
		102(100%)	97(100%)	97(100%)	81(100%)

CAPÍTULO IX

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E UMA SÍNTESE DAS TEORIAS

1- Sobre as opiniões em relação à geometria.

Esta pesquisa mostrou que os sujeitos, alunos da unidade do Cefam de Mogi das Cruzes, aprenderam muito pouco de geometria ao longo de sua escolaridade, principalmente em se tratando de geometria espacial. Tiveram, assim, dificuldade em dizer quais são os objetos de estudo da geometria.

Quanto ao sentimento em relação à matemática, houve igualdade entre o número dos que gostam e o dos que não gostam, pois a metade dos alunos destacou aspectos positivos em suas justificativas e a outra metade, os negativos. No entanto, a relação dos alunos com a geometria não foi a mesma, apesar da geometria fazer parte da matemática.

O fato de gostar ou não da disciplina, bem como os aspectos positivos e negativos alegados, foram itens considerados para se avaliar as atitudes dos alunos em relação à matemática e, em especial, à geometria.

Klausmeier (1977) citado por Brito (1996) diferenciou gosto, atitudes e valores usando a estabilidade como critério de diferenciação. Gosto estaria ligado a algo específico, os valores seriam mais gerais e abarcariam áreas maiores de experiências, e as atitudes estariam situadas entre os dois. É possível que uma pessoa varie o seu gosto por determinado objeto, porém menos freqüente seria a mudança de atitudes em relação a ele e, bem menos provável ainda, que os valores da pessoa adulta sejam modificados.

Quanto às atitudes em matemática, Brito (1996) alegou que não é a matemática em si que gera atitudes negativas e o mesmo pode ser verificado na análise dos dados da presente pesquisa. Realmente, a maioria dos alunos que alegaram não gostar, ou gostar mais ou menos da matemática, não destacou aspectos negativos da disciplina, mas sim os aspectos negativos ligados ao seu relacionamento com a disciplina, enquanto aluno. A autopercepção do desempenho – quando ruim – foi o principal

motivo alegado por aqueles que afirmaram não gostar de matemática. Por outro lado, os que afirmaram gostar da disciplina destacaram aspectos positivos da própria matemática, entre eles: “é fundamental”, “é interessante”, “é desafiadora”, “é legal”.

A maioria dos sujeitos não justificou as opiniões quanto à geometria, talvez pelo pouco contato com essa parte específica da matemática. A tendência foi avaliar negativamente a disciplina, a autopercepção do desempenho e os métodos de ensino utilizados. Por outro lado, a maioria afirmou que o ensino de geometria é importante, principalmente pelos seus aspectos utilitários.

Isso mostrou que as atitudes em relação à matemática e à geometria – nos itens analisados – foram diferentes, e tal fato parece ocorrer devido ao ensino considerado regular ou ruim desta última, pois, como afirmou Brito (1996), as atitudes desenvolvem-se ao longo dos anos escolares e estão relacionadas a aspectos pontuais como o professor, o ambiente da sala de aula, o método utilizado, a autopercepção do desempenho etc. Os alunos que afirmaram gostar de matemática – assim como os que afirmaram gostar de geometria – tiveram um desempenho melhor do que os que tiveram outra resposta para esse item. Os resultados também são concordantes com Coll (1998), quando afirmou que as atitudes guiam os processos perceptivos e cognitivos que conduzem a aprendizagem de qualquer tipo de conteúdo educacional, seja referente a conceitos ou a procedimentos.

Acrescenta-se, ainda, que os alunos da quarta série foram aqueles que, em maior porcentagem, afirmaram que gostavam de geometria e que a julgavam importante, sendo eles, também, os que tiveram melhor desempenho tanto geral como em cada nível. Mesmo com um ensino que aparenta falhas, é possível afirmar que algum conteúdo de geometria foi trabalhado com esses alunos do Cefam, e esse trabalho pareceu refletir-se no desempenho e nas atitudes dos alunos da 4ª série.

2- Sobre o conceito geométrico: construto mental x entidade pública.

Usando a terminologia proposta por Klausmeier (1977) ao tratar da formação de conceitos, estes tanto podem ser entendidos como entidades públicas ou como

construtos mentais. Como entidades públicas os conceitos seriam informações organizadas que correspondem ao significado da palavra e que, sendo aceitos pela comunidade matemática, poderiam estar colocados nos livros didáticos e específicos para a área. Assim, o conceito de prisma, por exemplo, pode ser encontrado nos livros de matemática que tratam de geometria espacial. Como construto mental do indivíduo, o conceito geométrico está mais ligado ao modo como as pessoas pensam e agem em relação ao espaço físico e principalmente sobre as formas tanto presentes nos objetos do mundo físico quanto aquelas criadas em sua mente. O interesse dessa pesquisa foi estudar os conceitos como construtos mentais dos alunos do Cefam, em especial aqueles ligados às figuras geométricas espaciais.

Uma das funções do ensino da geometria é propiciar condições para que cada indivíduo forme o conceito como construto mental e gradativamente vá ampliando as informações sobre o conceito de modo que este acabe tendo o mesmo significado que a entidade pública. Na presente pesquisa, foi verificado como um mesmo conceito, o de prisma, por exemplo, tem significados diferenciados entre os alunos. Frente a questões que envolviam esse conceito, alguns alunos lembraram do objeto usado para decomposição da luz, outros confundiram com pirâmide, outros pareciam sequer conhecer tal palavra. No entanto, como entidade pública, o conceito de prisma é um só, embora possam ser encontrados, nos livros didáticos, níveis diferentes de linguagem, de acordo com a idade e série a que se destinam. Em livros destinados a alunos do Ensino Médio, por exemplo, o conceito de prisma é definido a partir de termos como ponto, reta, plano, segmento, paralelos etc.

Tomando-se ainda o mesmo exemplo, e comparando-se as definições apresentadas nos livros com aquelas dadas pelos alunos, pode-se afirmar que, enquanto entidade pública, o conceito de prisma foi definido segundo os elementos primitivos da geometria (ponto, reta, plano); ao passo que, como construto mental, o conceito de prisma envolveu a percepção da figura como um todo, para posterior representação do todo e de suas partes.

Embora não tendo como objetivo estudar as construções dos conceitos geométricos a partir da instrução, foi possível verificar – através dos desenhos elaborados pelos alunos sujeitos dessa pesquisa – as noções das quais dispunham.

Piaget (1993) afirmou que, na construção axiomática da geometria, os tratados elementares apresentam as noções espaciais repousando em intuições euclidianas (ponto, reta, plano, ângulos, paralelismo etc), enquanto que a construção do espaço (tanto perceptivo como representativo) começa por intuições topológicas elementares (conceitos de vizinhança e de separação, de ordem), bem antes de tornar-se simultaneamente projetivo e euclidiano. Foi observado que os desenhos de planificação elaborados pelos alunos indicavam que muitos deles ainda não haviam construído totalmente as noções projetivas e euclidianas. Isso se verificou quando, ao fazer os desenhos propostos, pareceram ficar presos à imagem da figura tridimensional, por uma intuição topológica.

Sendo assim, parece que a ordem de construção dos conceitos geométricos enquanto entidades públicas difere da ordem de construção dos conceitos enquanto construto mental. Não parece existir, portanto, justificativa para se iniciar o estudo da geometria – seja para crianças ou adultos – pelas noções intuitivas de ponto, reta, plano, segmentos, semi-reta, linha poligonal, ângulo etc. A própria linguagem utilizada para essas noções é muito distante da linguagem cotidiana do aluno e, embora tenha sido largamente utilizada pela Matemática Moderna nas décadas de sessenta e setenta, tal abordagem tem sido minimizada atualmente.

3- Sobre os conceitos geométricos (científicos ou espontâneos) e o papel da linguagem na obtenção dos conceitos.

Utilizando a classificação de Vygotsky quanto aos conceitos espontâneos e científicos, poder-se-ia dizer que os conceitos geométricos investigados nessa pesquisa fazem parte da segunda categoria, pois são frutos de instrução específica feita pela escola, na forma de um sistema de idéias inter-relacionadas. Diferem portanto dos conceitos cotidianos ou espontâneos, que podem ser adquiridos fora do contexto escolar.

Em uma das primeiras questões, na Prova de Conhecimentos (Anexo 2), foi apresentada uma caixa de leite industrializado. Era esperado que todos os alunos reconhecessem a forma dessa caixa. No entanto, muitos não foram capazes de nomear

o conceito geométrico, seja com a palavra paralelepípedo, prisma ou poliedro. Muitos sequer tentaram nomear o objeto, deixando a questão sem resposta. Outros apelaram para um conceito de geometria plana, o retângulo, que está presente na face mais visível do desenho. Não parece que, ao chamar tal figura de retângulo, o aluno tenha demonstrado não diferenciar uma figura plana de uma espacial, mas sim desconhecer todo um sistema de conceitos científicos (geometria espacial) que tem uma linguagem diferente daquele já conhecido (geometria plana), mas que está completamente relacionado a este último. Mesmo sem reconhecer a caixinha com o nome correto, o que já os excluiria do Nível 1 de Van Hiele, muitos alunos demonstraram reconhecer os retângulos e desenharam sua planificação. Já não a viam, portanto, como um objeto, nem como uma forma bidimensional, mas perceberam suas faces, representando-as como retângulos, desenhando-as e organizando-as de modo a formar o objeto. Mas não conseguiram perceber a caixa como um objeto representando um prisma, sequer como poliedro. Isso pode ter ocorrido em virtude de o ensino de geometria ao qual esses alunos foram submetidos não haver privilegiado a denominação das figuras.

A análise da linguagem dos alunos permite levantar novamente a questão do conceito espontâneo e científico. Os conceitos cotidianos dizem respeito às relações da palavra com os objetos a que se referem, enquanto que os científicos se prendem às relações das palavras com outras palavras, pois não há como compreender tais conceitos sem ligá-los a outros. Mas como é possível, através da linguagem, saber se o aluno tem o conceito cientificamente formado?

Tomando como exemplo os conceitos de paralelepípedo, cilindro e cone, verifica-se que a primeira categoria (termos não específicos e combinação de termos) é justamente aquela na qual a palavra parece estar se referindo ora ao conceito cotidiano, ora ao científico. Observando as palavras: "serve para colocar nas ruas ou nas construções", "material rochoso", "pedra retangular", verificou-se, nas duas primeiras descrições, respectivamente, o conceito espontâneo ligado à utilização do objeto e às características físicas do material com o qual é feito o mesmo objeto. Na terceira descrição, embora ainda se referisse a um objeto, o aluno conseguiu realçar sua forma, ou pelo menos, a de suas faces. Na descrição do cilindro e da pirâmide, as expressões "...é roliço, tem base circular e faz parte do motor do carro", "é roliço,

deitadinho”, “monumentos do Egito”, é possível notar, de modo semelhante ao observado com o paralelepípedo, as palavras que se referiam à forma ou posição do objeto e à sua utilização – retratando algum conhecimento sobre máquinas, fatos etc.

Na segunda categoria (termos específicos utilizados de maneira incorreta ou incompleta) as expressões: “cubo retangular”, “forma de retângulo com seis lados” mostraram que o aluno já estava utilizando os sistemas de sinais da geometria, embora sem ainda dominar a rede conceitual própria dos conceitos científicos. Nesses casos pode ser apontado o dinamismo das relações entre o que é cotidiano e o que é científico no processo de formação dos conceitos.

Ao referir-se aos conceitos cotidianos, os indivíduos focalizaram a atenção no objeto (sua referência). Já nos científicos, a atenção estava focalizada no próprio ato de pensar (seu sentido). Os primeiros permitiram o desenvolvimento de estruturas importantes de generalização. Os segundos – devido a sua estrutura semiótica – demonstraram a consciência reflexiva, o discernimento, o controle voluntário do ato de pensar, ou, em outras palavras, o domínio do pensamento. Ao atingir formas de pensamento mais elaboradas, a palavra passou ser o símbolo para o conceito. Foi observado, com relação à quarta categoria (termos específicos corretos ou propriedades), que os alunos fizeram as descrições das propriedades do cubo (“poliedro regular”), do paralelepípedo (“tem doze arestas”, “hexaedro”) e do cone (“os planos paralelos cortariam as geratrizes”). Em todas essas descrições, as palavras referiram-se a outros conceitos da geometria espacial e pareciam demonstrar uma consciência reflexiva. Ao descrever um cubo como um poliedro regular, por exemplo, o aluno demonstrava conhecer que as faces eram polígonos regulares e, para ser polígonos regulares, deveriam ter lados e ângulos congruentes etc. Para elaborar tal descrição foi necessário um certo domínio do pensamento e, conseqüentemente, isso demonstrou que o aluno que teve esse procedimento apresentava o conceito de cubo no patamar científico. Nessa situação, muito provavelmente, quando o mesmo aluno brincar com um dado, ou quando precisar construí-lo com cartolina, o seu conceito cotidiano de dado será influenciado pelo seu conceito científico de cubo.

Van Hiele destacou o papel da linguagem na obtenção dos níveis de pensamento em geometria. Segundo a teoria, para responder às questões do Nível 3 (relações entre

propriedades), o aluno precisaria dominar a linguagem relativa ao Nível 2. Pode-se dizer, então, que um aluno somente teria os conceitos geométricos verdadeiramente como científicos se dominasse a linguagem que o capacitasse a responder às questões de Nível 3. Na perspectiva de Vygotsky, parece que o Nível 2 seria aquele no qual é percebido o dinamismo dos processos de “descida” aos conceitos cotidianos e de “subida” aos científicos através de mudanças na estrutura cognitiva. Isso concorda com a afirmação de Nunokawa (1994), quando sugeriu que o Nível 2, transição entre o Nível 1 e 3, corresponderia ao desenvolvimento dos conceitos científicos baseados nos conceitos cotidianos.

Os sujeitos desse grupo estudado não responderam às questões de Nível 3, ou seja, não teriam formado, ainda, os conceitos científicos. No entanto, muitos responderam às questões referentes ao Nível 2. Isso indica que esses alunos, apesar da escassez de estudos de geometria, estariam em um processo de elaboração conceitual das figuras espaciais. O próprio questionário utilizado e a preocupação em realizar as tarefas podem ter contribuído para disponibilizar os conceitos cotidianos ou específicos da geometria plana, levando à elaboração dos conceitos geométricos espaciais.

4-Sobre a interpretação da realidade e a formação dos conceitos: ação (assimilação e acomodação) e mediação.

Piaget (1971) afirmou que a formação dos conceitos se dá através de ações sensório-motoras individuais ou de ações concretas também individuais. Talvez seja possível relacionar essa afirmação com as categorias de termos utilizados na descrição de figuras. Podem ser verificados, naquelas categorias, os termos relacionados a possíveis ações com os objetos. Quando o aluno descreveu os paralelepípedos como “duros e pesados”, o conhecimento dele sobre a figura estava ligado a abstrações empíricas, não parecendo existir relações entre os objetos nem entre as características do próprio objeto. Quando, na mesma categoria, o aluno afirmou “se cortar ao meio tem dois cubos”, essa imagem mental (embora não represente o conceito, pois é uma

imagem particularizada para um tipo de paralelepípedo) foi transformada e reorganizada pelo indivíduo e relacionada com o conceito de cubo. As abstrações reflexivas pareceram permitir tal coordenação de ações, seja com os objetos, seja com as imagens. Foi observado que a linguagem utilizada pelo aluno ainda se referia à do cotidiano, pois em uma linguagem mais específica para geometria, o correto seria dizer que existe paralelepípedo reto-retângulo que, sendo seccionado por um plano perpendicular à sua base, pode dar origem a dois cubos. A figura a seguir ilustra a ação possível, seja com o próprio objeto, seja com imagens mentais.

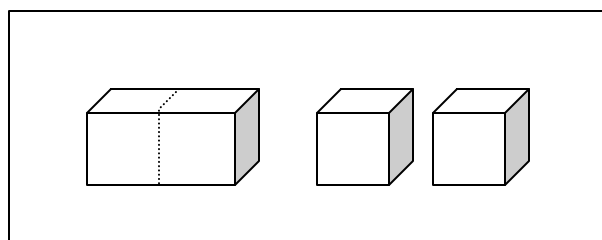


Figura 21. Paralelepípedo seccionado “ao meio” resultando dois cubos

O presente estudo tratou dos conceitos relativos às formas geométricas dos objetos físicos, representados por figuras, sendo que a realidade das formas não está nos objetos. Para aprender tais formas, o aluno deveria interpretar a realidade, interagindo com ela e transformando-a. Para muitos alunos, a figura cilindro – que fazia parte da prova de conhecimentos – talvez não fosse mais do que o simples desenho do objeto, e por isso deram-lhe o nome de cano ou de bastão. Só quem interpretou o desenho sob um ponto de vista geométrico conseguiu nomeá-lo como cilindro.

Figuras que, para um especialista, seriam todas chamadas de paralelepípedos, não foram organizadas e nomeadas dessa maneira pelos sujeitos. A semelhança entre os paralelepípedos não parece ser, portanto, objetiva, mas produto de um sistema conceitual que os alunos, pelo fato de pouco terem estudado geometria, não formaram.

De acordo com as teorias organicistas, o significado de um conceito é estabelecido a partir de relações com outros conceitos. Assim, o sujeito interpreta a realidade a partir de seus conhecimentos anteriores, conhecimentos estes construídos sob a forma de estruturas. É possível, a partir dos resultados relativos às habilidades,

inferir que muitos alunos apresentaram alguns conhecimentos estruturados, e os utilizaram para nomear ou descrever as figuras ou para desenhar as planificações. A linguagem utilizada mostrou que possuíam conceitos referentes à geometria plana, talvez em um nível de análise de propriedades, e foi essa estrutura conceitual que permitiu que eles interpretassem as figuras apresentadas.

Para Piaget (1971), a aquisição dos significados, ou mais precisamente, a aprendizagem de conhecimentos específicos, depende completamente de estruturas cognitivas gerais. O aluno interpretaria as informações que provêm do seu meio – por exemplo, a forma de uma caixinha de leite – em função das estruturas conceituais disponíveis. É o processo de assimilação que integra os elementos exteriores e as estruturas em evolução às estruturas disponíveis.

Assim, o aluno poderia interpretar a caixinha de leite apenas como um tipo de embalagem de papelão, se esta fosse uma estrutura conhecida, isto é, se ele já conhecesse outros tipos de embalagem. Porém, se ele já tivesse formado o conceito de retângulo, poderia assimilar a caixinha como sendo uma figura geométrica formada por faces retangulares. Se incluísse os retângulos como polígonos, a caixinha passaria a ser assimilada como uma figura cujas faces são poligonais.

Porém não é só a assimilação que explica a origem dos conceitos. É necessária uma modificação dos esquemas prévios em função da nova informação assimilada, com acréscimo de uma nova assimilação – uma reinterpretação dos conceitos anteriores – para modificar toda a estrutura precedente (Pozo, 1998). Essa modificação recebe o nome de acomodação.

O progresso nas estruturas cognitivas decorre da existência de um equilíbrio entre os processos de assimilação e acomodação. Assim, o conhecimento da forma da caixinha e de seu possível nome, paralelepípedo, poderia se constituir apenas em um saber isolado. Poderia, também, integrar-se em estruturas do conhecimento já existentes, e o sujeito poderia reconhecer a forma da caixinha como formada por seis retângulos, através da coordenação de ações realizadas com o objeto. Mas poderia, finalmente, reestruturar por completo os conhecimentos anteriores e, através de coordenação das relações estabelecidas com outros objetos, a caixinha poderia ser

conceituada como poliedro e os polígonos poderiam passar a ser conceituados como as faces de qualquer poliedro.

Para Vygotsky (1995), os significados provêm do meio social externo, mas devem ser assimilados ou interiorizados pelo sujeito de forma particular e, nesse processo, o papel desempenhado pela experiência passada, pela cultura e, na escola, pelo professor, é fundamental.

Tanto Vygotsky como Klausmeier, Ausubel e Van Hiele realçaram o papel da instrução na formação dos conceitos científicos. Ausubel, por exemplo, considerou que toda situação de aprendizagem, seja escolar ou não, poderia ser analisada a partir de duas dimensões: a que se refere ao tipo de aprendizagem realizada pelo aluno (desde a aprendizagem mnemônica até a significativa) e a que se refere à estratégia de instrução planejada para estimular essa aprendizagem (do ensino receptivo até o ensino por descoberta). Van Hiele, ao descrever as fases de aprendizado, enfatizou que tanto o material a ser apresentado aos alunos, como a própria conduta do professor, deveriam propiciar, ao aluno, condições para que ele ativasse os seus conhecimentos prévios, tomando consciência de suas contradições, de modo a reorganizá-los na estrutura cognitiva.

Assim, pode-se afirmar que a reestruturação é um produto não somente da estrutura cognitiva do sujeito, mas da estrutura da realidade e portanto, somente mediante a instrução (que organiza a realidade) é possível a construção de conceitos verdadeiros dentro de uma “pirâmide de conceitos”.

Os sujeitos afirmaram que não tiveram uma instrução específica para a geometria espacial. Apesar disso, muitos puderam responder algumas questões mais simples que não dependiam, talvez, de um ensino sistematizado (como a questão de planificação de figuras, ou o nome de figuras bem conhecidas em seu meio cultural). No entanto, a maioria mostrou que, apesar de possuir conceitos formados sobre geometria plana, não dominou o sistema conceitual de geometria espacial, pois não havia sido objeto de instrução nem no Ensino Fundamental nem no Cefam, até o momento da coleta de dados desse trabalho.

5- Os papéis da intuição do espaço e da instrução nas características dos Níveis 1 e 2.

De acordo com a teoria de Van Hiele, no Nível 1 o indivíduo perceberia os conceitos geométricos como entidades totais, não veria componentes ou atributos, sendo que a aparência física seria determinante para reconhecer figuras e não suas partes ou propriedades.

Nota-se que, na descrição desse nível, a idéia de percepção se aproxima da definição da Gestalt. Ou seja, as formas seriam percebidas como um todo e não pelos componentes ou atributos. Realmente, parece que para reconhecer formas que lhes são familiares, o sujeito se baseia na percepção global.

Segundo Piaget e Inhelder (1993), a atividade perceptiva (em oposição à percepção passiva) está baseada em um conjunto de ações e de coordenações que o sujeito estabelece e que são relativas à construção do espaço perceptivo. A percepção das boas formas (ou formas euclidianas simples) desenvolve-se, segundo Piaget e Inhelder (1993), de acordo com um sistema de relações organizadas, como as topológicas, euclidianas e projetivas.

Assim, por exemplo, além das relações topológicas mais elementares (de vizinhança, separação, etc), quando a criança reconhece um objeto quadrado feito de madeira visto em perspectiva, ela coordena uma correspondência projetiva entre duas perspectivas distintas (de frente, de lado), com uma correspondência euclidiana que garante o reconhecimento de lados iguais.

Como a teoria de Van Hiele foi desenvolvida para ser utilizada em um ambiente escolar, então, no Nível 1, as crianças mais velhas já seriam capazes de estabelecer as relações perceptuais necessárias para reconhecer não apenas as formas que lhes são familiares, mas também as formas topológicas, projetivas e métricas. No entanto, como ela não vê – segundo a teoria – os atributos, então reconheceria apenas as formas já apresentadas a ela anteriormente, não sendo capaz de generalizar de uma forma para outra.

Insistindo ainda nas características do Nível 1, de acordo com a teoria de Van Hiele, a criança poderia identificar formas e reproduzir um desenho em papel quadriculado. Ora, identificar formas é uma atividade representativa e, segundo Piaget,

a abstração de uma figura não é uma abstração perceptual de uma propriedade física, mas é resultado de uma coordenação das ações da criança, sejam ações sensório-motoras ou operações mentais. Assim, uma coisa seria perceber um círculo ou um quadrado (e até nomeá-los); outra coisa seria reconstruir uma imagem visual para poder desenhá-los. A questão da imagem fornece indícios da passagem do espaço perceptivo ao espaço representativo, sendo que essa passagem demora alguns anos para ser concluída. As crianças entre dois e três anos só reconhecem as formas dos objetos familiares (como bala, pente, colher, tesoura), sendo que essas formas são apreendidas como um todo. Depois, passam a reconhecer as formas topológicas, isto é, as que envolvem fechamento ou abertura, separação, enlaçamento, figuras com furos etc (por exemplo, distinguem um anel de um círculo, mas não distinguem um quadrado de madeira de um triângulo também de madeira). No processo, são estabelecidas as relações euclidianas, quando se inicia então um processo de diferenciação entre figuras curvas e com retas – sendo que as retas são diferenciadas pelos ângulos – de igualdade ou desigualdade entre os lados das figuras e de paralelismo e não paralelismo. O desenho permanece em atraso em relação ao reconhecimento, mas nesse estágio a criança desenharia, por exemplo, quadrados, retângulos e triângulos, e apresentaria dificuldade em desenhar um losango e, principalmente, uma cruz gamada. Apenas no nível das operações concretas, as figuras são exploradas sistematicamente, sendo os elementos percebidos em função de um ponto de referência em uma coordenação reversível.

Segundo a teoria de Van Hiele, apenas no Nível 2 o indivíduo estaria apto a iniciar as análises das figuras, embora não possa, ainda, relacionar essas propriedades. Assim, no Nível 2, seriam incluídos os sujeitos capazes de perceber os quatro lados congruentes do losango mas ainda incapazes de relacionar esse aspecto com o retângulo, usando o paralelismo dos lados. De acordo com Piaget, a representação das relações euclidianas é a que permitiria ao sujeito estruturar a forma do losango. Sendo assim, possivelmente uma criança incluída no Nível 1 não seria capaz de fazer o desenho de um losango, apesar de reconhecê-lo como tal.

Isso parece indicar que o Nível 1 (de Van Hiele) não se caracteriza apenas pela percepção das formas, mas diz respeito às relações que fazem parte da construção do

espaço representativo (de Piaget). É provável que a criança nesse nível possa reconhecer formas como círculo mas não reconheça outras, como paralelogramos. Poderia desenhar quadrados, mas poderia não desenhar losangos. Parece que, mais que um nível geral de pensamento, o Nível 1 deveria ser analisado como um grupo de figuras que exigissem do aluno os mesmos tipos de relações, ou seja, topológicas (para as formas mais simples), projetivas (para as que envolvessem perspectivas) e métricas (para as que envolvessem medidas, ângulos, paralelismo, etc).

Uma outra questão relativa ao reconhecimento de figuras diz respeito à classificação dessas figuras dentro de um mesmo grupo.

A tarefa de reconhecer um cubo, identificá-lo a partir de um conjunto de figuras e nomeá-lo não parece exigir do aluno as mesmas relações que exigiria a tarefa de executar as mesmas coisas com um prisma. O conceito de cubo tem um único representante, enquanto que o de prisma tem muitos. A figura pode exemplificar um conceito, mas não pode representá-lo definitivamente, sempre. Talvez um prisma só pudesse ser reconhecido se fosse apresentado anteriormente um modelo semelhante ao aluno. A figura a seguir ilustra vários tipos de prismas.

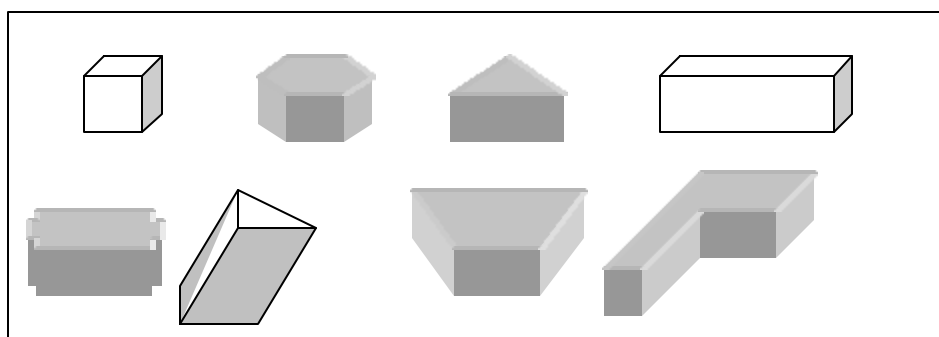


Figura 22. Vários tipos de prismas

O significado de um conceito é estabelecido a partir de relações com outros conceitos. O sujeito interpreta a realidade a partir de seus conhecimentos anteriores, mas não somente isto, os próprios conhecimentos anteriores são construídos sob a forma de estruturas. Mas ainda isso não basta para explicar a interpretação da realidade. Para Vygotsky, os atributos necessários e suficientes para definir um conceito são estabelecidos por características dos elementos encontrados no mundo

real, selecionados como relevantes pelos diversos grupos sociais. Os conceitos geométricos referentes às formas dos objetos, enquanto entidades públicas, já estão definidos. Assim, somente através de uma instrução intencional, as características poliedro e faces paralelas e congruentes se tornariam atributos definidores, e não outras. As propriedades devem ser organizadas de modo a serem vistas como elementos para classificar figuras, da maneira como pretende o ensino nas escolas.

É possível concluir, então, que o reconhecimento e a nomeação de figuras só seriam características relativas ao Nível 1 de Van Hiele se a forma em questão fosse semelhante a alguma outra apresentada (e nomeada) ao sujeito ou então se fosse uma figura já familiar a ele.

Uma última questão referente ao Nível 1 de Van Hiele refere-se à nomeação das figuras. Se, para classificar o nível de pensamento de um indivíduo, a nomeação da figura deve ser correta, então fica claro que os níveis a que se refere Van Hiele estão muito diretamente ligados à instrução. Nesse sentido, as idéias de Vygotsky são pertinentes, pois, para este último, a construção de um conceito científico requer a palavra como ancoragem. Assim o indivíduo só daria significado a uma palavra que designa um conceito científico se desse significado às outras palavras que representam os outros conceitos aos quais o primeiro está relacionado. Ao nomear um cubo o sujeito pode estar relacionando a palavra ao objeto e nesse caso a palavra designa um conceito espontâneo. Adultos e crianças, alunos e professores, podem atribuir o mesmo significado a uma palavra que se referira a um objeto concreto, porém o seu entendimento pode se dar em níveis diferentes. Na interação verbal com os professores os pseudo-conceitos podem se transformar em conceitos reais, contudo o aluno precisa percorrer um longo caminho até obter um conceito que coincida com o apresentado por um especialista.

Ao referir-se ao cubo como tendo seis faces quadradas e iguais, o sujeito daria significado às palavras que se relacionam ao conceito científico de cubo, e estaria avançando para o Nível 2. Parece que, no Nível 1, a denominação se refere ao conceito cotidiano, ou então aos pseudo-conceitos.

Os resultados do presente trabalho parecem ilustrar as observações sobre os Níveis 1 e 2 propostos por Van Hiele. Como a coleta de dados foi feita com

adolescentes e adultos, partiu-se da idéia que todos os alunos já tivessem construído as relações espaciais referentes ao espaço perceptivo. No entanto, muitas figuras não foram nomeadas corretamente pelos alunos. De um modo geral, os resultados indicaram que:

- 1- Para reconhecer as figuras tridimensionais apresentadas não bastaria a percepção, seja visual ou tátil (embora os alunos não tenham tido acesso aos objetos concretos). Seria fundamental o desenvolvimento das relações relativas ao espaço representativo. Os desenhos das planificações mostraram que muitos alunos não conseguiram coordenar os vários pontos de vista do objeto, o que poderia estar indicando que eles ainda não eram operatórios quanto às relações projetivas. Possivelmente tal fato tenha dificultado o reconhecimento do cubo e da pirâmide ilustrados na figura a seguir. Verificou-se, ao comparar os dois cubos, que houve apenas a mudança de posição do segundo cubo, enquanto, nas pirâmides, há uma mudança também em relação à base (triangular, em vez de quadrada). Tais fatores poderiam ter influenciado no reconhecimento e nomeação corretos.

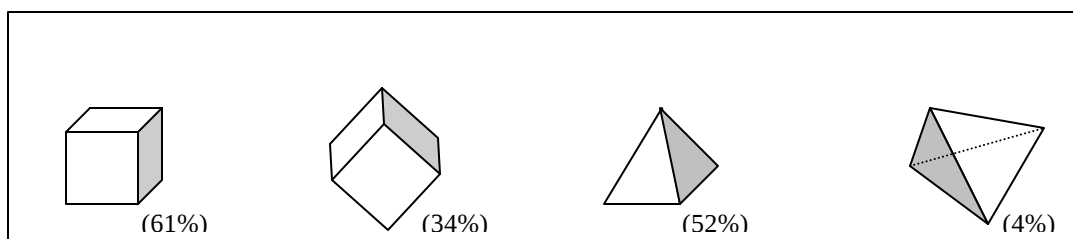


Figura 23. Cubo e pirâmide constantes na Questão nº 1 – Reconhecimento

(Os números entre parênteses indicam a porcentagem de acertos na nomeação para cada figura)

- 2- O reconhecimento de várias figuras espaciais parecia exigir do aluno, além da verificação de suas propriedades, a classificação as figuras de acordo com essas propriedades. Isso evidencia a necessidade de instrução, preferencialmente feita com auxílio de um material estruturado que permita ao aluno verificar as mesmas propriedades em um grupo de figuras e assim classificá-las como representantes de um conceito. A falta dessa instrução, e não uma carência no desenvolvimento das

relações projetivas, poderia ter influenciado as respostas incorretas na tarefa de reconhecimento de dois cilindros da figura a seguir.

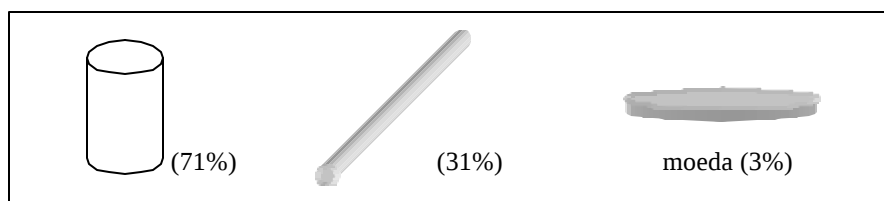


Figura 24. Cilindros constantes na Questão nº 1 – Reconhecimento

(Os números entre parênteses indicam a porcentagem de acertos na nomeação para cada figura).

3- A nomeação de várias figuras – que foram escolhidas para reconhecimento – necessitaria de instrução específica relativa à linguagem da geometria espacial. Os resultados referentes ao paralelepípedo mostraram que vários alunos conseguiram estabelecer relações relativas ao desenvolvimento do espaço representativo e analisar as propriedades mais importantes, como o número e a forma das faces. No entanto, essa figura foi nomeada incorretamente como retângulo pela maioria deles. Houve, nesse caso, falta de conhecimento do nome do conceito e isso pode ser consequência de um ensino com falhas, fato que foi admitido pelos próprios alunos.

6- A habilidade visual e gráfica.

Piaget e Inhelder(1993) concluíram que, devido ao não desenvolvimento de todas as relações envolvidas na construção do espaço representativo, as crianças apresentariam inabilidade para desenhar figuras simples. No caso dos sujeitos do presente estudo, sendo adolescentes e adultos, a imprecisão dos desenhos parecia indicar, de modo semelhante ao observado nas crianças, inadequação de algumas ferramentas para representação de figuras tridimensionais através de desenhos de planificação. Convém lembrar que, pelos instrumentos usados, o sujeito não tinha

acesso à figura no espaço, mas sim à representação dela no plano, através de desenho em perspectiva simples.

Os dados indicaram que essas ferramentas pareciam não estar relacionadas diretamente ao nome da figura, pois muitos alunos que nomearam não planificaram, ao passo que, em vários casos, as planificações foram feitas corretamente, embora as figuras não tenham sido denominadas.

Parece que a percepção de figuras geométricas espaciais é sempre relativa a um ponto de vista. No entanto, para a representação, é necessário que o indivíduo tome consciência desse ponto de vista, isto é, diferencie esse ponto de vista dos outros para, e em consequência, coordená-lo com outros.

A representação chamada de projetiva – que foi observada nas planificações – não é um simples decalque da percepção correspondente, mas supõe a intervenção de ações propriamente ditas. As imagens dessas ações constituem a imitação interiorizada e, quando a regulação completa das ações atinge o nível das composições reversíveis, pode-se falar em representações projetivas operatórias. Convém acrescentar que as ações interiorizadas não dizem respeito somente ao objeto ou ao deslocamento, mas são relativas ao próprio sujeito e consistem em ligar uns aos outros os diversos pontos de vista e fazê-los corresponder a esse ponto de vista único que é o plano da planificação.

O presente estudo analisou as planificações de cinco figuras, o paralelepípedo, o prisma, a pirâmide, o cilindro e o cone. Tais desenhos foram classificados em três categorias: representações fracas, intermediárias, e finalmente regulares e boas.

Foi possível analisar o avanço na qualidade das representações dos alunos do grupo estudado com base nos estágios observados por Piaget e Inhelder (1993) ao propor tarefa parecida aos seus sujeitos.

Assim, as representações fracas corresponderiam ao estágio II definido por Piaget como aquele onde estaria presente uma indiferenciação parcial dos pontos de vista. Nesse estágio, os desenhos do objeto e da planificação permaneceram quase que idênticos, mas houve um início de diferenciação que pode ser observado, por exemplo, através de um simples movimento da figura, do esboço de uma dobra. Pode ter ocorrido também aquilo que Piaget definiu como o “procedimento gráfico da mistura dos pontos

de vista”: seria ainda uma representação topológica, visando o objeto em si mesmo, sem coordenação euclidiana ou projetiva.

As representações intermediárias pareciam corresponder ao início do estágio III caracterizado, segundo Piaget, pela compreensão progressiva da operação de desenvolvimento (para o cilindro e cone) e de rebatimento (para os poliedros). O sujeito, além de figurar a ação de desdobrar – como um esboço do próprio movimento – começou a coordenar os pontos de vista.

Esse início de coordenação dos pontos de vista foi marcado por dois tipos de reação que puderam ser observados. No caso do cilindro e do cone, o primeiro tipo – uma forma mais estática – seria a representação de uma ou mais fases descontínuas do desenvolvimento, sem previsão, em seu conjunto, do resultado das ações, como se o sujeito não pudesse segui-las em pensamento. No caso dos poliedros esse primeiro tipo foi verificado quando o aluno fez o rebatimento incompleto de algumas faces.

O segundo tipo de relações – mais dinâmico – consistiu em representar o desenvolvimento do cilindro ou cone por uma única figura, mas de forma incompleta, como se a ação de desdobramento permanecesse inacabada. No caso dos poliedros, algumas faces apareceram ainda em perspectiva, como se a figura estivesse entreaberta.

Os desenhos incluídos nessa categoria (representações intermediárias) sugeriam que os sujeitos estavam em um processo de transição entre a ação e a operação. A imagem, nos dois tipos descritos nos dois parágrafos anteriores, não conseguia antecipar as ações porque se tratava de ações não coordenadas entre si e, portanto, não são operações. A operação é um sistema de ações coordenadas entre si de modo transitivo e reversível. No caso da planificação, a representação teria caráter operatório se fosse resultado de uma coordenação de conjunto dos múltiplos pontos de vista projetivos possíveis sobre o objeto em questão e, correlativamente, uma estruturação euclidiana do espaço segundo um sistema de coordenadas. Por não ter estabelecido essas coordenações, o sujeito ora não rebateu as faces todas, ora desenhou as faces ainda em perspectiva, ora as apresentou sem conexão entre si.

Vários desenhos da última categoria – aqueles considerados regulares – ainda não apresentavam precisão métrica, seja no comprimento dos lados ou dos círculos,

seja na medida dos ângulos ou no paralelismo. No entanto, a maioria desses desenhos parecia indicar a natureza operatória das relações projetivas. Os desenhos bons pareciam garantir as relações métricas, sendo consequência da construção de um sistema de composição reversível, ou seja, operatório.

Concluindo essa discussão, parece que avaliar os desenhos das planificações implica necessariamente em levantar a questão da intuição geométrica dos alunos. Segundo Piaget e Inhelder (1993) a intuição não é mais uma leitura das propriedades dos objetos; é bem mais do que um sistema de percepções ou de imagens, mas é a inteligência elementar do espaço, em um nível ainda não formalizado. A intuição geométrica caracteriza-se pela ação exercida sobre os objetos, ação que enriquece a realidade – ao invés de extrair dela as propriedades. A ação sensório-motriz é interiorizada tornando-se operatória e, posteriormente, depois operatório formal.

Parece, então, que uma das características do Nível 2 de Van Hiele é o desenvolvimento dessa intuição espacial a nível operatório, mas ainda não formal. Os dados mostraram que poucos alunos planificaram corretamente e, sendo assim, a maioria não parecia realizar tais operações. Talvez – como eles mesmo alegaram – tenham faltado experiências com objetos tridimensionais. De qualquer maneira, o alcance ao Nível 2 de Van Hiele, para a geometria espacial, pareceu depender de uma instrução específica que respeitasse o desenvolvimento da intuição geométrica dos alunos.

7- Sobre os graus de aquisição dentro dos níveis.

A análise dos dados encontrados evidenciou uma tendência geral, caracterizada pela média de acertos dos alunos em cada nível, da existência da hierarquia dos níveis de Van Hiele. Na análise da relação entre os dois primeiros níveis, as retas de regressão encontradas indicaram um desempenho melhor no Nível 1 do que no Nível 2. Assim, os dados gerais indicaram que o aluno primeiro reconhecia uma figura como um todo, depois analisava suas propriedades e só depois relacionava essas propriedades entre si e com as outras figuras.

No entanto, muitos alunos responderam corretamente a questões de Nível 2 e erraram outras de Nível 1. Os resultados mostraram que o conceito em questão e a habilidade requerida interferiram na porcentagem de acertos. Assim, para esses sujeitos, nomear um cone foi mais fácil do que planificá-lo; mas acertar a planificação do paralelepípedo foi muito mais simples do que acertar o seu nome.

Assim, classificar um aluno em um nível – com o objetivo de se planejar uma possível instrução – não pareceu ser a melhor maneira. Perder-se-iam as tendências verificadas para cada conceito e cada habilidade. Classificar os alunos diante de um possível nível para cada conceito também não pareceu ser a melhor forma, uma vez que os conceitos não são formados isoladamente, mas sim em uma teia de relações. Avaliar apenas uma habilidade também não seria o melhor caminho (a habilidade visual/gráfica seria uma forma de o aluno demonstrar seu desenvolvimento de relações espaciais; a habilidade verbal, de demonstrar alguns aspectos da elaboração conceitual). Uma opção foi a classificação dos graus de aquisição dentro de cada nível. Apesar da classificação ser quantitativa, isto é, mediu-se a quantidade de respostas certas, pareceu que, dessa forma, foi feita uma melhor avaliação dos alunos ou, ao menos, não tão limitada. Uma avaliação mais qualitativa foi possível quando se verificaram as categorias de linguagem e de desenhos dentro de cada grau.

Foi possível inferir que alunos em baixa aquisição no Nível 1 nomearam poucas figuras e alunos em completa aquisição nomearam todas as figuras propostas. No Nível 2, os de baixa aquisição não demonstraram analisar figuras, seja através de planificações, seja descrevendo propriedades ou reconhecendo figuras através de propriedades. Já os de média aquisição, tanto podem ter analisado apenas duas figuras – mas demonstrado habilidade visual/gráfica para planificá-las e verbal para usar e entender a linguagem necessária – como podem ter demonstrado apenas uma habilidade (por exemplo, a visual/gráfica) para todas as figuras propostas.

Concluindo esta discussão, pode-se dizer que, pensando em uma possível interferência do professor, os graus de aquisição poderiam dar uma melhor idéia de qual é o conhecimento geométrico desses alunos em relação às principais figuras espaciais investigadas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

” Como ensinar, se não aprendi?”

O mundo está repleto de objetos tridimensionais – a maioria deles com forma geométrica definida. Os conceitos geométricos (que permitiram a confecção desses objetos) são de domínio da humanidade há séculos, podendo, portanto, ser considerados como entidades públicas. As propostas de matemática para o Ensino Fundamental há anos insistem na necessidade de a geometria ser introduzida a partir do estudo das formas espaciais. O Cefam tem uma proposta que o coloca como padrão de qualidade enquanto curso de formação de professores das séries iniciais. Apesar de todos esses aspectos, esse trabalho mostrou que muitos dos alunos, sujeitos do presente estudo, não conseguiram fazer uma leitura geométrica formal do material, estando em um nível de conhecimento que não os possibilitava formalizar relações entre as propriedades das principais figuras espaciais utilizadas.

Por outro lado, a pesquisa mostrou que, assim como pode ser fascinante imaginar – através da história da humanidade – que foi por meio do trabalho (portanto de ação direta com os objetos) que o homem, buscando reproduzir suas peças, descobriu a regularidade das formas e assim os primeiros conceitos relativos a elas; assim como pode ser fascinante imaginar a criança – através da equilibração de suas estruturas – construindo a noção de espaço (repleto de formas) antes perceptivo, depois representativo, antes sensório-motor, depois operatório; assim como pode ser fascinante imaginar que a ação do sujeito sobre o objeto do conhecimento é mediada socialmente pelo outro e através de signos, em especial a linguagem; assim também pode ser fascinante fazer um recorte no processo de formação do conhecimento dos jovens sujeitos desse estudo.

Buscando uma imagem que ilustre esse trabalho, pode-se imaginar um corte feito em um tronco de árvore ou, utilizando-se da linguagem geométrica, uma secção obtida em um cilindro por meio de um plano paralelo à base. A secção plana circular assim obtida – e cuja representação depende da coordenação das ações do leitor – permitiu mostrar um estágio de formação de conceitos dependente de toda a estrutura desse

tronco (tronco que, como se supõe estar em constante desenvolvimento, jamais permitiria outra secção igual a anterior). Se o início daquele processo de formação de conceitos relativos às figuras espaciais se dá com o seu reconhecimento como um todo seguido das primeiras análises de suas partes, a pesquisa confirmou que esse reconhecimento e essas análises variaram de figura para figura e que foram dependentes do tipo de habilidade requerida para tais tarefas. As análises relativas aos desenhos das planificações sugeriram que muitos alunos ainda não coordenavam os pontos de vista (coordenação que diz respeito às relações projetivas de construção do espaço representativo) de forma completa (ou reversível, e assim, operatória). Ao descrever propriedades, os alunos ora se referiram ao objeto, ora às propriedades geométricas planas, mostrando a linguagem como mediadora do processo de formação dos conceitos.

Assim, esse trabalho ocupou-se de estudar uma pequena área da secção do tronco, lembrando que muitos outros fatores estão a intervir no processo de formação do conhecimento em geral, e em particular, do geométrico.

Várias outras interpretações dos dados desse recorte poderiam ter sido feitas, mas todas elas estariam, por certo, dependentes das tendências atuais em educação matemática. As interpretações desses dados podem levar a propostas de ações por parte do professor – tanto das séries iniciais como dos cursos de formação de professores.

Na decisão do professor – entre várias direções e sentidos – de qual a trajetória a seguir, a reflexão sobre como se processa o conhecimento deve contribuir para que tal escolha leve a um ensino voltado para a autonomia.

E assim, acreditando que sua intervenção possa desencadear processos que ajudem no desenvolvimento cognitivo de seus alunos, o professor pode, talvez, fazer com que sua aula de geometria não fique tão distante da aceitação de uma das grandes metas da educação do Ensino Fundamental: a autonomia intelectual.

REFERÊNCIAS

- ALEKSANDROV,A.D.;KOLMOGOROV,A.N.;LAURENTIEV.M.A.(1985). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Alianza Universidad, v.1.Madrid.
- ALFONSO,B.(1991) *Las Matemáticas y el Proceso Educativo*. In: *Area de Conocimiento: Didáctica de la Matemática*.Org: Ángel Gutierrez Rodrigues. Editorial Sintesis. Madrid.
- ARTIGUE,M;DOUADY,R.A(1993) *Didática da Matemática em França*. Lisboa. Quadrante,n.2,v.2.41-67.
- AUSUBEL,D.P;NOVACK,J.D;HANESIAN,H.(1968).*Educational Psychology: A Cognitive View*, Second Edition, New York:Holt,Rinehart and Winston.
- BECKER,F. (1990) *Saber ou ignorância: Piaget e a questão do conhecimento na escola pública*. Psicologia,USP, 1(1): 77-87.
- BLOOM,B.S;HASTINGS,J.T;MADAUS,G.F.(1971). *Handboock on formative and summative evolution of students learning*. Chicago: University of Chicago
- BRASIL(1975). MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO E CULTURA. *Guias Curriculares Nacionais*. Brasília.
- BRASIL(1997).MEC/SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. *Parâmetros Curriculares Nacionais* (9 volumes). Brasília.
- BRITO,M.R.F.(1996).*O Ensino e a Formação de Conceitos na Sala de Aula* In: NOVAES,M.H.&BRITO,M.R.F.(Orgs.) *Psicologia na educação: Articulação entre Pesquisa, Formação e Prática Pedagógica*. Coletâneas da ANPEPP.N.5.V.1. Setembro,72-93.Rio de Janeiro: Xenon .

- BRITO,M.R.F.(1996). *Um estudo sobre as atitudes em relação à Matemática em estudantes de 1º e 2º graus*. Tese de Livre Docência. Universidade estadual de Campinas.
- BURGER, W.F.,SHAUGHNESSY.J.M.(1986) *Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry*. Journal for Research in Mathematics Education. N.1.V.17,31-48.
- CARROL,W.M.(1998)*Geometric Knowledge of Middle Scholl Students in a Reform based Mathematics Curriculum*. Scholl Science and Mathematics. V.98(4),April 1998.
- CASTRUCCI,B;PERETTI,R.G;GIOVANNI,J.R.(1977). *Matemática: 7ª série*. São Paulo: F.T.D.
- CLEMENTS,D.H;BATTISTA,M.T.(1992). *Geometry and spatial reasoning in GROUWS,D.A.(ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. New York: Macmillan Library Preference.
- CLEMENTS,D.H;SWAMINATHA,S;HANNIBAL,M.Z;SARAMA,J.(1999).*Yong Children's Concepts of Shape*. Journal for Research in Mathematics Education. Vol.30.N.2, 192-212.
- COLL,C.(1994). *Aprendizagem Escolar e Construção do Conhecimento*. Tradução de Emília de Oliveira Dihel. Porto Alegre: Artes Médicas.
- COLL,C.(1998). *Aprendizagem e o Ensino de Procedimentos*. In: COLL,C;POZO,J.I; SARABIA,B; VALLS,E. *Os Conteúdos na Reforma. Ensino e Aprendizagem de Conceitos, Procedimentos e Atitudes*. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artes Médicas.

- CORREA,J;SPINILLO,A.G;BRITO,M.R.F;MORO,M.L.O. (1998). *Desenvolvimento de Conceitos Matemáticos: Temas de Interesse para a Educação Matemática*. In: MOURA.M.L.S; CORREA,J;SPINILLO,A.(orgs) *Pesquisas Brasileiras em psicologia do Desenvolvimento*. Rio de Janeiro: Ed.UERJ.
- COX M;PEHARA J. (1998). *Children's Observational Drawings: a nine- point scale for scoring drawings of a cube*. *Educational Psychology*. V.18.Nº3.
- CROWLEY.M.L.(1994).*O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico*. In LINDQUIST.M.M;SHULTE A.A.(org.) *Aprendendo e ensinando geometria* .Tradução de Hygino H.Domingos. São Paulo: Atual.
- DAVEY,G;HOLLIDAY(1992).*Van Hiele. Guidelines for Geometry*. The Australian Mathematics Teacher.V.48.Nº2,26-29.
- DEL GRANDE (1994). *Percepção espacial e geometria primária*. In LINDQUIST M.M.;SHULTE,A.A.(org.). *Aprendendo e ensinando geometria*. Tradução de Higyno H.Domingues. São Paulo: Atual.
- DOLCE,O;POMPEO,J.N.(1985).*Geometria Espacial. Posição e Métrica*. In IEZZI.G. *Fundamentos da Matemática*.v.10.São Paulo:Atual.
- ERNEST,P.(1995). *The Philosophy of Mathematics Education*. The Falmer Press: London.
- EYSENK,M.W;KEANE M. (1994). *Psicologia Cognitiva: um manual introdutório*. Tradução de Maria Helena F Gesser e Wagner Gesser. Porto Alegre: Artes Médicas.
- FARIA, A.(1989).*O desenvolvimento da criança e do adolescente segundo Piaget*. São Paulo: Ática.

- FIorentini,D.(1995). *Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil*. Revista Zetetiké.n.4.1-37.Campinas.
- FLAVELL,J.H(1970). *A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget*. Tradução de Helena Souza Patto-São Paulo: Pioneira.
- FREUDENTHAL,H.(1973). *Mathematics as an Educational Task*, D.Reidel Publish Company/Dordrecht – Holland.
- GALINDO,C.(1996). *Desarrollo de Habilidades Básicas para la Comprensión de la Geometria*. Revista EMA - Investigación e Inivación en Educacion Matemática. Editora Patricia I. Perry-Colombia. V.2, n. 1. Artigo disponível na Internet <http://www.AP2.html.at.ued.uniandes.edu.co>
- GARDNER H. (1994). *Estruturas da mente: a teoria das inteligências múltiplas*. Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas.
- GERDES,P.(1992). *Sobre o despertar do conhecimento geométrico*. Curitiba -UFPR.
- HOFFER, A.(1981). *Geometry is more than proof*. Mathematics Teacher. January V.74,11-18.
- HOFFER, A.(1983). *Van Hiele - Based Research*. In LESH, R. LANDAU, M. *Aquisition of Mathematics Concepts and processes* :Academic Press,INC.
- IEZZI,G (1985). *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo: Atual.
- JAIME A.P; GUTIÉRREZ,A. (1990 a). *A study of the degree of acquisition of Van Hiele levels in secondary scholl students*. Proceedings of the Fourteenth PME Conference. V.II. 251-258. México.

- JAIME A.P;GUTIÉRREZ,A(1990 b). *Una Propuesta de Fundamentacion para la Enseñanza de la Geometria: el Modelo Teórico de Van Hiele* in LLINARES,S.C.(edit.).*Teoria y Práctica en Educacion Matemática*. Ediciones Alfar, Sevilla.
- JALLES.C.C.R.(1997).*O efeito de instruções sobre estratégias metacognitivas de crianças pre-escolares em solução de problemas geométricos*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.
- KALEFF,A .M; REI, D.M;GARCIA.S.S.(1996).*Como adultos interpretam desenhos e calculam volumes de sólidos construídos por pequenos cubos*. Zetetiqué,Campinas, ,jul/dez. V.4,135-152
- KAMII, C.(1984) . *A criança e o número*. Campinas: Papirus.
- KAMII,C.(1992). *Aritmética: Novas Perspectivas-Implicações da Teoria de Piaget*. tradução de Marcelo Cestari- Campinas: Papirus.
- KLAUSMEIER,H.J; GOODWIN, W.(1977). *Manual de Psicologia Educacional*, Tradução de Maria Célia T.A . de Abreu, São Paulo: Harper & Row do Brasil Ltda.
- KÖHLER,W. (1980)*Psicologia da Gestalt*. Tradução de David Jardim. Belo Horizonte: Itatiaia.
- KRUTETSKY,V.A.(1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago,IL:University of Chicago Press.
- LAKATOS, I.(1978). *A lógica do Descobrimento Matemático: Provas e Refutações*. Rio de Janeiro: Zahar Editores.

- LEA H. (1990). *Spatial Concepts in the Kalahari* Proceedings of the Fourteenth PME Conference. V.II. 259-266. México.
- LEITE, L.B. (1993). *As interações Sociais na Perspectiva Piagetiana*. In: BORJA, A. *Construtivismo em Revista – Idéias*. N.20, 41-47. São Paulo: FDE.
- LOPES, M.L.; NASSER, L. (coord.). (1997). *Geometria: na era da imagem e do movimento*. Rio de Janeiro: Editora UFRJ
- LORENZATO, S. (1995). *Por que não ensinar geometria?* A Educação Matemática em Revista - SBEM -, 1º Semestre. 1995. nº 4 .3-13.
- LOVELL, K. (1977). *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos*. Madrid: Ediciones Morata S.A .
- LUJAN, M.L.S. (1997). *A geometria na 1ª série do 1º grau : um trabalho na perspectiva de van Hiele*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.
- MACEDO, L. (1993). *Desafios construtivistas ao professor*. Construtivismo em revista. Idéias- São Paulo: FDE.
- MASON, M.M. (1992) *Geometric Understanding in Gifted Students Prior to a Formal Course of Geometry*. Paper presented at the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (17th, Columbus, OH, October 21-24, Fonte: ERIC 1992-3/97)
- MATOS, J. (1992). *Acomodando a teoria de Van Hiele a modelos cognitivos idealizados*. Quadrante, Lisboa (1): 93-112.
- MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM (1992). *A Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo?* Pro-Posições. São Paulo. V.3 nº1[7]. 11-18.

MIORIM,M.A(1998).*Introdução à História da Matemática*. São Paulo: Atual.

MIORIM,A;MIGUEL,A.FIORENTINI,D(1993).*Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro*. Zetetiké. Campinas. Ano I-nº1.19-38.

MOREIRA,M.A;MASINI,E.F.S.(1982) *Aprendizagem Significativa. A teoria de David Ausubel*. SãoPaulo:Ed.Moraes.

MORO, M.L.(1987) *Aprendizagem Operatória. A Interação Social da Criança*. São Paulo:Cortez.

MORO,M.L.(1996). *Quando as crianças constróem juntas a adição/subtração...e a construção do professor?* In: NOVAES,M.H.&BRITO,M.R.F.(Orgs.) *Psicologia na educação: Articulação entre Pesquisa, Formação e Prática Pedagógica*. Coletâneas da ANPEPP.V.1.(5).Setembro.112-134.Rio de Janeiro: Xenon

NASSER, L(1990). *O desenvolvimento do raciocínio em Geometria*. Boletim GEPEM, (27).93-99.

NASSER L(1992). *Using the Van Hiele Theory to Improve Secondary Scholl Geometry in Brasil*. London,University of London,(Tesis for the PhD degree)

NASSER,L.(1993).*A teoria de Van Hiele: pesquisa e aplicação* .Trabalho apresentado no 1º Seminário de Educação Matemática.UFRJ.

NASSER,L, SANT'ANNA,N.F.P(coord.) (1995).*Geometria segundo a Teoria de Van Hiele*.Projeto Fundação – UFRJ.

- NCTM(1989).National Council of Teacher of Mathematics,*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*.Reston.Virginia.
- NORUSIS,M.J.(1993).SPSS for Windows Base System User's Guide Release 6.0.Chicago,IL:SPSS.Inc.
- NUNES, T.(1997).*Crianças fazendo Matemática*. Trad. Sandra Costa. – Porto Alegre: Artes Médicas.
- NÚÑEZ,R;CORTI D; RETSCHITZKI,J. (1998).*Mental Rotation in Children from Ivory Coast and Switzerland*. Journal of Cross Cultural Psychology. V.29.Nº4.July.577-589.
- NUNOKAWA,K.A (1992).*Consideration on van Hiele Levels from the Perspective of Recognizing Figures*. Bulletin of Institute of Education (University of Tsukuba), 16(2),139-152. Resumo disponível na Internet
<http://www.juen.ac.jp/math/nunokawa/kaita/paer1.html>
- NUNOKAWA,K. (1993).*Giving a New Sense to van Hiele Theory:Reconsideration from Perspectives of Informal Knowledge and Zone of Proximal Development*. Research Journal of Educational Methods, 19, 37-46. Resumo disponível na Internet
<http://www.juen.ac.jp/math/nunokawa/kaita/paer1.html>
- O'DAFFER,P.G.(1981).*What Shape for a Comprehensive Balanced Curriculum?*
 In:LINDQUIST,M.M. *Selected Issues in Mathematics Education*. Berkeley: MC Autchan Publishing Corporation.
- OLIVEIRA,M.K.(1992). *Vygotsky e o Processo de Formação de Conceitos*. In LA TAILLE,Y. *Piaget, Vygotsky,Wallon: teorias psicogenéticas em discussão*. São Paulo: Summus.
- OLIVEIRA,M.K.(1998). *Vygotsky: Aprendizado e desenvolvimento: Um processo sócio-histórico*. São Paulo: Scipione.

- OLIVEIRA,L.T.F.(1998).*Habilidades espaciais subjacentes às atividades de discriminação e composição de figuras planas*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.
- PAIS, L. C. (1996). *Intuição, experiência e teoria geométrica*. Zetetikê. Campinas,SP: v.4, n. 6. 65-74.
- PAVANELLO,R.M.(1989). *O abandono do ensino de geometria no Brasil: uma visão histórica*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual deCampinas.
- PEGG. J.(1991). *How children learn geometry: the Van Hiele Theory*. The Australian Mathematics Teacher,vol 41.n.2.:5-8.
- PEGG.J; DAVEY,G.(1991). *Levels of Geometric Understanding*. The Australian Mathematics Teacher,vol 47. N.2:10-13.
- PEREZ,G. (1991).*Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares*. Tese de doutorado.Universidade Estadual de Campinas.
- PERMINOV.V.(1988).*On the reliabilty of mathematical proofs*.revue *Internationale de Philosophie*,Vol.42(167).
- PIAGET,J.(1967). *Seis estudos de psicologia*.Tradução de Maria Alice Magalhães D'Amorim, Paulo Sérgio Lima Silva. Rio de Janeiro:Forense. Original :*Six études de psychologie*, (1964) Éditions Gonthier S.A .Genève.
- PIAGET, J.(1971). *Development and learning*. In: *Studying teaching*. London,Prentice - Hall International, 2ª edição.

- PIAGET,J.(1995). *Abstração reflexionante, relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais* / Jean Piaget (et al.): tradução de Fernando Becker e Petronilha Beatriz da Silva - Porto Alegre: Artes Médicas.
- PIAGET, J.;INHELDER B.(1993). *A representação do espaço na criança*. Tradução de Albuquerque.B.M., Porto Alegre: Artes Médicas.
- PINO,A.(1992). *A interação social: Perspectiva Sócio-Histórica*. In: BORJA.A. *Construtivismo em Revista – Idéias*.N.20,49-58. São Paulo:FDE.
- PIROLA,N.A.(1995). *Um estudo sobre a formação dos conceitos de triângulo e paralelepípedo em alunos do 1º grau*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.
- POLYA,G. (1970).*A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.
- POZO,J,I.(1998). *Aprendizagem e o Ensino de Conceitos* In: COLL,C; POZO,J,I; SARABIA,B; VALLS,E.Os *Conteúdos na Reforma. Ensino e Aprendizagem de Conceitos, Procedimentos e Atitudes*. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artes Médicas.
- ROSSI,T.M.F.(1993). *A formação do conceito matemático*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.
- RUBINSTEIN,C.(1994) *Geometria no iº grau: Qual o caminho? Uma aplicação da teoria de Van Hiele em sala de aula*. Dissertação de mestrado. Universidade Santa Úrsula.
- SAADS,S;DAVIS,G.(1997). *Spatial Abilities, Van Hiele Levels, & Language use in Three Dimensional Geometry*. Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Finland.V.4.104-111.

SÃO PAULO(1990) (ESTADO) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas.*Proposta Curricular de Matemática para o Cefam e Habilitação Específica para o Magistério*. São Paulo SE/CENP.

SÃO PAULO (1991 a) (ESTADO) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas.*Proposta Curricular para o Ensino de Matemática 1º grau*. São Paulo SE/CENP.

SÃO PAULO (1991 b) (ESTADO) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Atividades Matemáticas*. São Paulo SE/CENP.

SÃO PAULO(1996) (ESTADO) Secretaria da Educação. Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo -SARESP. *Relatório Final dos Resultados da 1ª Aplicação*. São Paulo.

SAO PAULO(1998) (ESTADO) Secretaria da Educação. Fundação para o Desenvolvimento da Educação.Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo. Matemática - *Análise Pedagógica dos Itens das Provas Aplicadas aos Alunos das 4^{as} e 8^{as} Séries*.vol III.São Paulo.

SEBER, M.G(1989).*Construção da Inteligência pela Criança – Atividades no Período Pré - Operatório*. São Paulo: Scipione.

SHERARD,W.H(1981). *Why is geometry a basic skill?* Mathematics Teacher.V.74.January. 19-21.

SIEGEL,S.(1975).*Estatística não paramétrica*.São Paulo: McGraw-Hill

SMOLKA,A.L.(1992). *Internalização: seu significado na dinâmica dialógica*. Educação & Sociedade.Nº42.Agosto.328-335.

- SMOLKA,A.L.(1995). *Conhecimento e produção de sentidos na escola: a linguagem em foco*. Cadernos CEDES.Nº35.41-51.
- TUNES,E.(1995). *Os conceitos científicos e o desenvolvimento do pensamento verbal*. Cadernos CEDES.Nº35. 29-39.
- USNICK,V., MILLER. P.K., STONECIPHER,(1993) *D.Ideas*, Arithmetic Teacher, March.393-312.
- USISKIN Z. (1994). Resolvendo os dilemas da geometria escolar. In LINDQUIST.M.M. e SHULTE A . A .(org.) *Aprendendo e ensinando geometria* .trad.de Hygino H.Domingos - São Paulo:Atual.
- USISKIN.Z.(1982). Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. CDASSG Project. The University of Chicago.
- VAN HIELE, P.M(1986).*Structure and Insight - A Theory of Mathematics Education*, Orlando: Academic Press.
- VEER, R.V.D.&VALSINER,J.(1996).*Vygotsky uma síntese*. Tradução de Cecília C.Bartalotti. São Paulo:Loyola.
- VYGOTSKY,L.S.(1995).*Pensamento e linguagem*. Tradução de Jeferson Luiz de Carvalho. São Paulo: Martins Fontes.

ANEXO 1 – LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO

Levantamento Bibliográfico

Levantamento realizado por Nasser, 1992 e por Clemente e Batista, 1992 dos vários projetos que foram desenvolvidos desde o final da década de 70 até 1991 para investigar diversos aspectos da Teoria de Van Hiele

1. Investigação sobre a validade da teoria de Van Hiele como um modelo para avaliar o conhecimento geométrico de alunos (Usiskin, 1982; Burger e Shaughnessy, 1986; Fuys et al., 1988; Han, 1986; Hoffer, 1983; Wirsup, 1986)
2. Criação de testes para identificar os níveis alcançados (Usiskin, 1982; Smith, África do Sul, 1987).
3. Investigação sobre a hierarquia dos níveis (Mason, 1989; Mayberry, 1983; Denis, 1987; Gutiérrez e Jaime, 1988; Burger e Shaughnessy, 1986; Wirsup, 1976).
4. Investigação sobre a relação entre o nível de Van Hiele alcançado por um aluno no início de um curso e seu desempenho (Usiskin, 1982; Senk, 1989)
5. Relação entre os níveis de Van Hiele atingidos por um aluno em diversos tópicos em geometria (Mayberry, 1983; Gutierrez e Jaime, 1987; Nasser, 1989; Mason, 1989; Denis, 1987; Fuys et al., 1988; Senk, 1989)
6. Identificação dos níveis de Van Hiele atingidos por futuros professores primários (Mayberry, 1983 e Matos, 1985)
7. Publicação de livro didático baseado na teoria de Van Hiele : "Geometry: a Model of the Universe" (Hoffer, 1979) e de sugestões de atividades em cada nível de Van Hiele, em cinco habilidades básicas em Matemática: visual, verbal, gráfica, lógica e aplicada. (Hoffer, 1981)
8. Módulos de instrução baseados nos níveis e nas fases de aprendizagem de Van Hiele (Fuys, Geddes e Tischler, 1988; Crowley, 1987)
9. Estabelecimento de níveis de Van Hiele em outras áreas de Matemática: Lógica, Números Reais (Hoffer, 1983), Congruência (Nasser, 1990)
10. Comparação entre os níveis de Van Hiele e os estágios de desenvolvimento de Piaget, a taxonomia SOLO, os tipos de compreensão descritos por Skemp, e a linguagem LOGO (Denis, 1978; Lovert, 1983; Ludwig e Kieren, 1985; Scally, 1986; Pegg e Davey, 1988; Jurdak, 1989; Olive, 1991)
11. Investigação dos níveis refletidos em livros didáticos (Fuys et al., 1988; Wirsup, 1976).

ANEXO 2 – INSTRUMENTO UTILIZADO NA PESQUISA

Caro aluno,

Você é a pessoa mais importante nessa pesquisa. Estou estudando o conhecimento geométrico de alunos do magistério, no curso de Mestrado da Unicamp, e faço parte do grupo de pesquisa em Psicologia da Educação Matemática.

Espero contar com a sua colaboração, respondendo as seguintes questões. Em breve trarei os resultados para serem analisados por todos, especialmente por você.

Muito obrigada.

Odaléa.

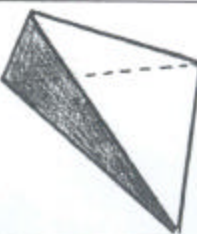
1º PARTE : QUESTIONÁRIO

	1) Série..... turma..... 2) Idade..... sexo.....	Data.....
	3) Fez a 8ª série: a) () em escola pública b) () em escola particular	
	4) Até a 8ª série o ensino de geometria que você teve na sua opinião foi: a) () excelente b) () bom c) () regular d) () ruim e) () nunca lhe ensinaram geometria	
	5) No Cefam, até esse ano, o ensino de geometria tem sido: a) () excelente b) () bom c) () regular d) () ruim e) () nunca lhe ensinaram geometria	
	6) O que é geometria?	
	7) Você acha que estudar geometria é importante? Por quê?	
	8) O que se estuda em geometria plana?	

	
	9) O que se estuda em geometria espacial?
	10) Você gosta de Geometria? a) Sim, gosto() b) Mais ou menos() c) Não gosto()
	11) Por quê ?
	12) Você gosta de Matemática? Sim, gosto() Mais ou menos() Não gosto()
	13) Pôr quê?
	14) Cite alguns assuntos de Geometria que você aprendeu no Cefam.
	15) A Proposta de Matemática de São Paulo e os Parâmetros Curriculares Nacionais sugerem que devam ser ensinadas noções de geometria espacial para as crianças a partir da primeira série do ensino fundamental. Você acha que: a) () está preparado para ensinar geometria espacial para as crianças de 1ª a 4ª séries. b) () sabe algumas coisas mas não está preparado para ensinar as crianças de 1ª a 4ª séries c) () sabe muito pouco de geometria espacial e não está preparado para ensinar.
	16) Justifique sua resposta anterior.

2ª PARTE : PROVA DE CONHECIMENTOS

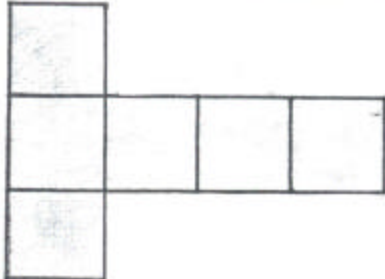
1) Os objetos desenhados (ou nomeados) abaixo podem receber o nome de figuras geométricas tridimensionais. Complete com o **nome geométrico correto**. Se você souber outros nomes para a mesma figura, escreva-os também. (Utilize as linhas pontilhadas)

objeto	nome(s) da figura geométrica	objeto	nome(s) da figura geométrica
a) 		b) 	
c) 		d) 	
e) 		f) 	
g) 		h) 	

objeto		nome(s) da figura geométrica	objeto		nome(s) da figura geométrica
i)			j)		
k)			l)		
m)			n)		
o)			p)		
q)			r)		
s)			t)		
u) bola de ping-pong	v) sala de aula		w) moeda	x) geladeira	
.....					

2) Para fazer algumas figuras geométricas tridimensionais podem ser utilizados moldes de cartolina que devem ser recortados e colados. Esses moldes são chamados de planificações.

Por exemplo, veja a planificação da figura a seguir:

figura	planificação
	

Complete o quadro a seguir, assim:

- se for dada a figura (desenho ou o nome), desenhe a planificação
- se for dada a planificação, desenhe a figura ou então dê o nome geométrico.
- se a planificação estiver incompleta, complete - a .
- se a planificação estiver incorreta, então escreva **impossível** no lugar do desenho

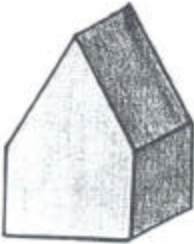
figura	planificação
a) 	
b) 	

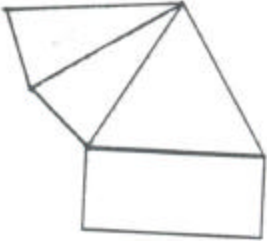
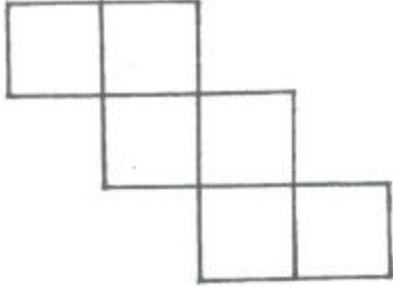
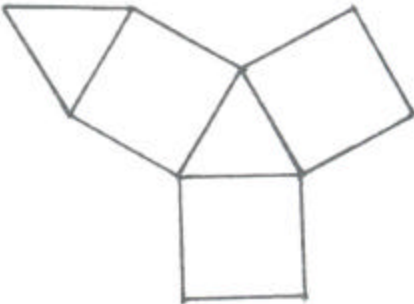
figura	planificação
c) 	
d) 	
e) 	
f)	

figura	planificação
g)	 The planification of a triangular prism, consisting of two identical triangles (the bases) and three rectangles (the lateral faces) arranged in a net.
h)	 The planification of a cube, showing six squares arranged in a cross-like pattern.
i)	 The planification of a cylinder, consisting of a rectangle (the lateral face) and two circles (the bases).
j)	 The planification of a triangular prism, consisting of two identical triangles (the bases) and three rectangles (the lateral faces) arranged in a net.

	3)Escreva duas características ou propriedades dos prismas:
--	--

	4)Escreva duas características ou propriedades dos paralelepípedos:
--	--

	5)Escreva duas características ou propriedades do cubo
--	---

	6)Escreva duas características ou propriedades das pirâmides:
--	--

	7)Escreva duas características ou propriedades dos cones:
--	--

	8)Escreva duas características ou propriedades dos cilindros
--	---

**9)As frases a seguir se referem a figuras geométricas espaciais.
Complete as frases de modo a torná-las verdadeiras:**

	a) Sólidos geométricos cujas faces são polígonos recebem o nome de
	b) Tem seis faces, todas paralelogramos. Seu nome é.....
	c) Uma de suas faces (chamada base) é um polígono qualquer. Todos os seus vértices pertencem ao plano da base, exceto um. Seu nome é.....
	d) É formada por seis quadrados. Seu nome é.....
	e) Para construí-lo, usando cartolina, são necessárias duas bases circulares e a superfície lateral é obtida por meio de um retângulo. Seu nome é.....
	f) Para construí-lo, usando cartolina, é necessária uma base circular e a superfície lateral é obtida por meio de um setor circular. Seu nome é.....
	g) Ele é um poliedro que tem duas faces paralelas e congruentes e todas as outras faces laterais são paralelogramos. Seu nome é.....
	h) É poliedro regular de seis faces. Seu nome.....

--	--

10) Imagine que as figuras das questões a seguir são todas feitas de madeira:

	a) Qual (ou quais) dessas, ao ser colocada sobre a mesa, em <u>qualquer posição</u> , sempre tocaria a mesa em <u>apenas um</u> ponto? () cone () esfera () cubo () pirâmide () cilindro () nenhuma
	b) Qual (ou quais) dessas, ao ser seccionada (cortada) por um plano, em alguma posição, poderia deixar a secção na forma de um quadrado? () cone () esfera () cubo () cilindro () nenhuma
	c) Qual (ou quais) dessas, ao ser seccionada (cortada) por um plano, em alguma posição, poderia deixar a secção na forma de um círculo? () cone () esfera () cubo () pirâmide () cilindro () nenhuma
	d) Qual (ou quais) dessas, ao ser seccionada (cortada) por um plano, em qualquer posição, sempre deixaria a secção na forma de um círculo? () cone () esfera () cubo () pirâmide () cilindro () nenhuma

11) Assinale a alternativa correta

Uma esfera tem raio 5cm. Imagine dois pontos na superfície dessa esfera. A distância entre eles: (Assinale a alternativa correta)

- a) () Mede, com certeza, 5 cm.
b) () Mede, com certeza, 10 cm.
c) () Mede, no mínimo, 5 cm.
d) () Pode medir mais de 10 cm.
e) () Mede, no máximo, 10 cm.

12) Classifique cada sentença a seguir como V(verdadeira) ou F(falsa). Tente justificar **cada resposta, escrevendo ou fazendo um desenho.**

() a) Qualquer prisma tem sempre um número ímpar de vértices.

() b) Existem prismas onde a altura e as arestas laterais tem a mesma medida.

() c) Existem prismas que podem apresentar até três alturas diferentes.

☐

() d) Tomando-se duas arestas quaisquer de um paralelepípedo reto retângulo, ou elas são paralelas ou elas são perpendiculares.

☐

() e) Numa pirâmide reta, coincidem a altura e a aresta lateral.

☐

() f) Se um cone é reto, então a geratriz, o raio da base e altura formam um triângulo equilátero.

☐☐

() g) Se uma esfera de raio 10 cm está inscrita em um cilindro, então o raio da base do cilindro e a sua altura também medem 10 cm.

☐

13) Um plano contendo duas arestas opostas de um cubo é um plano de simetria desse cubo (arestas opostas de um cubo são duas arestas paralelas não pertencentes a mesma face). Quantos planos de simetria desse tipo tem um cubo? Tente desenhá-los.

Resposta:.....

☐

14) Um prisma regular de base hexagonal é interceptado por um plano perpendicular à base.

A secção obtida tem a forma: (assinale a alternativa correta)

() a) de um hexágono congruente à base. () b) de um hexágono semelhante à base.

() c) de um quadrado () d) de um retângulo () e) de um trapézio.

☐

15) Considere as diagonais de um paralelepípedo reto retângulo. Pode-se afirmar que: (assinale a alternativa verdadeira)

() a) sempre são congruentes mas não necessariamente perpendiculares.

() b) sempre são perpendiculares mas não necessariamente congruentes.

() c) sempre são perpendiculares e congruentes.

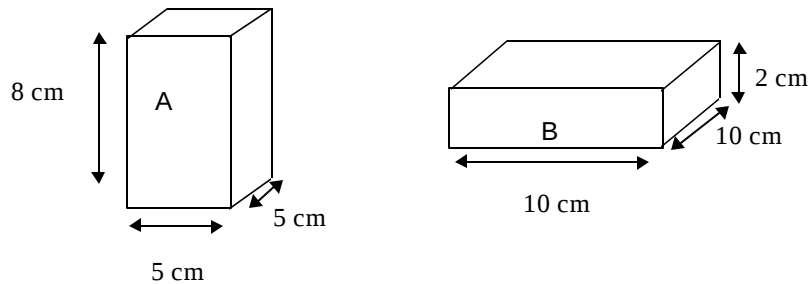
() d) não são nem congruentes e nem perpendiculares.

16) Complete com V (verdadeiro) ou F (falso)

a) ()	Toda figura que é prisma também é um poliedro
b) ()	Existem prismas que também são pirâmides.
c) ()	Se uma figura é um paralelepípedo, então podemos chamá-la também de prisma
d) ()	Nem todos os poliedros são prismas.
e) ()	Todas as propriedades das pirâmides podem também ser verificadas num prisma.
f) ()	Todos os paralelepípedos são poliedros.
g) ()	Todos os prismas são paralelepípedos.
h) ()	Se uma figura é prisma, então podemos chamá-la de poliedro.
i) ()	Todo cubo é um paralelepípedo.
j) ()	Todo paralelepípedo é um cubo.

17) Quer-se fazer embalagens de papel cartolina para guardar clipes. Quer-se utilizar a menor superfície possível de papel, porém de maneira a caber a maior quantidade possível de clipes.

a) Qual das embalagens (cujas medidas estão indicadas a seguir) é a melhor ?



b) Quais seriam as medidas de uma outra caixa com o mesmo volume da caixa A, mas com a menor superfície possível?

ANEXO 3 – SAÍDAS SPSS

Gráficos relativos às relações entre o Nível 1 e o Nível 2.

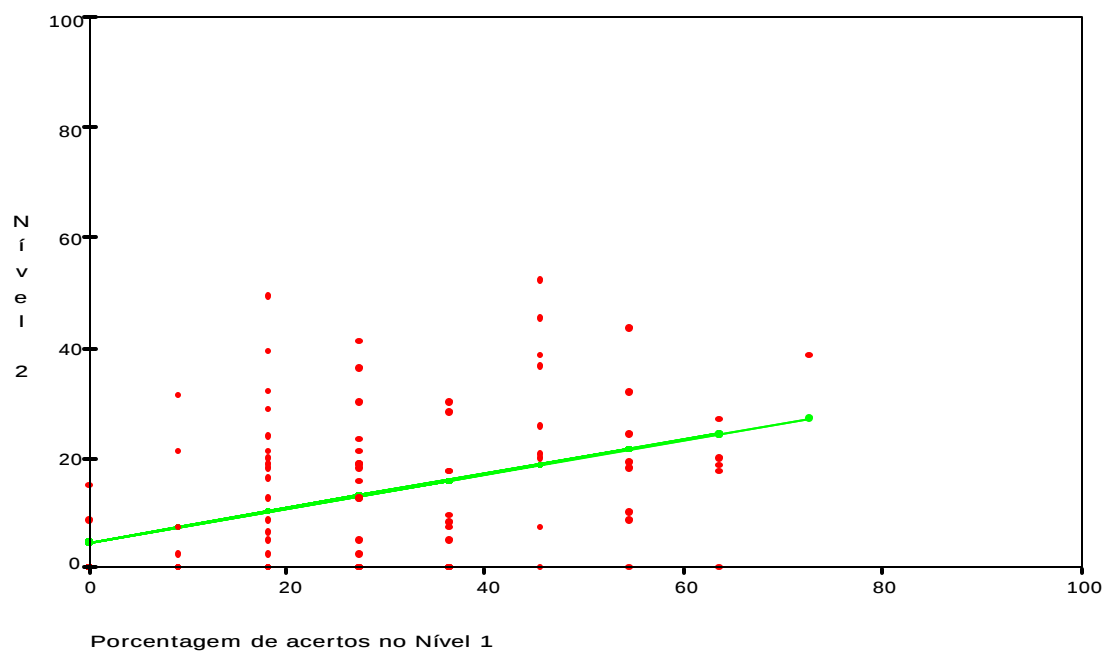


Figura 18. Relação entre o Nível 1 e o Nível 2 na 1ª série.

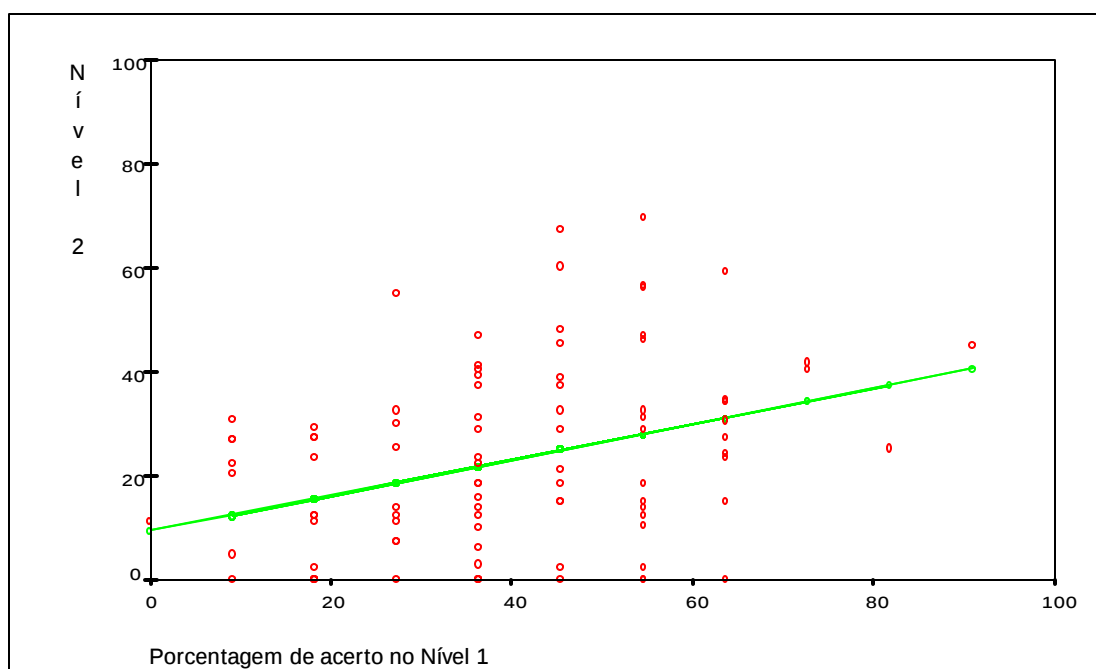


Figura 19. Relação entre o Nível 1 e Nível 2 na 2ª série

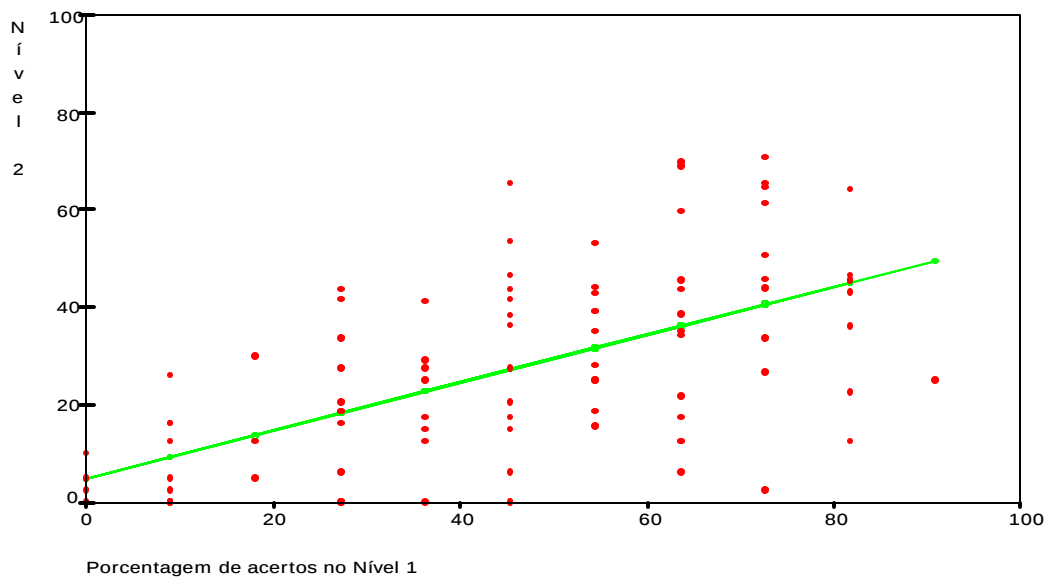


Figura 20. Relação entre o Nível 1 e o Nível 2 na 3ª série

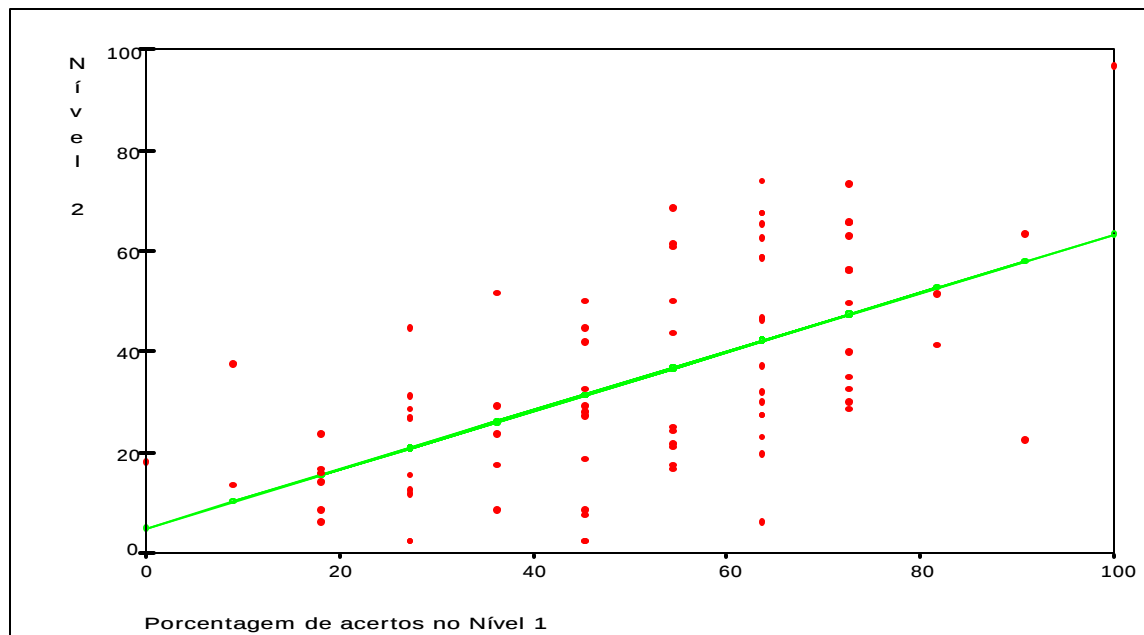


Figura 21. Relação entre o Nível 1 e o Nível 2 para a 4ª série.

Valid cases: 377,0 Missing cases: ,0 Percent missing: ,0

Mean	,1987	Std Err	,0077	Min	,0000	Skewness	,6563
Median	,1646	Variance	,0221	Max	,8467	S E Skew	,1257
5% Trim	,1918	Std Dev	,1488	Range	,8467	Kurtosis	-,0388
				IQR	,2502	S E Kurt	,2507

Frequency	Stem &	Leaf
63,00	0 *	00000000001112222223333444444
62,00	0 .	55555555566667777778888999999
47,00	1 *	000001112222233333444
39,00	1 .	5555556666677889999
36,00	2 *	00011111223334444
23,00	2 .	5556777899
32,00	3 *	00111222333444
32,00	3 .	555566777778899
21,00	4 *	001112233
13,00	4 .	55678
5,00	5 *	01&
2,00	5 .	&
1,00	6 *	&
1,00	Extremes	(,85)

Stem width: ,10
Each leaf: 2 case(s)

& denotes fractional leaves.

Hi-Res Chart # 4:Histogram of desempen

DESEMPEN

Hi-Res Chart # 5:Normal plot of desempen

Hi-Res Chart # 6:Detrended normal plot of desempen

	Statistic	df	Significance
K-S (Lilliefors)	,0991	377	,0000

Hi-Res Chart # 7:Boxplot of desempen

